Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA-ParisTech 2A

Olivier Cadot

▶ **To cite this version:**

Olivier Cadot. Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA-ParisTech 2A. École d'ingénieur. Introduction à la turbulence, ENSTA-ParisTech, France. 2013, pp.83. cel-01228137

HAL Id: cel-01228137

https://ensta-paris.hal.science/cel-01228137

Submitted on 12 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES

Polycopié de Cours

2ème Année cycle Ingénieur-ENSTA

MF-205

INTRODUCTION A LA TURBULENCE

Olivier CADOT

Unité de Mécanique (UME), Dynamique des Fluides et Acoustique (DFA)

Table des matières

1 Introduction Générale **4**

2 Le nombre de Reynolds **7**
2.1 Dynamique des fluides 7
2.1.1 Equation de Navier-Stokes 7
2.1.2 Les deux types de transport de la quantité de mouvement 8
2.1.2.1 Transport diffusif 8
2.1.2.2 Transport convectif 9
2.2 Nombre de Reynolds 10
2.2.1 Forme adimensionnée de l'équation de Navier-Stokes 10
2.2.2 Exemple de l'écoulement de la marche descendante 11

3 Les origines de la turbulence **14**
3.1 Les instabilités 14
3.1.1 Définition 14
3.1.2 Instabilité de cisaillement 15
3.1.3 Instabilité centrifuge 17
3.1.4 Instabilité des tourbillons 19
3.2 Le phénomène de décollement 19
3.3 Transitions vers la turbulence 20
3.3.1 Transition à caractère sous critique 20
3.3.2 Transitions à caractère super-critique 24
3.3.3 Conséquences sur les propriétés énergétiques 24

4 Propriétés de la turbulence **30**
4.1 Introduction 30
4.2 Production d'une gamme d'échelles 30
4.3 Cascade d'énergie de Richardson 30
4.4 La base de la théorie de Kolmogorov (K41) 32
4.4.1 Isotropie des échelles 32
4.4.2 Forme universelle et échelle dissipative 32
4.4.3 La gamme d'échelles inertielles 32
4.4.4 Succès de la théorie K41 33
4.4.5 Illustration de la théorie de Kolmogorov avec la cascade de Richardson . . . 33
4.5 Problématiques de la turbulence 35
4.6 Décomposition de Reynolds 36

4.6.1 Valeurs moyennes, définitions et propriétés . . . 36
4.6.2 Equations de Reynolds . . . 37
4.6.2.1 Equations de l'écoulement moyen . . . 37
4.6.2.2 Equations de l'écoulement fluctuant . . . 40
4.7 Micro-échelle de Taylor . . . 40

5 Modèle de viscosité turbulente et théories de similitudes 42
5.1 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds : fermeture des équations . . . 42
5.1.1 Viscosité turbulente . . . 42
5.1.2 Longueur de mélange . . . 43
5.2 Approximation de couche limite turbulente . . . 44
5.3 Jet turbulent plan . . . 46
5.4 Ecoulement de paroi . . . 48
5.4.1 Profil logarithmique universel des vitesses . . . 48
5.4.2 Comparaison entre couche limite laminaire et turbulente . . . 50
5.5 Ecoulement dans une conduite . . . 52
5.6 Croissance de la couche limite turbulente . . . 54

6 Structures Tourbillonnaires et dissipation d'énergie 55
6.1 Cinématique . . . 55
6.1.1 Décomposition du tenseur des gradients de vitesse . . . 55
6.1.1.1 Propriétés du tenseur des taux de déformation . . . 55
6.1.1.2 Vorticité . . . 56
6.1.2 Equation de la pression . . . 57
6.1.3 Analogie électromagnétique de la vorticité . . . 58
6.1.4 Exemples de structures tourbillonnaires . . . 58
6.1.4.1 Tube de vorticité : le vortex de Rankine . . . 60
6.1.4.2 Le point vortex . . . 62
6.1.4.3 Nappes de vorticité . . . 62
6.2 Dynamique de la vorticité . . . 63
6.2.1 Equation de la vorticité . . . 63
6.2.2 Notions sur la dynamique de la vorticité en écoulement 2D . . . 63
6.2.2.1 Ecoulement 2D en fluide parfait 2D . . . 63
6.2.2.2 Effet de la viscosité . . . 66
6.2.3 Bilan d'enstrophie . . . 67
6.2.4 Etirement de la vorticité, échelle de Burgers . . . 67
6.3 Visualisation expérimentale et dynamique de la vorticité . . . 69
6.4 Production de la game d'échelles turbulentes . . . 72

7 Propriétés statistiques des échelles de la turbulence 75
7.1 Introduction . . . 75
7.1.1 Différences à deux points . . . 75
7.1.2 Energie cinétique des fluctuations . . . 76
7.1.3 Asymétrie des fluctuations . . . 76
7.2 Comparaisons théorie/expérience : le problème de l'intermittence . . . 77
7.2.1 Hypothèse de Taylor . . . 77

7.2.2 Spectre de l'énergie cinétique 78
7.2.3 Lois d'échelles des fonctions de structures 78

8 Conclusion **83**

Chapitre 1

Introduction Générale

La turbulence est l'état d'un fluide dont l'écoulement est irrégulier tel qu'en tout point de l'espace la vitesse varie aléatoirement. Chacun peut observer dans sa vie de tous les jours (*voir figure 1.1*), que les mouvements des fluides sont en fait complexes, désordonnés, bref... turbulents. Il est en fait très rare d'observer un écoulement complètement régulier, et souvent on pense que les écoulements réels sont désordonnés car les forçages qui leur ont donné naissance le sont, ou que les conditions extérieures sont mal contrôlées ou complexes : c'est faux. Les écoulement sont turbulents et imprévisibles par nature. Dans une expérience de laboratoire bien contrôlée (*voir figure 1.2*), on observe que l'écoulement autour d'un obstacle subissant un forçage stationnaire (profil des vitesses amont indépendant du temps) transitera irrémédiablement vers un écoulement désordonné dépendant du temps, au-dessus d'une certaine valeur de la vitesse U.

La réponse instationnaire à une excitation stationnaire témoigne du caractère non-linéaire de la dynamique des fluides. On dispose de l'équation de la dynamique des fluides, on connaît le terme non-linéaire mais la non-unicité des solutions ne donne aucun espoir de tentative de recherche de solutions analytiques dans des cas réels. D'ailleurs, d'un point de vue mathématique, cette équation n'a toujours pas livré tous ses mystères.

A l'heure actuelle, la turbulence est au coeur des problèmes fondamentaux de la physique classique. Elle est essentiellement caractérisée par l'existence de mouvements de toutes tailles, à l'inverse de l'écoulement laminaire qui a lieu à une échelle précise. Ces mouvements correspondent entre autres

FIG. 1.1 – Sillage turbulent produit par une voiture.

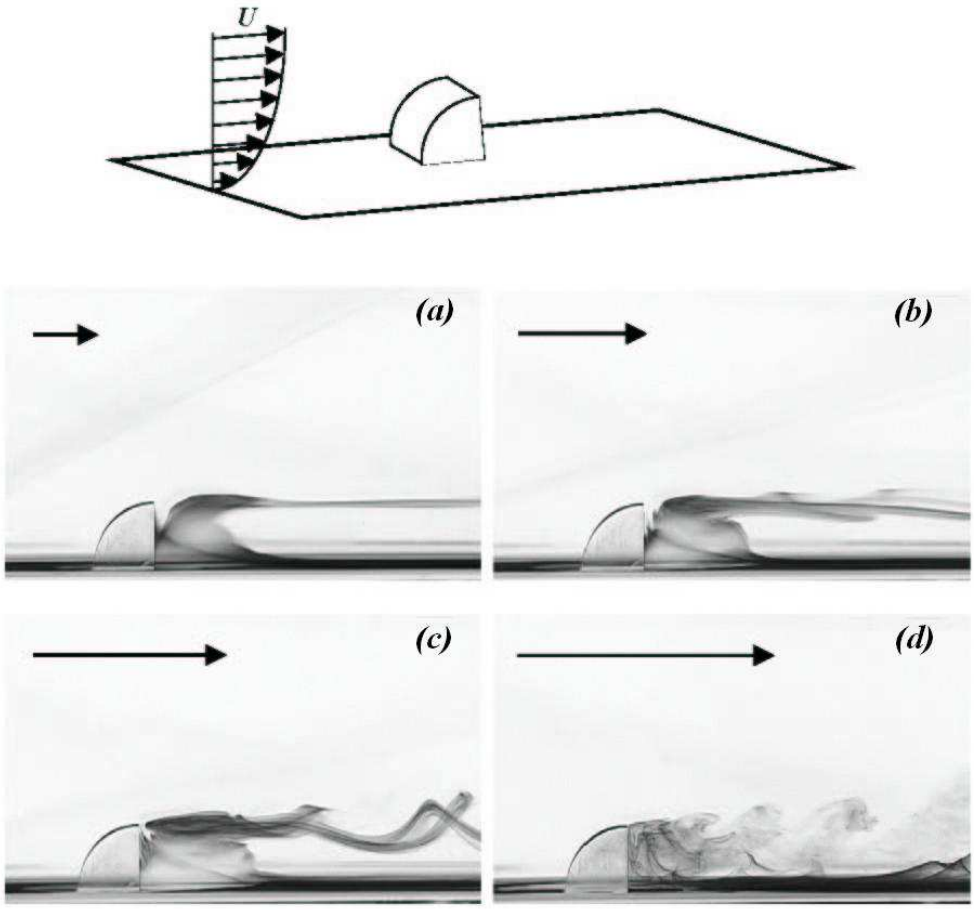


FIG. 1.2 – Changement de structure de l'écoulement en fonction de la vitesse U. Sillage stationnaire (a). Sillage instationnaire périodique (b) et (c). Sillage turbulent (d).

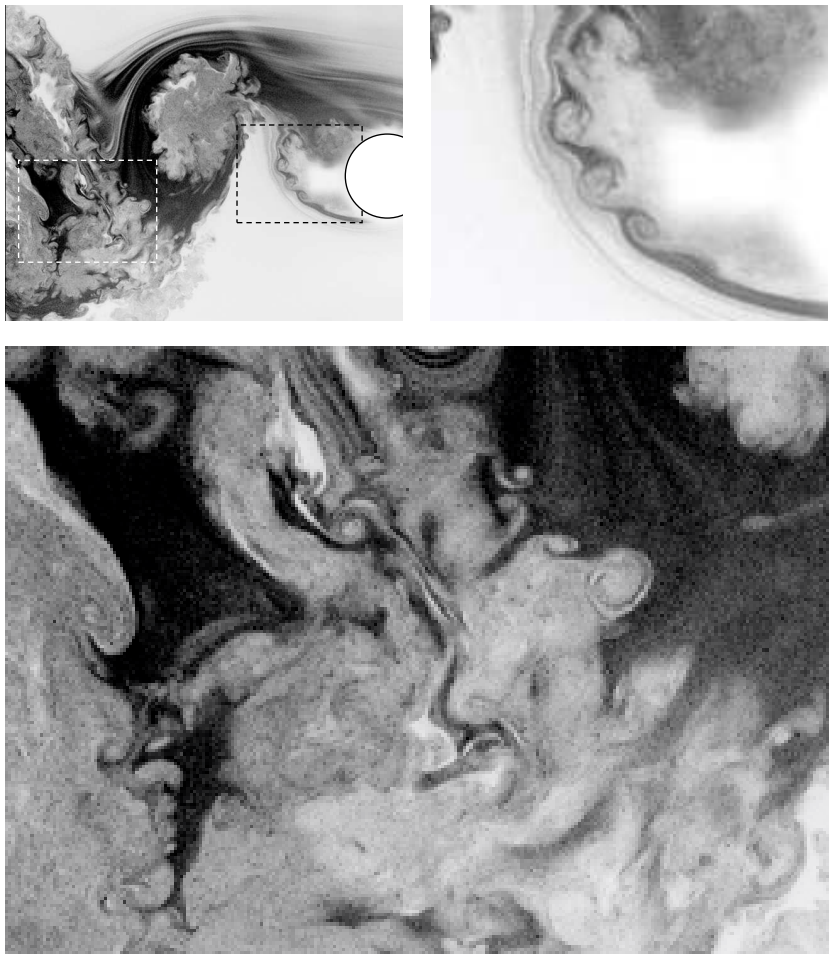


FIG. 1.3 – Sillage turbulent d'un cylindre.

à des tourbillons de tailles différentes dont les plus petits sont transportés par les plus grands (voir *figure 1.3*).

Les questions que nous abordons dans ce cours sont les suivantes : Pourquoi et comment un écoulement devient-il turbulent ?, Quelles sont les propriétés des échelles de la turbulence ? Pourquoi modéliser la turbulence et comment calculer un écoulement moyen ? Quelle est la dynamique responsable de la production des petites échelles et le lien avec la dissipation d'énergie ?.

Chapitre 2

Le nombre de Reynolds

2.1 Dynamique des fluides

2.1.1 Equation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes se démontre à partir d'un bilan de quantité de mouvement par unité de volume pour un fluide incompressible :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f}_{ext} + \mu\Delta\vec{v}. \tag{2.2}$$

La première équation de divergence nulle du champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$ assure l'incompressibilité du fluide. Chaque terme de la seconde équation est une force par unité de volume. ρ désigne la densité du fluide et $p(\vec{r},t)$ la pression, qui par définition est la partie isotrope du tenseur des contraintes. Le terme $-\vec{\nabla}p$ représente donc des contraintes normales liées aux forces de pression.

La force par unité de masse $\vec{f_{ext}}(\vec{r},t)$ regroupe l'ensemble des forces appliquées dans le volume du fluide. Souvent, seules les forces de pesanteur $\vec{f_{ext}} = \vec{g}$ sont présentes. Dans ce cas, on appelle p_0 la valeur que prend la pression en absence d'écoulement, $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla}p_0 = \rho\vec{g}$ (pression hydrostatique). Pour ces écoulements, la mise en mouvement du fluide est assurée par un forçage lié à la vitesse imposée par les conditions aux limites (par exemple, la vitesse de la voiture imposée en tout point de la carrosserie, (voir *figure 1.1*). Enfin μ est la viscosité dynamique du fluide.

En divisant par la densité ρ, l'équation de bilan 2.2 de forces par unité de volume, on obtient le bilan de forces par unité de masse, qui s'interprète aussi comme une équation de transport de la vitesse :

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p - p_0) + \nu\Delta\vec{v}.} \tag{2.3}$$

Cette forme de l'équation fait apparaître la viscosité cinématique du fluide : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (pour de l'eau $\nu_{eau} = 10^{-6}m^2.s^{-1}$ et de l'air $\nu_{air} \simeq 15\nu_{eau}$). Le dernier terme du membre de droite, $\nu\Delta\vec{v}$ qui est un terme linéaire représente le transport de quantité de mouvement (par unité de masse) par diffusion moléculaire.

Le second terme du membre de gauche, $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$ se déduit de la dérivée lagrangienne de la vitesse. Il correspond au transport convectif de la vitesse et, contrairement au transport diffusif, il est non linéaire car c'est une forme quadratique de la vitesse.

Ces deux termes de transport de la quantité de mouvement ont des propriétés fondamentalement très différentes que nous explicitons dans la partie suivante.

2.1.2 Les deux types de transport de la quantité de mouvement

2.1.2.1 Transport diffusif

Nous commencerons par rappeler que la diffusion moléculaire est à la base un processus purement aléatoire d'événements indépendants. Chaque molécule du fluide est en interaction avec les autres (soit par chocs, pour les gaz, soit par forces de type van der Waals pour les liquides ou les solides) de telle sorte que les molécules sont des vecteurs d'échanges de grandeurs physiques (énergie ou chaleur, quantité de mouvement, masse). C'est l'agitation thermique de l'ensemble des molécules qui assure l'incohérence à l'échelle moléculaire. Il en résulte un transport macroscopique statistiquement très cohérent de cette grandeur au travers du système. L'exemple le plus parlant est le transport de la température au travers d'un barreau métallique initialement chauffé d'un côté. La structure de l'équation de transport par diffusion s'écrit pour une grandeur X quelconque :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D\Delta X, \tag{2.4}$$

où D est le coefficient de diffusion pour la quantité X transportée. Le coefficient de diffusion ne dépend que du fluide. Dimensionnellement, on a $[D] = L^2T^{-1}$. A partir de cette équation on tire un temps caractéristique correspondant à la durée nécessaire pour diffuser sur une distance δ :

$$\tau_D = \frac{\delta^2}{D} \tag{2.5}$$

On prend maintenant l'équation de la dynamique 2.3 en posant égal à 0 le terme non-linéaire. Prenons le cas d'un écoulement initialement parallèle $\vec{v} = u(y)\vec{e}_x$ sans gradient de pression suivant $\vec{e}_x$. L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v}. \tag{2.6}$$

C'est une équation de diffusion comme l'équation 2.4. La grandeur vectorielle qui est transportée par diffusion moléculaire est la quantité de mouvement par unité de masse (i.e. la vitesse). Le coefficient de diffusion D est la viscosité cinématique ν. Puisque l'équation est linéaire, l'écoulement restera parallèle tout au long de sa dynamique. Dans la ***figure 2.1(a)***, on montre la relaxation d'un profil initialement en forme de marche avec un saut de vitesse ΔU. Sans entrer dans les détails du calcul (la solution est connue pour le profil initial de la ***figure 2.1***) , il faut savoir, car c'est un résultat général des phénomènes diffusifs (2.5) que la taille caractéristique du profil de vitesse évoluera comme $\delta \propto \sqrt{\nu t}$ et que le temps caractéristique pour transporter la quantité de mouvement sur une longueur δ est :

$$\boxed{\tau_\nu = \frac{\delta^2}{\nu}.} \tag{2.7}$$

Il est important de noter que le temps caractéristique de transport par diffusion moléculaire ne dépend pas de l'intensité de la vitesse U qui est transportée, et que ce transport est d'autant plus efficace que la viscosité cinématique est grande.

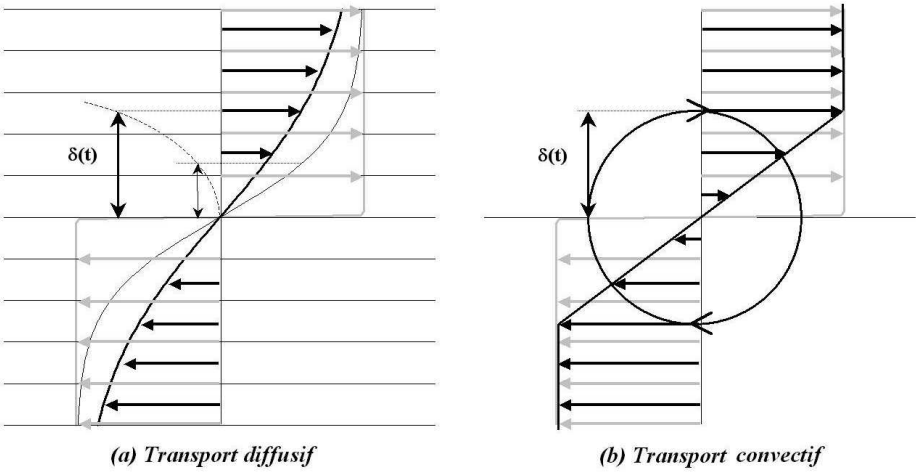


FIG. 2.1 – Evolution d'un profil de vitesse initialement en forme de marche (gris).(a) :lorsque seul le terme de transport par diffusion est présent. L'épaisseur du cisaillement (nul initialement) augmente avec le temps en $\delta \propto \sqrt{\nu t}$. (b) lorsque seul le terme de transport par convection est présent. L'épaisseur du cisaillement (nul initialement) augmente avec le temps en $\delta \propto \Delta U t$

2.1.2.2 Transport convectif

Dans le cas du transport convectif, c'est la vitesse elle même qui transporte la quantité de mouvement. Cette fois ci, on considère l'équation de la dynamique sans le terme diffusif. Dans ce cas l'équation est non-linéaire (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p - p_0). \tag{2.8}$$

Dans le cas des écoulements non-potentiels (ce qui est le cas de la turbulence), on se heurte au problème de l'existence et de l'unicité des solutions. Souvent, les solutions analytiques n'existent pas et on a recours à une simulation numérique. A partir des mêmes conditions initiales que pour le transport diffusif utilisées pour la *figure 2.1 (a)*, on observe une évolution très différente : l'écoulement ne reste pas parallèle, et on assiste à la formation d'un tourbillon (*figure 2.1 (b)*). Ce tourbillon de vitesse périphérique U va transporter de la quantité de mouvement entre la partie supérieure et inférieure. Le tourbillon grossit au cours du temps comme $\delta \propto \Delta U t$. Avec ce mécanisme, le temps caractéristique pour transporter la vitesse sur une longueur δ est :

$$\boxed{\tau_C = \frac{\delta}{U}.} \tag{2.9}$$

On remarquera que le transport est d'autant plus efficace que l'intensité de la vitesse U qui est transportée est grande.

2.2 Nombre de Reynolds

2.2.1 Forme adimensionnée de l'équation de Navier-Stokes

Nous allons écrire l'équation de Navier-Stokes à l'aide de combinaisons sans dimensions (qui seront notées par des primes) des différentes grandeurs qui y interviennent. Soient L et U les échelles respectives de taille et de vitesse de l'écoulement, on a :

$$\vec{r} = L\vec{r}\,' \;\; ; \;\; \vec{v} = U\vec{v}\,' \;\; ; \;\; p - p_0 = (\rho U^2)p' \;\; ; \;\; t = \frac{L}{U}t', \tag{2.10}$$

et l'équation de Navier-Stokes (2.3), devient :

$$\frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t'} + (\vec{v}\,'.\vec{\nabla}\,')\vec{v}\,' = -\vec{\nabla}\,'p' + \frac{1}{Re}\Delta\,'\vec{v}\,', \tag{2.11}$$

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \tag{2.12}$$

Il apparait un nombre sans dimension, Re qui est une combinaison de L, U et ν : le nombre de Reynolds. Il pondère le terme de diffusion visqueuse par rapport aux autres termes de l'équation. Le nombre de Reynolds se lit comme le rapport de deux temps :

$$\boxed{Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{\tau_\nu}{\tau_C}} \tag{2.13}$$

On reconnait les deux temps caractéristiques nécessaires pour transporter la quantité de mouvement sur une longueur L par diffusion et par convection. Au temps le plus court correspondra le transport dominant ainsi le nombre de Reynolds est le rapport entre effets convectif et diffusif :

$$Re = \frac{\textit{effet convectif}}{\textit{effet diffusif}}. \tag{2.14}$$

Il est aussi souvent utile de comprendre le nombre de Reynolds comme le rapport entre les termes de forces d'inertie et forces visqueuses de l'équation de Navier-Stokes 2.2 :

$$Re = \frac{\rho[(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}]}{\eta[\Delta\vec{v}]} = \frac{\textit{forces inertielles}}{\textit{forces visqueuses}}. \tag{2.15}$$

La nature des solutions de cette équation va dépendre crucialement de la valeur du nombre de Reynolds :
si $Re << 1$, l'équation est linéaire car les phénomènes diffusifs dominent.
si $Re >> 1$, l'équation est non-linéaire car les phénomènes convectifs dominent. Les non linéarités produiront : des effets instationnaires pour un forçage stationnaire, des brisures de symétries par rapport aux conditions aux limites initiales, bref... la turbulence.

Le nombre de Reynolds est défini arbitrairement en prenant certaines échelles d'un écoulement, ainsi la transition entre transport diffusif dominant et transport convectif dominant s'opère autour d'un nombre de Reynolds relatif aux échelles choisies : il n'y a donc pas de raison pour que le Reynolds de transition soit $Re = 1$.

2.2.2 Exemple de l'écoulement de la marche descendante

Nous allons illustrer les deux mécanismes fondamentaux de transport dans les fluides par une expérience de laboratoire réalisée dans un tunnel hydrodynamique : l'écoulement de la marche descendante. Le nombre de Reynolds pour cet écoulement est calculé à partir de la vitesse de l'écoulement amont U, la hauteur de la marche $h = 1cm$, et la viscosité cinématique de l'eau $\nu = 10^{-2}cm^2/s$ (voir *figure 2.2*). L'injection de colorant nous permet de visualiser la zone de recirculation derrière la marche. Nous avons reporté dans la *figure 2.3* la longueur X_R de cette zone de recirculation en fonction de U. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 350, l'écoulement est stationnaire et la longueur de la zone de recirculation croît assez linéairement avec U. Au dessus de $Re = 350$, l'écoulement devient instationnaire et la longueur moyenne de la zone de recirculation décroît jusqu'à atteindre une valeur constante de saturation. Le changement brutal qui s'opère correspond au passage du mode de transport diffusif dominant au mode de transport convectif dominant dans la direction verticale. On peut d'ailleurs à partir des temps caractéristiques des transports retrouver simplement les comportements asymptotiques de la *figure 2.3* . Pour le transport diffusif, la vitesse U au dessus de la marche est transportée verticalement vers le sol derrière la marche pendant un temps $\tau_\nu \propto \frac{h^2}{\nu}$ et atteindra donc le sol à l'abscisse $X_R \propto \frac{h^2}{\nu}U$ (pendant la diffusion verticale vers le bas, il y a un transport convectif vers l'aval à une vitesse que l'on suppose être U). Avec cet argument simple on trouve que le mode diffusif impose une augmentation linéaire de X_R avec U, ce qui est effectivement confirmé par l'expérience tant que $Re < 350$.

Au dessus de $Re = 350$, il y a des tourbillons (clairement observables à $Re = 1500$) qui vont transporter la vitesse U au dessus de la marche vers le sol derrière la marche. Si on suppose que la vitesse périphérique de rotation des tourbillons est proportionnelle à U et qu'ils ont une taille proportionnelle à h, alors le temps pour transporter la vitesse U verticalement vers le sol derrière la marche est $\tau_C \propto \frac{h}{U}$. Avec le transport convectif vers l'aval à la vitesse U, la vitesse U qui était au dessus de la marche atteindra le sol en une abscisse $X_R \propto \frac{h}{U}U = h$. On trouve ici que la longueur de recirculation est indépendante de la vitesse de l'écoulement, c'est ce qu'on trouve expérimentalement puisque pour les grandes vitesses, la longueur de la recirculation sature à une valeur constante.

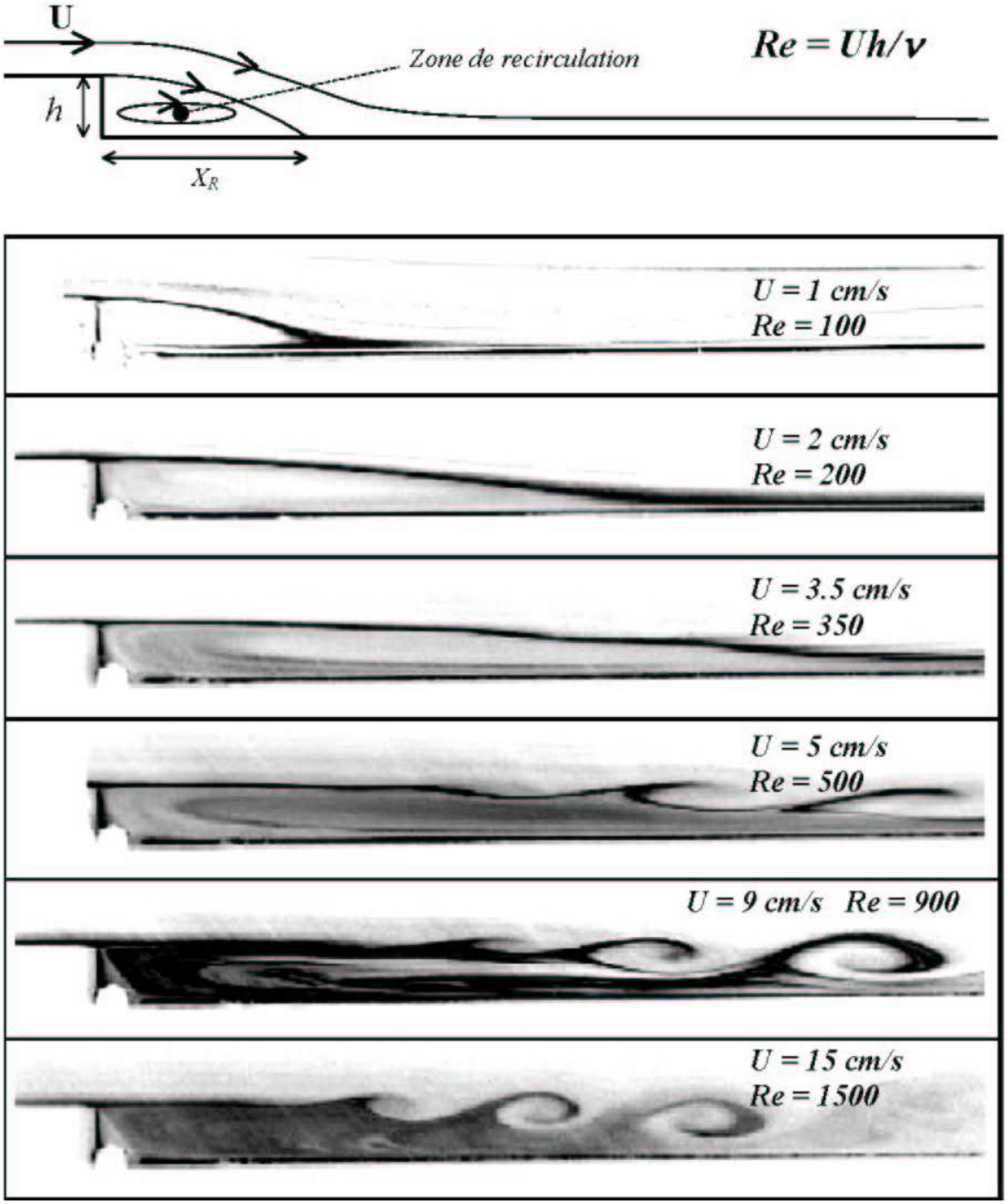


FIG. 2.2 – Visualisation de l'évolution de la recirculation derrière la marche descendante en fonction du nombre de Reynolds. L'écoulement devient instationnaire pour $Re = 350$.

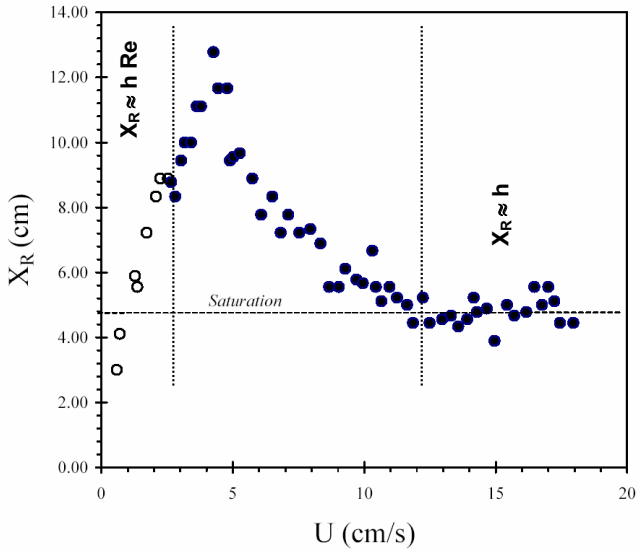


FIG. 2.3 – Mesure de la longueur de recirculation X_R en fonction de la vitesse U. Les cercles blancs correspondent à l'écoulement stationnaire, et les ronds noirs à l'écoulement instationnaire.

Chapitre 3

Les origines de la turbulence

Dans cette partie, on s'intéresse à la manière dont les écoulements deviennent instationnaires et désordonnés à grand nombre de Reynolds. L'origine de ce désordre repose sur le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes qui est le terme inertiel de transport par convection. Ainsi, plus le nombre de Reynolds est grand, plus ce terme aura de poids dans la dynamique et plus on aura affaire à des écoulement complexes et turbulents.

3.1 Les instabilités

Les instabilités sont directement associées au terme non-linéaire inertiel de l'équation de Navier Stokes et sont les ingrédients essentiels de la turbulence. Dans tout ce qui suit on considère des conditions aux limites et/ou un forçage stationnaire.

3.1.1 Définition

Très succinctement, une instabilité est une bifurcation dans la solution d'une équation non linéaire qui s'opère pour une certaine valeur d'un paramètre de contrôle. Ce paramètre est un rapport entre le terme linéaire et non linéaire de l'équation. Pour l'équation de Navier Stokes c'est le nombre de Reynolds qui joue le rôle du paramètre de contrôle. Il existe grosso-modo deux familles de bifurcations modèles qui sont d'une grande importance pour les écoulements (voir ***figure 3.1***). Il s'agit des bifurcations super-critiques et sous-critiques. Pour la bifurcation super-critique, la solution stable de l'équation passe de stationnaire à instationnaire à $Re_{critique}$. La branche stationnaire existe toujours au dessus de $Re_{critique}$ mais elle est instable et donc non observable. La solution instationnaire est caractérisée par la croissance d'une perturbation qui sature sur un mode périodique dont l'amplitude varie comme la racine carrée du paramètre de contrôle (bifurcation de Hopf). La bifurcation sous-critique est très brutale car elle est hystérétique. Le système peut passer de stationnaire à instationnaire en sautant d'une branche à l'autre, ainsi l'amplitude du mode périodique passe discontinûment de zéro à une valeur finie. La solution stationnaire existe au delà de $Re_{critique}$ mais est instable et donc non observable. Nous verrons que ces deux types de bifurcation sont couramment rencontrées dans les écoulements. Avant de discuter de la nature des bifurcations nous exposerons certaines origines physiques des instabilités inertielles en écoulement non visqueux.

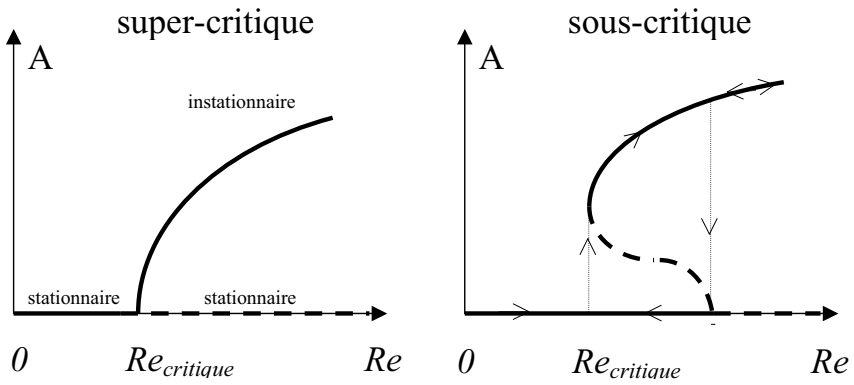


FIG. 3.1 – diagramme de bifurcations, les branches correspondant aux solutions stables sont en traits continues, les branches instables en pointillé. A représente l'amplitude du mode périodique qui devient instable pour $Re \geq Re_{critique}$

. Dans le cas sous-critique, le Reynolds critique dépend des perturbations extérieures.

3.1.2 Instabilité de cisaillement

En écoulement inviscide ($\nu = 0$), le théorème du point d'inflexion de Rayleigh énonce que tout profil de vitesse ayant un point d'inflexion est potentiellement instable ($U^{''}(y_S) = 0$ avec changement de signe). Il existe une forme plus restrictive de ce théorème énonçant que tout profil ayant un point d'inflexion en y_S et vérifiant $U^{''}(y)(U(y) - U(y_S)) \leq 0$ est potentiellement instable (voir ***figure 3.2***).

L'instabilité, si elle a lieu, va se traduire par le fait qu'un champ de vitesse initialement parallèle et stationnaire va devenir non parallèle et instationnaire. Pour comprendre le mécanisme de cette instabilité, il suffit de rappeler qu'un écoulement présentant un point d'inflexion est en fait une nappe de vorticité. En écoulement inviscide la dynamique de la nappe sera entièrement pilotée par l'équation de convexion et la loi de Biot et Savart. Prenons la nappe infiniment fine (voir chapitre 6) où la vorticité est distribuée suivant une ligne. Chaque élément de cette ligne induit sur les autres éléments une vitesse perpendiculaire à la ligne. La nappe rigoureusement droite est instable : c'est-à-dire que la moindre déformation de celle-ci sera amplifiée par le jeu des vitesses induites, et la nappe va s'enrouler (voir ***figure 3.3***a). La nappe infiniment fine est instable pour toute longueur d'onde $\frac{2\pi}{k}$ de perturbation. En fait le taux d'amplification de l'instabilité [1] σ varie linéairement avec k. En présence de viscosité, le cisaillement doit avoir une certaine épaisseur δ, dans ce cas il va s'opèrer un filtrage passe bas et seuls les nombres d'ondes instables seront compris dans une bande $0 \leq k \leq k_c \simeq 1/\delta$ (voir ***figure 3.3***b). L'instabilité sélectionnera un nombre d'ondes correspondant au taux de croissance le plus grand. Typiquement, la longueur d'onde sélectionnée (i.e. le nombre de d'onde k_n dans la figure 3.3(b)) est de l'ordre de 15 fois plus grande que l'épaisseur du cisaillement initial. Un fois les tourbillons formés, ils grossissent et fusionnent pour former des tourbillons plus gros. Il en résulte que la taille du cisaillement $\delta(t)$ évolue comme $\Delta U t$.

L'instabilité de cisaillement est à l'origine de l'enroulement des nappes de vorticité en tourbillons

[1] L'évolution de la perturbation est donnée par $e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)}$ où k et ω sont les fréquences de la perturbation. Pour un taux d'amplification $\sigma > 0$, la perturbation croît exponentiellement et le système est dit instable.

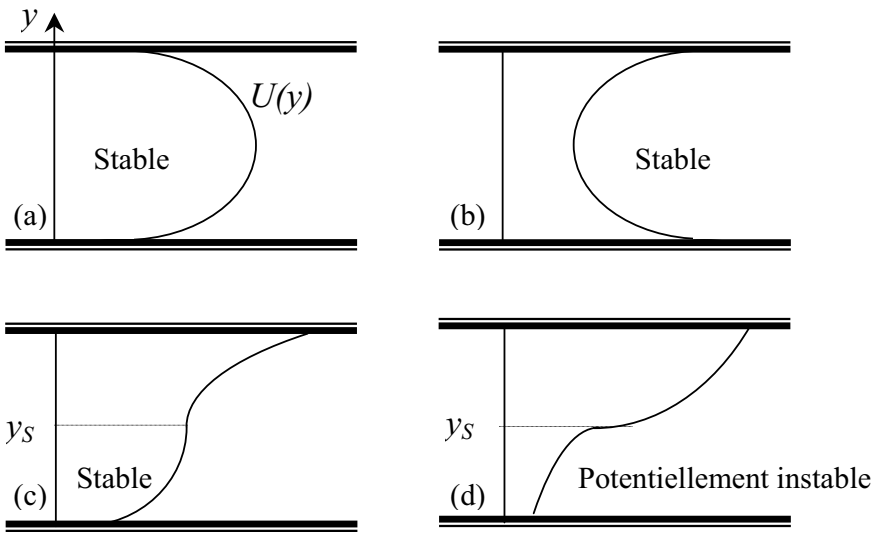


FIG. 3.2 – Stabilité suivant les différentes profils de vitesse en écoulement parallèle. (a) et (b) ne présentent pas de point d'inflexion et sont stables. (c) présente un point d'inflexion mais comme $U''(y)(U(y) - U(y_S)) \geq 0$, le profil est stable. Seul (d) est potentiellement instable.

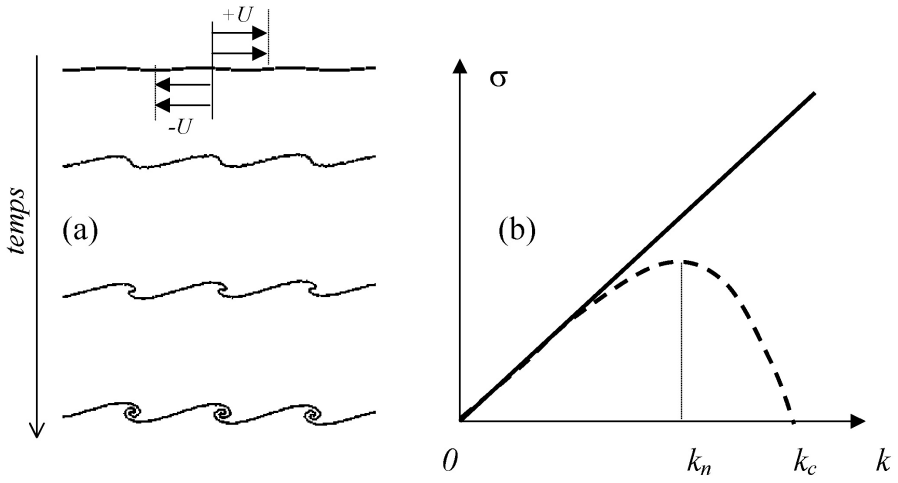


FIG. 3.3 – (a) : Enroulement d'une nappe de circulation (ou saut de vitesse) $\Delta U = 2U$ tournant dans le sens horaire. Dans cette simulation, la nappe est initialement déformée sinusoidalement. (b) : taux de croissance en fonction du nombre d'ondes de la perturbation dans le cas de la nappe initialement infiniment fine et sans viscosité (trait plein, $\sigma \simeq k\Delta U$) et dans le cas d'une nappe d'épaisseur initiale δ (en pointillé).

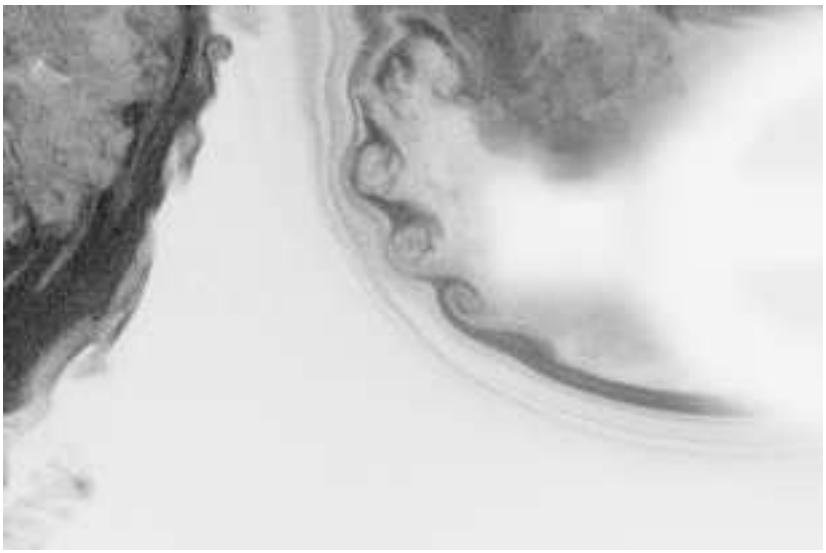


FIG. 3.4 – Détail du sillage de cylindre turbulent. On y voit une succession de tourbillons produite par une instabilité de cisaillement

(voir *figure 3.4*). Cette instabilité est un cas particulier de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir MF102, PC n^o 6) qui traite le cas plus général de la stabilité de l'interface entre deux fluides différents et prenant donc en compte en plus des vitesses de chacun des fluides, les différences de densité et la tension de surface à l'interface. Enfin il faut aussi retenir que cette instabilité est purement bidimensionnelle (2D).

3.1.3 Instabilité centrifuge

Toujours dans le cas inviscide ($\nu = 0$), il existe un critère (critère de Rayleigh centrifuge) de stabilité pour les écoulements courbes. Un écoulement axisymetrique (axe de révolution z en coordonnées cylindrique), est potentiellement instable si le discriminant de Rayleigh est négatif :

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(ru(r))^2 < 0.} \tag{3.1}$$

D'une manière un peu plus générale on peut retenir qu'un écoulement quelconque localement courbé dans une région, sera potentiellement instable dans cette région si le moment cinétique $ru(r)$ décroît en s'éloignant du centre de courbure (voir *figure 3.5*). Ainsi tout écoulement de couche limite sur paroi concave comme représenté sur la *figure 3.6* est potentiellement instable, par contre il sera stable sur une paroi convexe. Contrairement à l'instabilité de cisaillement qui est 2D, l'instabilité centrifuge est 3D. Il faut donc que l'écoulement soit 3D pour qu'elle puisse se développer. Un écoulement disposant initialement d'une symétrie de translation suivant l'axe z, perdra cette symétrie. L'instabilité se déclare par l'apparition de vortex (ou rouleaux) orienté suivant l'écoulement brisant la symétrie de translation suivant z (voir *figure 3.6*).

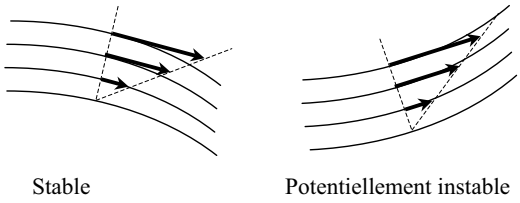


FIG. 3.5 – Critère de stabilité centrifuge pour des écoulement courbes

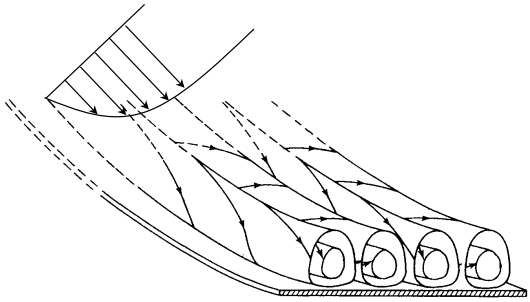


FIG. 3.6 – Structures produites par une instabilité centrifuge d'une couche limite sur paroi concave (d'après Gortler 1940)

FIG. 3.7 – Ondulation des tourbillons de bout d'ailes due à l'instabilité elliptique. Chaque tourbillon est rendu elliptique par le champ de déformation produit par l'autre.

3.1.4 Instabilité des tourbillons

Il existe beaucoup d'autres instabilités inertielles que celles qui sont décritent ci dessus. Parmi elles il y a les instabilités elliptiques et de Crow qui jouent un rôle important dans la transition à la turbulence des écoulements laminaires. Il s'agit d'instabilité 3D, concernant les tubes de vorticité (voir chapitre 6). Un tube de vorticité est stable centrifuge car sa vitesse décroît en $1/r$ loin de centre du vortex. Par contre si le tube est rendu elliptique par un champ de déformation extérieure, l'instabilité elliptique produit une ondulation spatiale suivant l'axe du vortex. Ainsi, le tube de vorticité qui est à la base un objet 2D, transite vers un objet 3D avec ce type d'instabilité. Cette instabilité, tout comme l'instabilité centrifuge produit une composante de la vorticité dans la direction de l'écoulement de base.

3.2 Le phénomène de décollement

Le décollement de couche limite laminaire est souvent à l'origine de la turbulence car il produit des zones potentiellement instables. La compréhension du phénomène de décollement est assez simple, cependant sa description mathématique est d'une extrême complexité. On ne donnera donc ici que le principe du phénomène de décollement. Prenons le cas d'un écoulement le long d'une paroi immobile (située en $y = 0$). Pour la composante u parallèle à la paroi, l'équation de Navier-Stokes stationnaire,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

se simplifie considérablement en très proche paroi. En effet, les termes convectifs tendent vers zero (condition d'adhérence) et le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est négligeable devant le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (condition d'écoulement faiblement non-parallèle). Bref, il ne reste plus que :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.3}$$

On voit bien que le gradient de pression dans la couche limite impose la courbure $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ du profil de vitesse $u(y)$. Sans gradient de pression (couche limite de Blasius, voir MF102 PC n^o 4), le profil de vitesse n'a pas de courbure en proche paroi, le raccordement y est linéaire (figure 3.8(b)). En volume, la courbure devient négative à cause des termes convectifs dans 3.2. En imposant un gradient de pression négatif (on parle d'une gradient de pression favorable, c'est le cas d'une couche limite accélérée), on ajoute de la courbure du même signe à $u(y)$, il en résulte un amincissement de la couche limite comme le montre la figure 3.8(a). Par contre, un gradient de pression positif (on parle de gradient de pression adverse ou défavorable, c'est le cas d'une couche limite décélérée) ajoute de la courbure positive comme le signale la présence du *point d'inflexion* sur le profil de la figure 3.8(c). Ensuite, si le gradient de pression est suffisamment fort, la condition d'équilibre stationnaire 3.3 se traduira, à force d'ajouter de la courbure positive, par un écoulement retour comme on le voit sur la figure 3.8(d). Le point de vitesse nulle qui était initialement collé à la paroi se retrouve en volume : c'est le décollement, et une nouvelle couche limite de vitesse retour apparaît sur la paroi.

Pour des nombres de Reynolds suffisament grands, le décollement apparaîtra inévitablement dans les écoulements divergents et donc autour d'obstacles comme le montre la ***figure 3.14b***. Cependant ce phénomène n'est pas une instabilité car il ne résulte pas de l'amplification exponentielle d'un bruit. Le décollement est souvent à l'origine de la turbulence car une couche limite décollée présente des

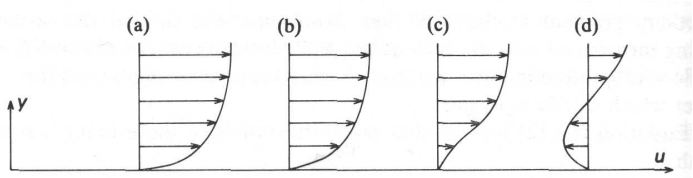


FIG. 3.8 – Profil de vitesse stationnaire sur une paroi. (a) gradient de pression favorable ; (b) gradient de pression nul (Blasius) ; (c) et (d) gradients de pression adverses ou défavorables.

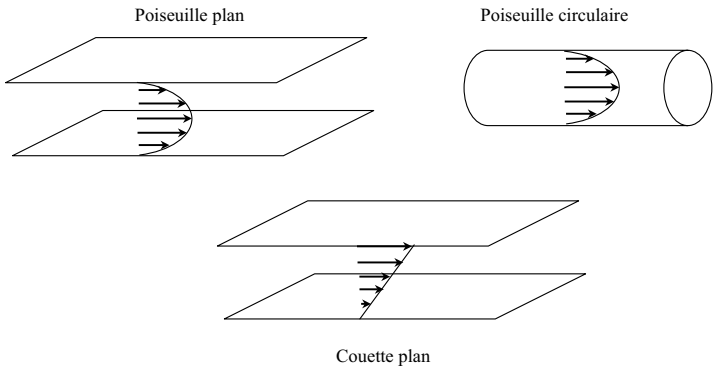


FIG. 3.9 – Exemples d'écoulements transitant par spots turbulents.

profils de vitesse avec point d'inflexion (*figure 3.8*) rendant l'écoulement potentiellement instable vis à vis du critère de Rayleigh.

3.3 Transitions vers la turbulence

Nous allons décrire la manière dont les écoulements transitent vers la turbulence. La transition est étudiée pour une géométrie d'écoulement donnée en augmentant le paramètre de contrôle, qui est pour nous le nombre de Reynolds. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, le terme non-linéaire prend de plus en plus d'importance et on assiste à un scénario caractéristique de transition mettant en jeu des bifurcations changeant de manière drastique la topologie de l'écoulement. A des nombres de Reynolds suffisamment grands, il n'y a plus de bifurcation et l'écoulement atteint un régime pleinement développé : c'est la turbulence dont les propriétés deviennent universelles (i.e. indépendantes de la géométrie du forçage). En fait on peut regrouper les transitions en deux grandes classes génériques ; celle qui se font par suite de bifurcations bien identifiées (cas des sillages et des écoulement courbes instables centrifuges), et celles qui se font brutalement (c'est le cas des écoulements dans les conduites, couche limite).

3.3.1 Transition à caractère sous critique

Il existe des écoulements où la géométrie du forçage et les conditions aux limites imposent la stabilité linéaire de l'écoulement par l'absence de points d'inflexion et de critère de Rayleigh positif (3.1). Ce sera par exemple le cas des écoulements dans les conduites droites, écoulements de couche

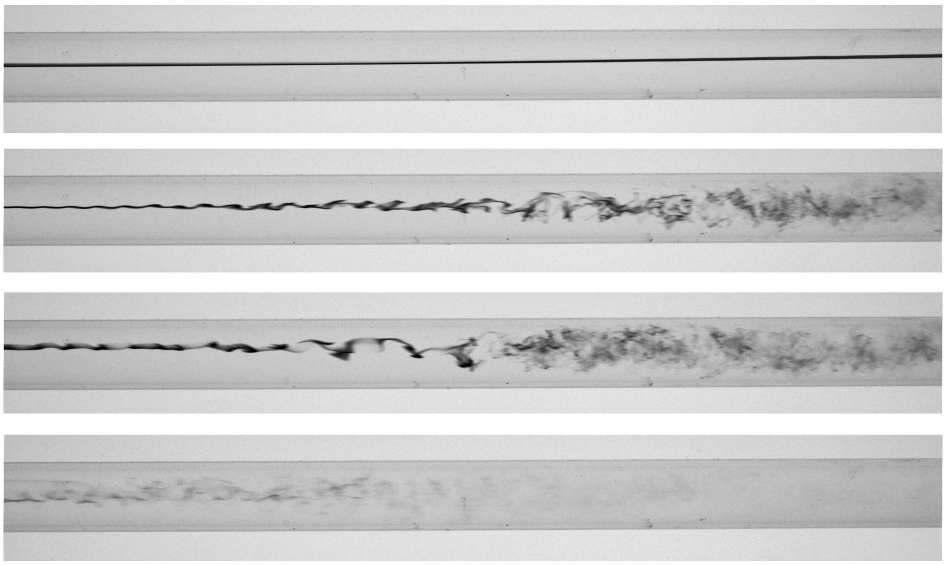


FIG. 3.10 – Un colorant est injecté au centre d'un tube. A partir d'un certain seuil en nombre de Reynolds ($Re = Ud/\nu \simeq 5500$) on peut observer plusieurs types de solutions. Ici, les clichés sont réalisés exactement dans les mêmes conditions expérimentales : on observe soit la solution laminaire stationnaire, soit la solution turbulente sous forme de spot. L'existence de plusieurs solutions est une conséquence du caractère sous-critique de la bifurcation.

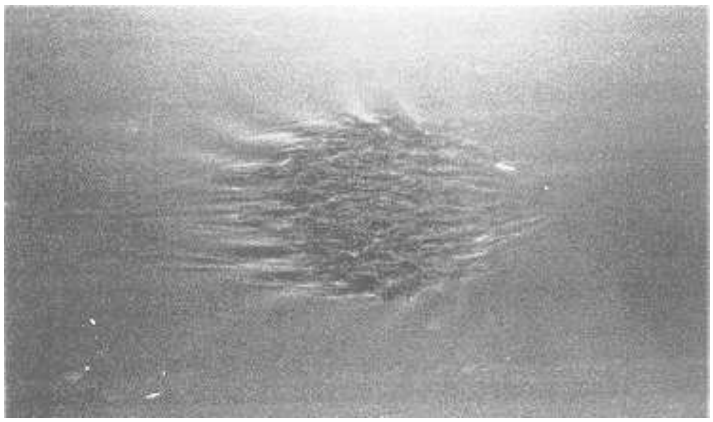


FIG. 3.11 – Spot observé dans un écoulement de Couette plan, autour du spot l'écoulement est parfaitement laminaire.

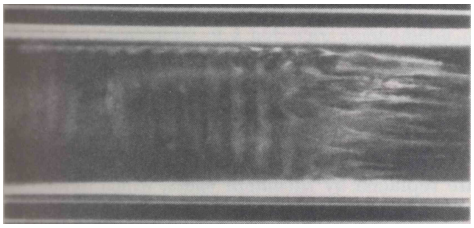


FIG. 3.12 – Visualisation de la transition dans la couche limite de laminaire à gauche à turbulent à droite.

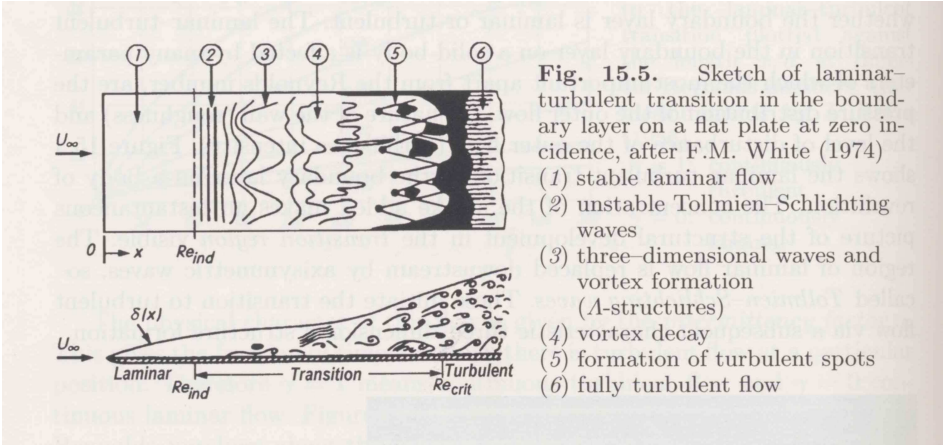


Fig. 15.5. Sketch of laminar–turbulent transition in the boundary layer on a flat plate at zero incidence, after F.M. White (1974)
(*1*) stable laminar flow
(*2*) unstable Tollmien–Schlichting waves
(*3*) three–dimensional waves and vortex formation (*Λ*-structures)
(*4*) vortex decay
(*5*) formation of turbulent spots
(*6*) fully turbulent flow

FIG. 3.13 – Scénario de transition dans la couche limite de laminaire à gauche à turbulent à droite.

limite sur parois droites et convexes. Pour les écoulements dans les conduites (*figure 3.9*), la transition est brutale et imprévisible car elle a un caractère sous-critique. On passe brusquement d'un état laminaire à un état turbulent par intermittence (expérience de Reynolds illustrée par la *figure 3.10*). La turbulence ne se déclare pas dans tout l'écoulement mais dans des zones appelées spots turbulents (*figure 3.11*). Ensuite plus le nombre de Reynolds augmente et plus la taille des zones turbulentes croît jusqu'à ce que la turbulence envahisse l'écoulement tout entier. Dans ces spots turbulents, on voit la formation de petites structures de vorticité. C'est l'étirement présent dans le cisaillement et le basculement de la vorticité initiale qui sont à l'origine de ces structures (voir chapitre 6). La dynamique de ces structures va ensuite régler le couplage entre la paroi et le volume de l'écoulement et changer notamment la force de traînée. La transition vers la turbulence dans le cas de la couche limite est un peu différente des conduites car l'écoulement n'est pas parfaitement parallèle et il est possible d'observer un passage indirect vers la turbulence par une succession de bifurcation de l'état laminaire à l'état turbulent (*figure 3.12*, *figure 3.13*). Cette observation reste cependant difficile (il faut une très grande régularité de la plaque sur laquelle se développe la couche limite) et souvent le scénario est court-circuité entre 1 et 5. Très rapidement l'écoulement initialement 2D devient 3D avec l'existence de structures de vorticité alignées avec l'écoulement (ou vortex longitudinaux) résultant des mécanismes basculement-étirement (voir chapitre 6).

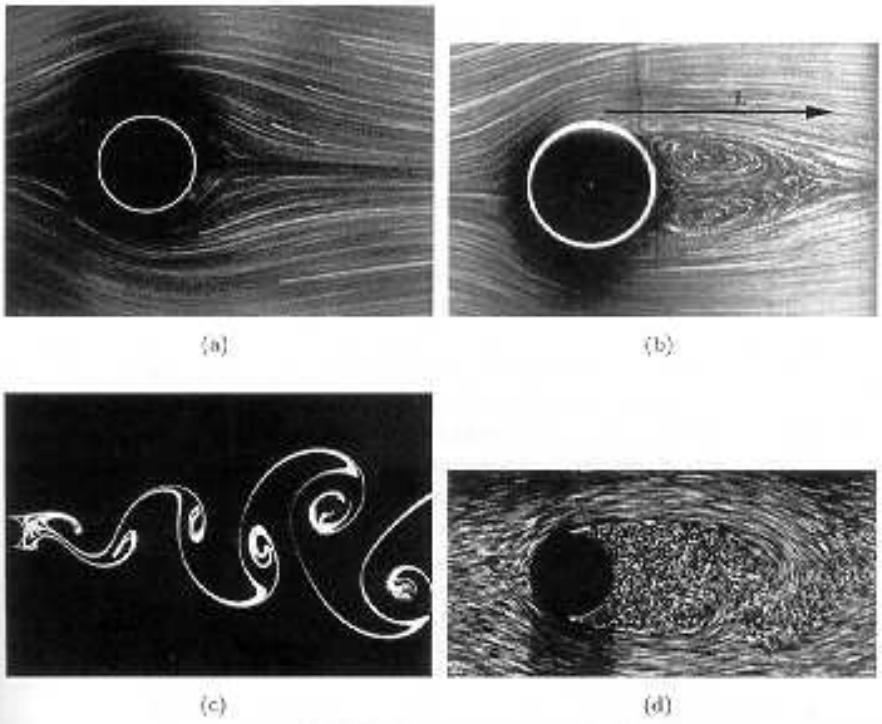


FIG. 2.8 – *Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement symétrique entre amont et aval à petit nombre de Reynolds ($Re = 1,54$) ; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ($Re = 26$) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman ($Re = 200$) ; (d) sillage turbulent ($Re = 0,8.10^4$) (photos a, b et c : S. Taneda, photo d : H. Werlé).*

FIG. 3.14 – Scénario de transition dans une section du sillage d'un cylindre.

3.3.2 Transitions à caractère super-critique

Il existe des écoulements qui présentent dans leur état laminaire des zones potentiellement instables vis à vis des critères de Rayleigh. Parmi les plus étudiés il y a la couche de mélange, le sillage de cylindre et le dispositif de Taylor-Couette. Tout ces écoulements ont comme particularité de transiter de l'écoulement laminaire (dit de base) vers la turbulence par succession de bifurcations bien déterminées (souvent super-critiques) ou à chaque fois, une symétrie de l'écoulement de base est brisée. Nous allons montrer l'exemple du sillage du cylindre circulaire. Ici le nombre de Reynolds est défini à partir de la vitesse amont U, du diamètre du cylindre, d, et de la viscosité du fluide ν : soit $Re = Ud/\nu$. A très bas nombre de Reynolds, l'écoulement est complètement piloté par la viscosité, l'écoulement est stationnaire, symétrique amont et aval avec une couche limite beaucoup plus grande que la taille du cylindre. A partir d'un certain nombre de Reynolds, un premier effet se fait ressentir dans la couche limite : il y a décollement et présence de deux zones de recirculation fixe. Ces décollements vont présenter des profils avec points d'inflexion et donc des zones potentiellement instables. On assiste alors à une première bifurcation vers un état instationnaire correspondant à une émission périodique de tourbillons à une fréquence f. En augmentant encore le nombre de Reynolds on assiste à d'autres bifurcations rendant l'écoulement, jusqu'ici 2D instationnaire, à 3D instationnaire. Ces changements sont mieux visualisés dans un plan comprenant l'envergure des tourbillons. La *figure 3.15* nous montre la transition entre $Re = 60$ et $Re = 360$. On y voit les effets de la dynamique non-linéaire tels que les tourbillons, les tourbillons disloqués et obliques, l'apparition franche de structures 3D ($Re = 170$) avec une longueur d'onde bien déterminée. D'autres structures 3D beaucoup plus petites apparaissent sur les deux dernières visualisations. Il est intéressant de remarquer que l'échelle de taille introduite par le forçage est ici toujours la même : c'est le diamètre du cylindre. On assiste donc pendant cette transition à la formation de structure de plus en plus petites dans l'écoulement ce qui est une propriété fondamentale des écoulements turbulents $3D$.

3.3.3 Conséquences sur les propriétés énergétiques

Dans le cas d'obstacles de surface Σ, la force totale exercée par l'écoulement est :

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} ds \tag{3.4}$$

où $\vec{n}$ est la normale à l'élément de surface dS orientée vers l'extérieur du corps. Plongée dans un écoulement uniforme $\vec{U_0}$, seules les forces parallèles à l'écoulement travailleront pendant le mouvement, la résultante de ces forces s'appelle la force de traînée $\vec{D}$ et la puissance injectée dans l'écoulement sera :

$$P_I = \vec{D}.\vec{U_0} \tag{3.5}$$

Soit S, la surface projetée sur un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement (ou maitre couple), on définit un coefficient de traînée C_D de la manière suivante :

$$\boxed{C_D = \frac{D}{1/2\rho U_0^2 S}.} \tag{3.6}$$

Dans les cas où la surface projetée est nulle (écoulement dans une conduite , ou sur une plaque plane) on prend simplement la surface en contact avec l'écoulement (voir *figure 3.16*). Pour ces écoulements, les forces normales aux parois n'interviennent pas, seules les forces tangentielles et donc

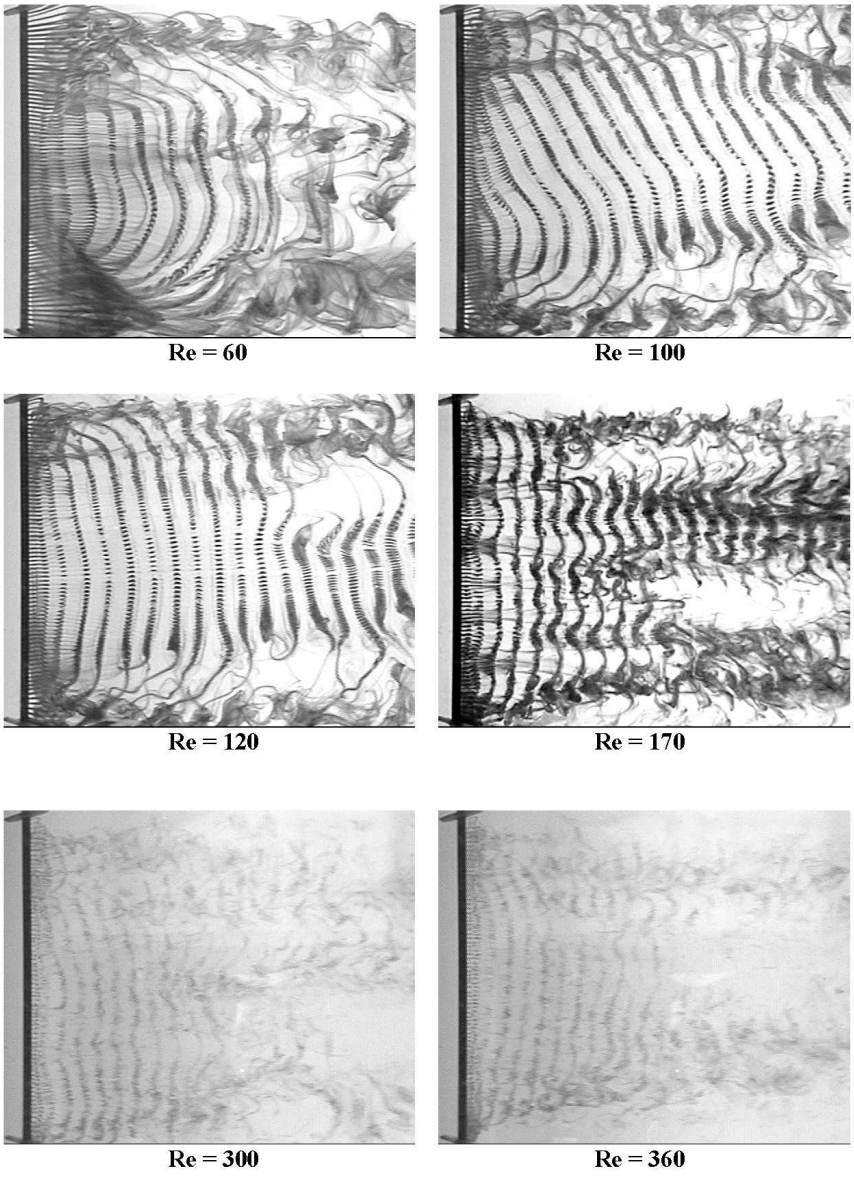


FIG. 3.15 – Scénario de transition dans un plan comprenant l'axe du cylindre. Le cylindre est à gauche et l'écoulement va de gauche à droite. Du colorant est introduit par une série de petits trous dans la couche limite du cylindre, on visualise ainsi les structures de vorticité. On peut apprécier le degré de complexité de l'écoulement qui augmente avec le nombre de Reynolds. Dans un travail expérimental, il faut savoir dissocier les instabilités de l'écoulement des imperfections produites par les effets de bords.

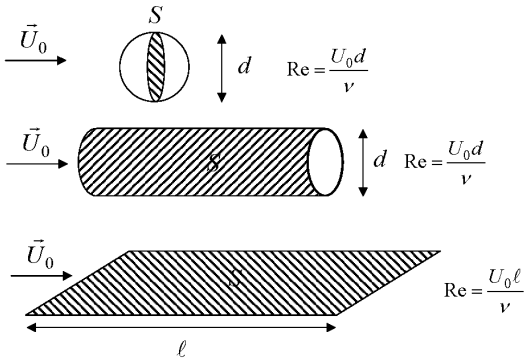


FIG. 3.16 – Définitions de C_D, pour l'obstacle, la plaque et la conduite.

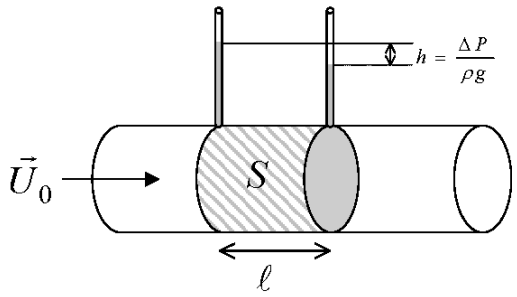


FIG. 3.17 – Le gradient de pression est mesuré à l'aide de deux prises verticales dont la différence de hauteurs d'eau donne la différence de pression sur la longueur l.

visqueuses contribuent dans la traînée et la puissance injectée. Par contre pour les obstacles, les forces normales telles que les forces de pression jouent un rôle essentiel. Dans le cas de conduite on utilise une autre définition du coefficient de traînée, λ appelé coefficient de friction :

$$\boxed{\lambda = \frac{d}{1/2\rho U_0^2}\frac{\Delta P}{l}.} \tag{3.7}$$

Cette définition est basée sur une mesure du gradient de pression (mise en oeuvre expérimentale simple, voir *figure 3.17*). En effet si la vitesse dans la conduite est en moyenne constante, les forces de volumes $-\vec{\nabla}P$ qui assurent le mouvement doivent être égales aux forces de dissipation. Pour la plaque plane et la conduite, on montre facilement que $C_D = \lambda/4$.

Le coefficient de traînée d'une plaque montré en *figure 3.18* et la friction d'une conduite montrée en *figure 3.19* ont des comportements très similaires. Cette similitude est due au fait que dans chaque cas la traînée ne résulte que des forces tangentielles et que la pression n'intervient donc pas. A bas nombre de Reynolds, la traînée évolue comme $1/\sqrt{Re}$ pour la plaque et $1/Re$ pour la conduite, puis arrive une brusque augmentation correspondant à la transition turbulente de la couche limite laminaire. Ensuite le coefficient de traînée décroît plus lentement, indiquant que la turbulence est plus efficace à dissiper l'énergie que l'écoulement laminaire. Pour le cylindre, on observe une décroissance en $1/Re$ à bas nombre de Reynolds qui vient saturer sur un plateau à $Re \simeq 200$. Sur toute la largeur du plateau,

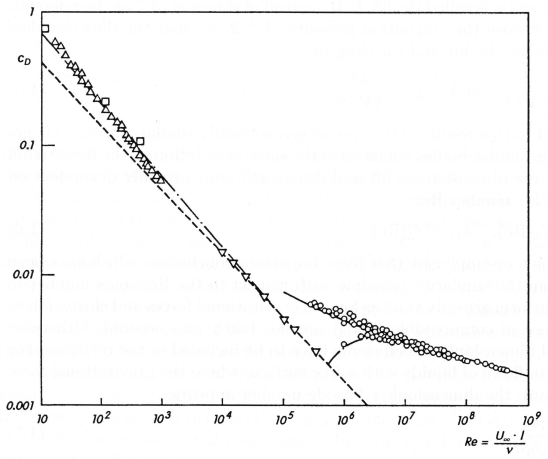


FIG. 3.18 – Dépendance de coefficient de traînée d'une plaque en fonction du nombre de Reynolds.

$200 < Re < 400000$, le coefficient de traînée varie peu [2] avec le nombre de Reynolds et donc avec la viscosité. Ensuite une chute, appelée crise de traînée réduit d'un facteur 3 le coefficient. Cet effet correspond à la transition turbulente de la couche limite décollée qui était restée jusque là laminaire. La transition n'augmente pas la traînée comme c'était le cas de la plaque en ***figure 3.18*** car la traînée du cylindre est principalement due à des contraintes normales de pression et non pas à des contraintes tangentielles de viscosité. Enfin, si la traînée a diminué c'est parce-que la couche limite turbulente recolle en aval du cylindre comme l'illustre la visualisation de la ***figure3.21***. La réduction de la largeur de la zone décollée par rapport au cas laminaire est à la l'origine de la réduction de traînée (***figure 3.22***). Après la crise de trainée, C_D reprend une valeur constante de l'ordre 0.6. Ce comportement est générique à tout type d'obstacle non profilé dont la contribution de la pression à la traînée est plus importante que la contribution de la friction. En dehors de la crise de traînée, le coefficient de traînée est constant. Dans ce cas, la puissance injectée par unité de masse qui nourrit l'écoulement turbulent dans le cas d'obstacle de taille d est indépendant du nombre de Reynolds (i.e. de la viscosité) et évolue comme :

$$\boxed{P_I \propto \rho \frac{U_0^3}{d}.} \tag{3.8}$$

Pour un régime stationnaire en énergie, la puissance injectée dans l'écoulement est égale à la puissance dissipée. La puissance dissipée ne dépend donc pas non plus de la viscosité !. Cette indépendance avec la viscosité est la propriété fondamentale de la turbulence que nous verrons dans le chapitre suivant.

[2] Les variations que l'on peut voir (et qui peuvent quand même atteindre des écarts de l'ordre de 40%) correspondent à des changements de natures des couches limites séparées et à l'apparition des instabilités 3D dans le sillage.

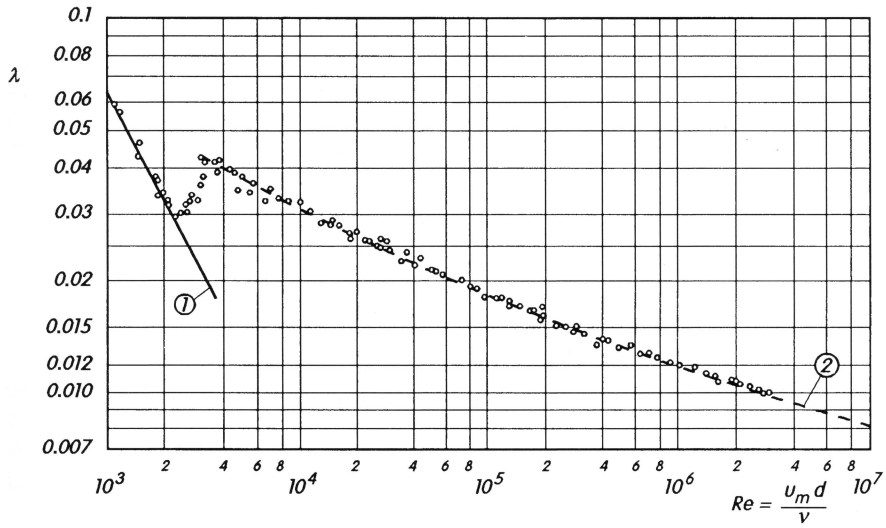


FIG. 3.19 – Dépendance de coefficient de friction d'une conduite en fonction du nombre de Reynolds.

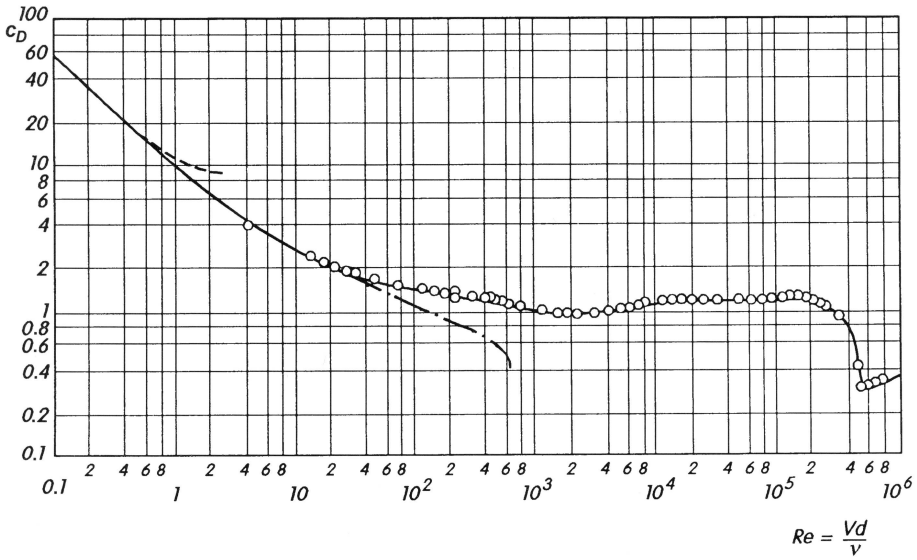
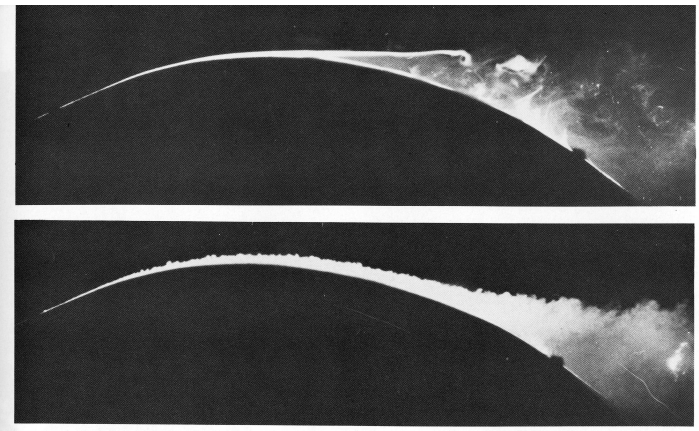


FIG. 3.20 – Dépendance de coefficient de traînée d'un cylindre circulaire en fonction du nombre de Reynolds.



156. Comparison of laminar and turbulent boundary layers. The laminar boundary layer in the upper photograph separates from the crest of a convex surface (cf. figure 38), whereas the turbulent layer in the second photograph remains attached; similar behavior is shown below for a sharp corner. (Cf. figures 55-58 for a sphere.) Titanium tetrachloride is painted on the forepart of the model in a wind tunnel. *Head 1982*

FIG. 3.21 – Visualisation d'un décollement (en haut) d'une couche limite laminaire et (en bas) d'une couche limite turbulente. On observe que la couche limite turbulente décolle plus tard que la couche limite laminaire

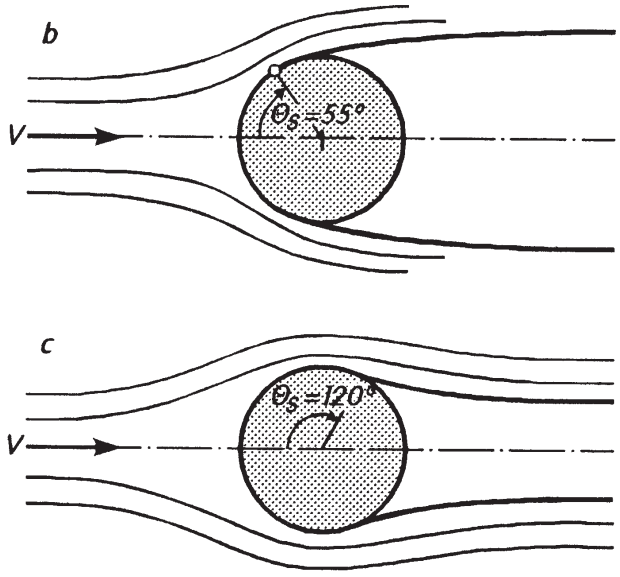


FIG. 3.22 – Dessins schématiques du sillage sous-critique (avant crise de traînée) et surper-critique (après crise de traînée). On remarque un déplacement vers l'aval de la localisation moyenne des points de décollement.

Chapitre 4

Propriétés de la turbulence

4.1 Introduction

Dans cette partie du cours nous allons nous intéresser aux propriétés statistiques de la turbulence. Dans l'écoulement de la *figure 1.3*, on constate que les zones très turbulentes présentent une grande gamme d'échelles spatiales. Les questions que nous allons nous poser sont les suivantes :

Comment une gamme d'échelles spatiales est-elle produite ?
Qu'est ce qui détermine la largeur de cette gamme ?
Quel est le rôle des petites échelles spatiales dans la physique de la turbulence ?

4.2 Production d'une gamme d'échelles

Un écoulement turbulent est un écoulement à grand nombre de Reynolds, et donc un écoulement pour lequel le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes est prépondérant (voir chapitre 3). C'est ce terme qui va fabriquer toutes ces tailles de mouvement. A l'opposé, on rappelle que pour une écoulement très visqueux (termes inertiels négligeables dont le non-linéaire), il n'y a qu'une seule taille caractéristique du mouvement. Prenons l'exemple d'un sillage visqueux à bas nombre de Reynolds illustré par la *figure 4.1*. L'échelle de l'écoulement est donnée par l'épaisseur de la couche limite $\delta \propto d/\sqrt{Re}$ où d est le diamètre de l'obstacle . Pour l'écoulement turbulent, le champ de vitesse va fluctuer spatialement, sur des tailles caractéristiques allant de la taille de l'obstacle à des échelles beaucoup plus petites que nous déterminerons plus loin. Les mécanismes de production des petites échelles sont liés aux instabilités (intrinsèques au terme non-linéaire, voir chapitre 3). A grand nombre de Reynolds, les écoulements turbulents atteignent des régimes tellement développés de ces instabilités que la turbulence va présenter un caractère universel (indépendant du forçage ou des conditions aux limites). C'est ce caractère universel que nous allons maintenant discuter.

4.3 Cascade d'énergie de Richardson

On doit le concept de cascade d'énergie en turbulence à Lewis Fry Richardson, météorologiste britannique (1881-1953). Sa vision de la turbulence est la suivante. La turbulence est composée de *tourbillons* de tailles différentes. Des *tourbillons* de taille ℓ ont une vitesse caractéristique u_ℓ et une

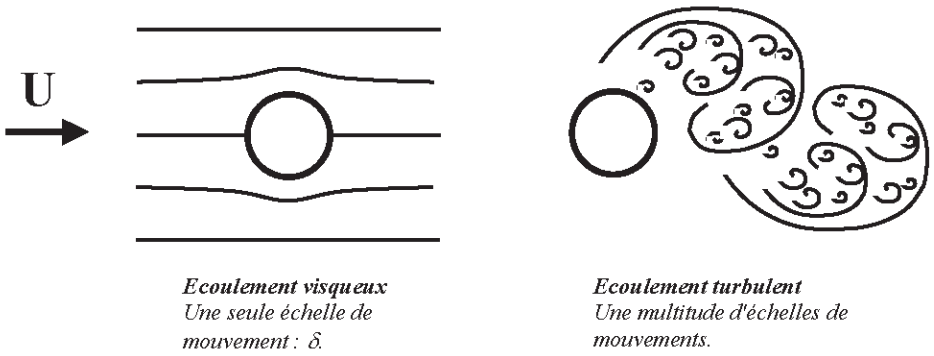


FIG. 4.1 – Mise en évidence des échelles caractéristiques dans sillage laminaire et un sillage turbulent.

durée de vie (temps caractéristique) $\tau_\ell = \ell/u_\ell$. Par *tourbillon* Richardson entend mouvement de cohérence spatiale ℓ et de cohérence temporelle τ_ℓ. Les tourbillons de plus grandes tailles sont caractérisés par une échelle de longueur L et une vitesse caractéristique U (L et U sont caractéristiques à la mise en mouvement du fluide). Le nombre de Reynolds de ces tourbillons, $Re = \frac{UL}{\nu}$ est donc très grand, de sorte que la viscosité n'a pas d'effet et que ces tourbillons sont incapables de dissiper leur énergie cinétique sous forme de chaleur. Pour Richardson, ces gros tourbillons sont instables et meurent en se *cassant* en tourbillons plus petits. Ces nouveaux tourbillons ont récupéré en totalité l'énergie cinétique de leur père et meurent à leur tour et ainsi de suite jusqu'à ce que les tourbillons soient suffisamment petits pour que les effets de la viscosité se fassent ressentir. A ce moment, ces tourbillons ne seront plus sujet à des instabilités : ils mourront par dissipation visqueuse où leur énergie cinétique sera dissipée en chaleur. Richardson a succintement résumé sa notion de cascade par :

> Big whorls have little whorls,
> Which feed on their velocity ;
> And little whorls have lesser whorls,
> And so on to viscosity

Cette version picturale de la turbulence place la dissipation en chaleur à la fin d'une cascade de transferts d'énergie. Ainsi ce qui sera dissipé par la turbulence est entièrement déterminé par les premières étapes qui sont totalement indépendantes de la viscosité. Avec cette idée de cascade, le taux moyen de dissipation $< \varepsilon >$ (puissance dissipée par unité de masse) se détermine par le transfert de l'énergie cinétique U^2 des plus gros tourbillons. Ce transfert doit se faire sur la durée de vie du tourbillon, soit sur un temps $\tau_L = L/U$, on doit donc avoir $< \varepsilon > \propto U^3/L$. Bien que la viscosité soit responsable de la dissipation, la puissance dissipée dans un écoulement turbulent ne dépend pas de la viscosité !

Cette vision de cascade n'est valable que d'un point de vu statistique. Effectivement, la notion dynamique de cascade étape par étape est dénuée de sens. On expliquera la formation des petites structures dans la turbulence par le biais de la dynamique de la vorticité dans le chapitre 6.

4.4 La base de la théorie de Kolmogorov (K41)

Le mathématicien Andreï Kolmogorov (1903-1987) a publié en 1941 une série d'articles qui sont à la base de la compréhension actuelle de la turbulence.

4.4.1 Isotropie des échelles

La théorie de Kolmogorov se place dans un contexte de turbulence isotrope. Il est clair que tous les écoulements réels ne sont pas isotropes, au moins au niveau du forçage et des conditions aux limites. Cependant, une notion importante est que les échelles suffisament petites devant la grande échelle caractéristique de l'écoulement L, deviennent statistiquement isotropes. En d'autre terme il existera toujours, pour de grands nombres de Reynolds, une échelle à partir de laquelle les mouvements auront oublié le contexte inhomogène et anisotrope par lequel la turbulence a été engendrée. Dans ce qui suit on s'intéresse à des échelles $\ell << L$ pour lesquelles les mouvements turbulents sont isotropes.

4.4.2 Forme universelle et échelle dissipative

Le résultat de Kolmogorov concernant l'échelle dissipative de la turbulence résulte de l'hypothèse $H1$ de sa théorie.

> $H1$. Pour un nombre de Reynolds $Re >> 1$, la statistique des mouvements turbulents est uniquement déterminée à partir de ν et $< \varepsilon >$.

On peut alors construire dimensionnellement à l'aide de ces deux grandeurs, une échelle dite de Kolmogorov, η ayant pour vitesse caractéristique u_η et temps de caractéristique τ_η, telle que :

$$\begin{array}{l} \eta = (\frac{\nu^3}{<\varepsilon>})^{\frac{1}{4}} \\ u_\eta = (\nu < \varepsilon >)^{1/4} \\ \tau_\eta = \sqrt{\frac{\nu}{<\varepsilon>}} \end{array} \tag{4.1}$$

On peut voir qu'à cette échelle le nombre de Reynolds $Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$. Les effets visqueux sont donc comparables aux effets inertiels et les mouvements de tailles plus petites que cette taille sont responsables de la dissipation de l'énergie cinétique de l'écoulement sous forme de chaleur. L'échelle de Kolmogorov η, est aussi appelée échelle de dissipation.

4.4.3 La gamme d'échelles inertielles

L'existence d'une gamme d'échelles inertielles résulte de l'hypothèse $H2$ de sa théorie.

> $H2$. Si $\eta << \ell << L$ alors la statistique des mouvements turbulents est universelle et uniquement déterminée par $< \varepsilon >$.

Pour une échelle intermédiaire appartenant à la gamme d'échelles inertielles, l'énergie (par unité de masse) transitant par cette échelle par unité de temps ne peut que s'exprimer comme :

$$\boxed{< \varepsilon >= \frac{c u_\ell^3}{\ell},} \tag{4.2}$$

avec c, constante universelle. Le flux d'énergie cinétique au travers des échelles est conservé de l'échelle où l'énergie est injectée $\ell_{EI} << L$ (terme de production dans la ***figure 4.2***) jusqu'à une

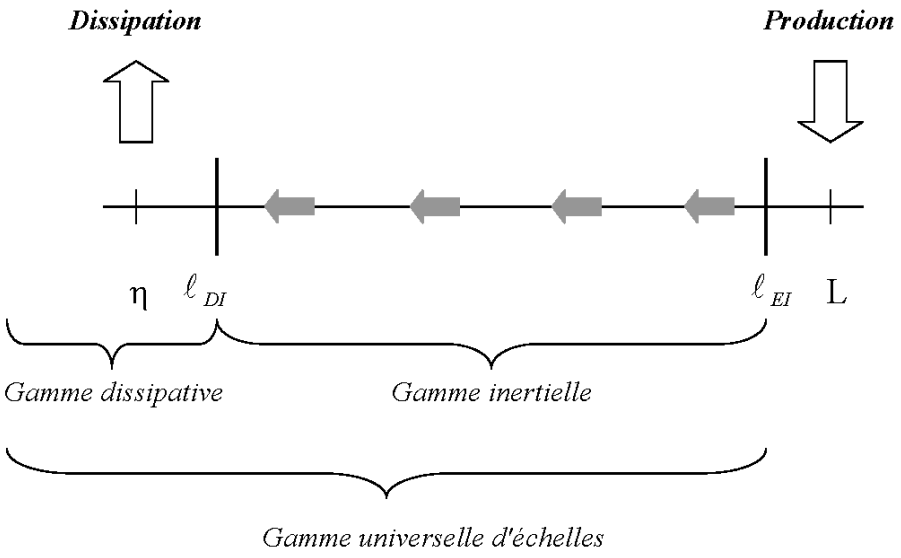


FIG. 4.2 – Différentes échelles de la turbulence.

échelle $\ell_{DI} >> \eta$ où la dissipation commencera a être effective. En général, on confond les échelles ℓ_{DI} et η car la théorie est dimensionnelle et l'hypothèse d'isotropie n'est pas nécessaire. On confond aussi L et ℓ_{EI} pour la même raison de sorte que souvent on place la gamme d'échelles inertielles entre L et η, avec $< \varepsilon >= \frac{U^3}{L} = \frac{u_\ell^3}{\ell} = \frac{u_\eta^3}{\eta}$.

4.4.4 Succès de la théorie K41

Pour accéder aux fluctuations spatiales des mouvements turbulents, on effectue des mesures du spectre de l'énergie cinétique. La figure 4.3 cumule plusieurs de ces spectres mesurés par différents auteurs et sur différentes expériences. En abscisse, le nombre d'onde K est semblable à l'inverse de l'échelle, soit $\frac{1}{\ell}$. On voit bien qu'au delà d'une fréquence spatiale caractéristique, il n'y a plus d'énergie cinétique dans l'écoulement. Tous ces spectres s'accordent effectivement bien pour donner $K \sim 1/\eta$ comme l'échelle dissipative. On remarque aussi que la gamme d'échelles s'étend d'autant plus que le nombre de Reynolds est grand. On discutera plus en détail et de façon plus quantitative la théorie de Kolmogorov dans le chapitre 7, et en particulier de la relation entre la gamme d'échelles inertielles et les spectres de la figure 4.3.

4.4.5 Illustration de la théorie de Kolmogorov avec la cascade de Richardson

La base de la théorie de Kolmogorov que nous venons de développer se prête facilement à une interprétation en cascade d'énergie à la Richardson bien que Kolmogorov n'ait jamais évoqué de processus dynamique entre les échelles. Ces processus ne peuvent être dévoilés qu'à partir des équations de Navier-Stokes, ce que nous verrons dans le chapitre 6. Les transferts s'effectuant étape par étape de Richardson doivent être compris dans le contexte statistique pour que l'interprétation qui suit soit per-

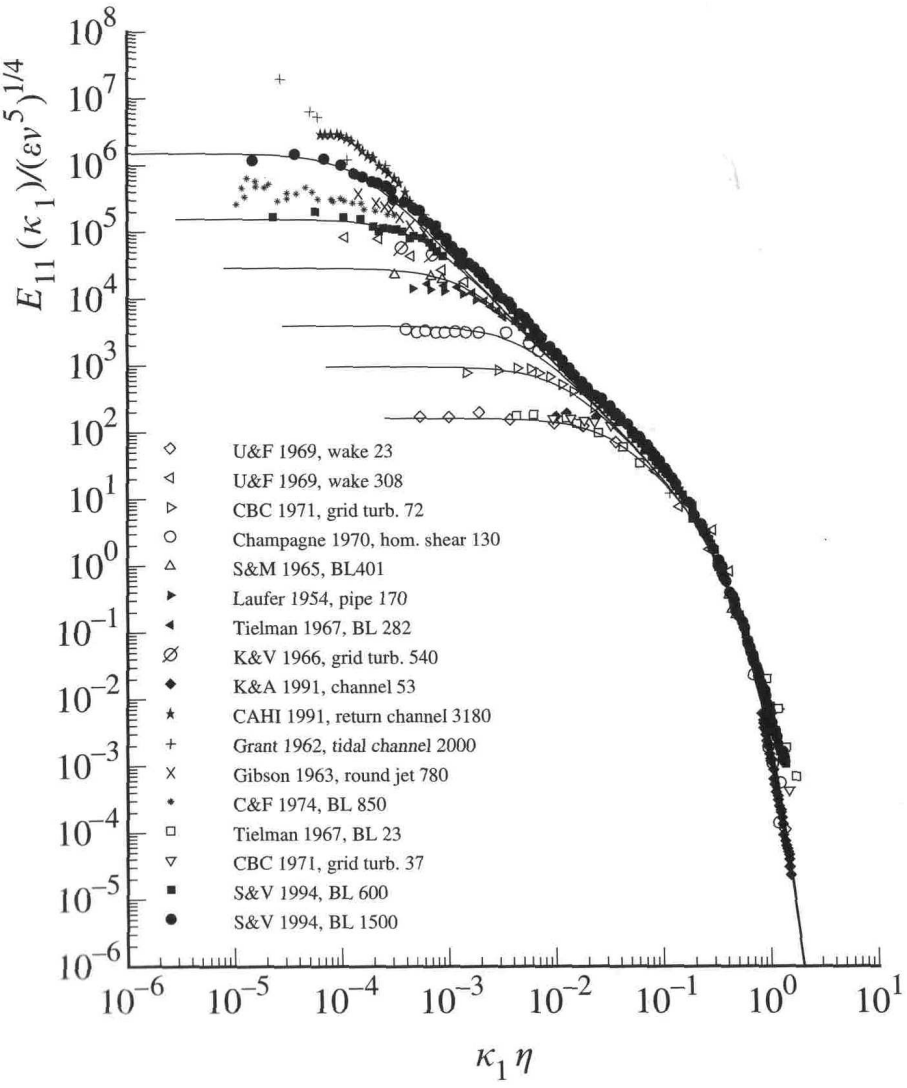


FIG. 4.3 – Mesures du spectre spatial de l'énergie cinétique (suivant une seule direction de l'espace) en fonction du nombre d'ondes K adimensionné par l'échelle de Kolmogorov η (eq 4.1) pour différents nombres de Reynolds R_λ basés sur la micro-échelle de Taylor et différentes géométries d'écoulements.

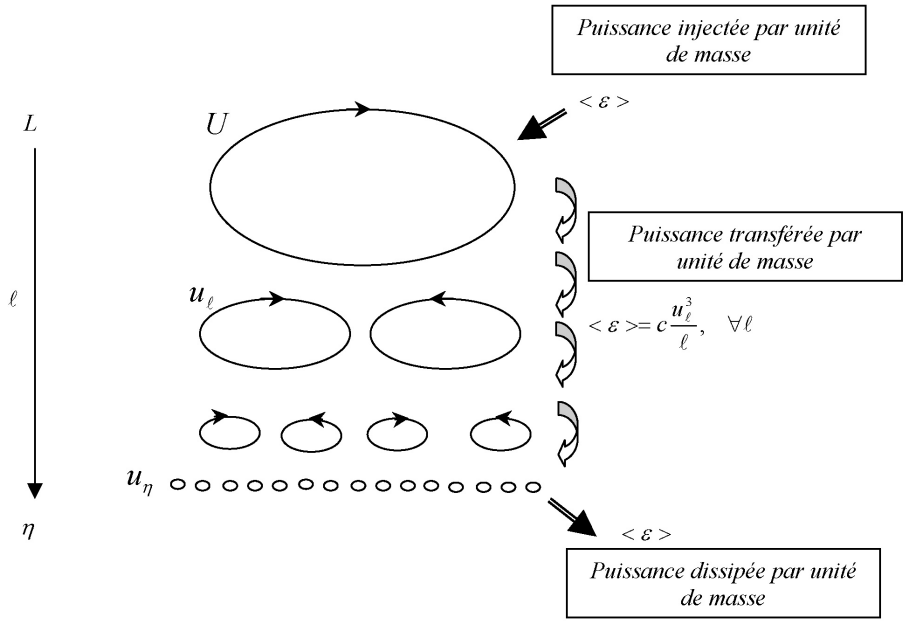


FIG. 4.4 – Représentation schématique de la théorie de Kolmogorov.

tinente. On a représenté sur la figure 4.4, le schéma classique de la turbulence développée interprétée en cascade de Richardson. Chaque structure d'échelle ℓ transfert son énergie cinétique u_ℓ^2 pendant une durée $\tau_\ell = \frac{\ell}{u_\ell}$, soit : $< \varepsilon >= c\frac{u_\ell^2}{\tau_\ell}$. Une fois transférée l'énergie n'est plus disponible à l'échelle ℓ mais stockée de façon incohérente à des échelles plus petites. En ce sens, l'énergie perdue pour l'échelle ℓ correspond à une dissipation pour cette échelle. Arrivée à l'échelle de Kolmogorov η, l'énergie cinétique de ces plus petites structures de la cascade est dissipée sous forme de chaleur par diffusion visqueuse sur un temps caractéristique η^2/ν.

4.5 Problématiques de la turbulence

Une des problématiques de la turbulence réside dans le coût prohibitif de la simulation numérique. En effet l'équation de Navier-Stokes doit être capable de reproduire tout type d'écoulement quelque soit le nombre de Reynolds. On pourrait donc pour ainsi dire tout calculer et tout prévoir. Cependant, pour que ce calcul soit fidèle à la réalité, le schéma numérique devra résoudre toutes les échelles, jusqu'à l'échelle de dissipation de Kolmogorov. D'après la partie précédente, un écoulement de taille L^3 devra comporter au moins $(\frac{L}{\eta})^3 \sim Re^{\frac{9}{4}}$ points de maillage. De même, le rapport des temps caractéristiques entre la grande échelle (de taille L) et l'échelle de Kolmogorov est $\frac{\tau_L}{\tau_\eta} \sim Re^{\frac{1}{2}}$. Ainsi la résolution de cet écoulement pendant un temps caractéristique de la grande échelle (ce qui est largement insuffisant pour effectuer des valeurs moyennes) nécessite de résoudre les équations de Navier Stokes $Re^{\frac{11}{4}}$ fois. Ainsi plus le nombre de Reynolds est grand et bien plus la simulation coûtera en temps de calcul. Par exemple, il est inconcevable aujourd'hui de simuler les écoulements autour d'une voiture ou d'un avion (qui présentent un nombre de Reynolds supérieur à 10^6). La problématique est

donc de *modéliser l'énergie évacuée par les petites échelles* vers l'échelle dissipative sans avoir à simuler toute la gamme d'échelles responsables pour cette dissipation.

La seconde problématique est l'aspect de la production des petites échelles et les mécanismes d'apparition d'événements violents. Un des champs d'applications par excellence est bien évidemment la météorologie.

4.6 Décomposition de Reynolds

Un des piliers de la modélisation en turbulence est l'approche par moyennage en temps des équations de Navier-Stokes de manière à trouver une solution pour l'écoulement moyen. Fondamentalement, cette approche n'apporte rien sur la compréhension du phénomène de la turbulence, cependant elle a le mérite d'être à la base de nombreux modèles de turbulence qui, couplés à des observations expérimentales, donnent de bonnes estimations d'écoulements moyens (nous verrons le cas du jet, de la couche limite turbulente et de l'écoulement dans une conduite).

4.6.1 Valeurs moyennes, définitions et propriétés

La turbulence est un phénomène aléatoire ce qui justifie l'emploi des outils statistiques. Par exemple on peut réaliser un champ de vitesse moyen, de pression , on peut réaliser des spectres de ces grandeurs etc... Soit une grandeur hydrodynamique T (vitesse, pression ...) mesurée à l'instant t à la position $\vec{x}$ .Si l'écoulement est turbulent cette grandeur va fluctuer et devenir une variable aléatoire ($v.a.$).

- *Moyenne d'ensemble* Admettons qu'on puisse répéter N fois la même expérience (débutant à $t = 0$) et qu'à chaque fois on effectue une mesure de la $v.a.$ au temps t et à l'endroit $\vec{x}$ alors la moyenne prise comme :

$$< T(\vec{x}, t) >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} T_i(\vec{x}, t) \tag{4.3}$$

  est une moyenne d'ensemble.
- *Moyenne temporelle*
  On réalise maintenant une moyenne de la variable pendant une fenêtre temporelle de durée $2a$. cette valeur moyenne s'écrit :

$$\overline{T}_a(\vec{x}, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} T(\vec{x}, t + s)ds \tag{4.4}$$

  Pour a suffisamment grand cette valeur moyenne devient indépendante du temps et on a :

$$\overline{T}(\vec{x}) = \lim_{a\to\infty} \overline{T}_a(\vec{x}, t) \tag{4.5}$$

- *Ergodicité*
  Un système est dit ergodique si les deux moyennes 4.3 et 4.5 coïncident. Les écoulements turbulents ne sont pas forcément ergodiques : la moyenne d'ensemble peut varier dans le temps alors que la valeur moyenne temporelle en est indépendante. Ce sera le cas par exemple de tous les phénomènes périodiques tels que le sillage de cylindre qui est illustré par la ***figure 4.5***.
- *Axiomes*
  Soient f, g deux $v.a.$ et λ une constante. On a :

$$< f + g >=< f > + < g > \tag{4.6}$$
$$< \lambda g >= \lambda < g > \tag{4.7}$$
$$<< f > g >=< f >< g > \tag{4.8}$$
$$< \partial_t f >= \partial_t < f > \tag{4.9}$$
$$< \partial_i f >= \partial_i < f > \tag{4.10}$$

4.6.2 Equations de Reynolds

Nous allons prendre la moyenne temporelle de l'équation de Navier Stokes. Définissons d'abord le champ moyen (en lettres capitales) et le champ fluctuant (en lettres minuscules avec des primes) pour le champ instantané de vitesse et de pression :

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{U}(\vec{x}) + \vec{u'}(\vec{x},t)\ ;\ p(\vec{x},t) = P(\vec{x}) + p'(\vec{x},t) \tag{4.11}$$

4.6.2.1 Equations de l'écoulement moyen

Remarque : On utilise deux symboles pour le prise de moyenne, $< x >$ ou $\overline{x}$. En général la notation $\overline{x}$ est plutôt réservée à la prise de moyenne temporelle, c'est la notation que nous utiliserons dans la suite. Cependant, pour les calculs réalisés à la main (les PC donc) il est conseillé d'utiliser la notation $< .. >$ qui est plus claire.

D'après la définition 4.11 ci-dessus :

$$\overline{\vec{u}} = \vec{U}\ ;\ \overline{\vec{u'}} = \vec{0} \tag{4.12}$$
$$\overline{p} = P\ ;\ \overline{p'} = 0 \tag{4.13}$$

Regardons l'effet de la prise de valeur moyenne sur la divergence du champ de vitesse qui est nul en incompressible ($\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$) :

$$\overline{\vec{\nabla}.\vec{u}} = \vec{\nabla}.\overline{\vec{u}} = \vec{\nabla}.\vec{U} = 0 \tag{4.14}$$
$$\nabla.\vec{u} = \nabla.\vec{U} + \nabla.\vec{u'} = 0 \Rightarrow \nabla.\vec{u'} = 0 \tag{4.15}$$

On trouve que le champ moyen et le champ fluctuant sont à divergence nulle.

Avec toutes les propriétés que nous venons d'énoncer, il est facile de montrer que la valeur moyenne de la composante suivant i de l'équation de Navier Stokes,

$$\overline{\partial_t u_i} + \overline{(u_j.\partial_j)u_i} = -\frac{1}{\rho}\overline{\partial_i p} + \nu\overline{\partial_j\partial_j u_i}, \tag{4.16}$$

devient :

$$\boxed{U_j\partial_j U_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i P + \nu\partial_j\partial_j U_i - \partial_j\overline{u'_i u'_j}.} \tag{4.17}$$

L'équation 4.17 constitue l'équation de l'écoulement moyen. Le terme de gauche est la dérivée convective de l'écoulement moyen. On remarque que l'équation de l'écoulement moyen est presque

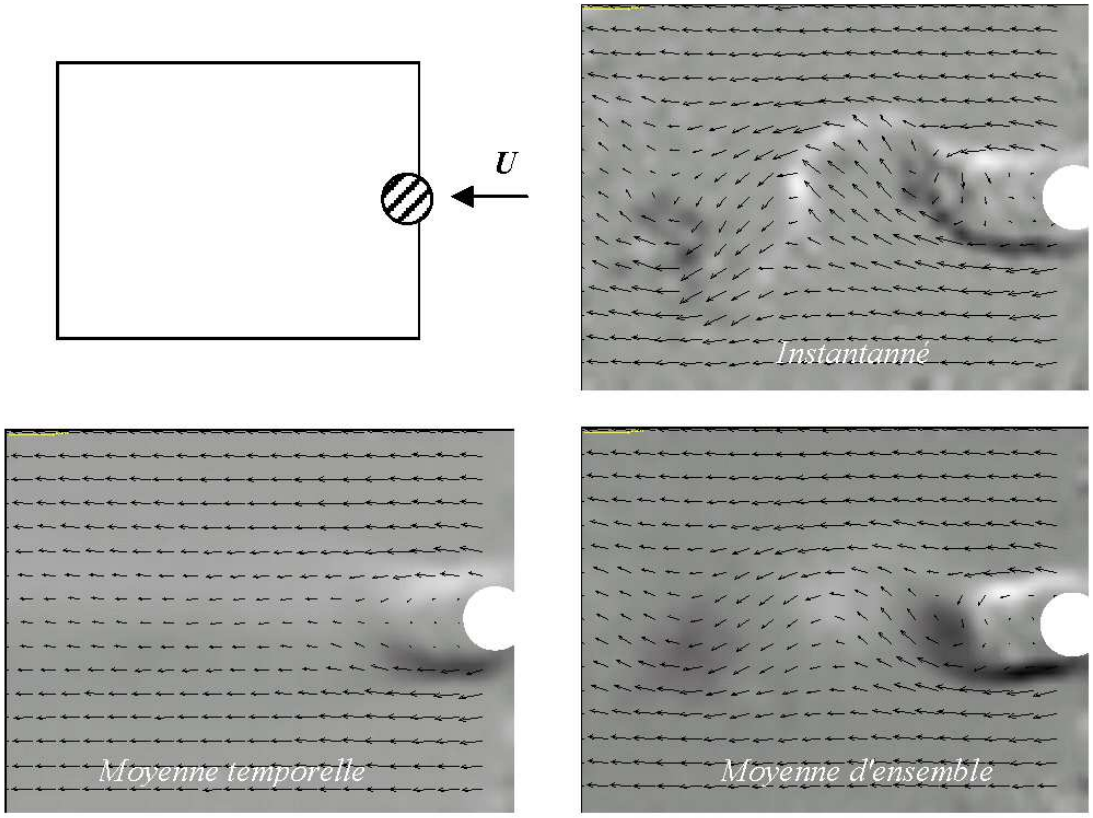


FIG. 4.5 – Mesure du champ de vitesse derrière un cylindre à $Re = 10000$. En arrière plan, les niveaux de gris représentent la vorticité (voir chapitre 6). Le champ instantané des structures de toutes tailles. Le champ moyenné en temps est symétrique. La moyenne d'ensemble est ici une moyenne de phase réalisée à partir de la portance sur le cylindre. Cette portance est sinusoïdale et a pour période celle du lâcher tourbillonnaire. En réalisant des moyennes avec des champs ayant tous le même décalage de phase avec la portance, on obtient une moyenne d'ensemble dépendante de la valeur du décalage de phase et donc du temps.

la même que celle qui aurait été obtenue en remplaçant $\vec{u}$ par $\vec{U}$ dans l'équation de Navier Stokes. La différence cruciale est l'existence du terme $-\partial_j \overline{u'_i u'_j}$ que nous allons discuter maintenant.

Commençons par écrire différemment l'équation 4.17. Utilisons l'identité suivante :

$$\nu \partial_j \partial_j U_i = 2\nu \partial_j \overline{e_{ij}} = \partial_j \frac{\overline{\sigma'_{ij}}}{\rho}, \tag{4.18}$$

où $\overline{e_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j)$ est le tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen. Comme le champ de vitesse moyen est à divergence nulle on peut montrer que 4.17 s'écrit aussi :

$$\boxed{\partial_j(\rho U_i U_j - \overline{\sigma'_{ij}} + P\delta_{ij} + \rho\overline{u'_i u'_j}) = 0.} \tag{4.19}$$

L'équation 4.19 traduit un bilan local de flux de quantité de mouvement. Pour un fluide Newtonien, ce flux est donné par la grandeur $\Pi_{ij} = \rho u_i u_j - \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}$ qui traduit le transport de quantité de mouvement de composante i dans la direction j. On rappelle que l'écoulement moyen est stationnaire, et donc que la quantité de mouvement doit être constante en un point fixe de l'écoulement ($\partial_t \rho \vec{U} = \vec{0}$). Les flux moyens entrant et sortant en ce point doivent donc être égaux, ce qui revient à dire que la somme des flux totaux moyens au travers d'une surface fermée doit être nul, soit que localement on doit avoir :$\partial_j \overline{\Pi}_{ij} = 0$. C'est exactement la relation 4.19 où la somme des termes entre parenthèses représente le flux moyen total de quantité de mouvement qui se décompose en trois termes moyens :

- $\rho U_i U_j$, transport de la composante ρU_i dans la direction j par convection de l'écoulement moyen.
- $-\overline{\sigma'_{ij}}$, transport de la quantité de mouvement associé aux forces de frottement visqueux de l'écoulement moyen.
- $P\delta_{ij}$, transport de la quantité de mouvement associé aux forces de pression moyenne.
- $\rho\overline{u'_i u'_j}$, transport de la quantité de mouvement associé aux fluctuations de la turbulence.

Le dernier terme de flux est nommé tenseur de Reynolds, τ_{ij} et par définition :

$$\boxed{\tau_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j}.} \tag{4.20}$$

On peut considérer l'écoulement moyen comme résultant de ces quatre termes de transports où le dernier, appelé diffusion turbulente vient s'ajouter à la diffusion visqueuse. On aurait ainsi deux origines de frictions pour l'écoulement moyen : l'une visqueuse et l'autre turbulente. Enfin, insistons sur le fait que la "friction" turbulente n'a de sens que pour l'écoulement moyen. En effet d'après l'équation (4.17), le terme $\tau_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j}$ peut être effectivement vu comme une contrainte agissant sur l'écoulement moyen orientée dans la direction j et agissant sur une surface élémentaire de normale dans la direction i.

La décomposition de Reynolds donne des indications sur les transferts d'énergie qui s'opèrent entre l'écoulement moyen et l'agitation turbulente. L'équation de bilan pour l'énergie cinétique moyenne, $\overline{e_c} = \frac{1}{2}\rho U_i^2$ s'écrit :

$$\frac{\overline{D}\overline{e_c}}{\overline{D}t} = \frac{\partial \overline{e_c}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{e_c}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(- U_j P + (2\rho\nu\overline{e_{ij}} + \tau_{ij})U_i\big) - (2\rho\nu\overline{e_{ij}} + \tau_{ij})\overline{e_{ij}}. \tag{4.21}$$

A très grand nombre de Reynolds, les contraintes liées à l'agitation turbulente sont beaucoup plus importantes que les contraintes visqueuses. Dans ce cas la viscosité cinématique n'est plus un paramètre

pertinent de l'écoulement moyen et on obtient pour le bilan d'énergie dans cette limite que :

$$\boxed{\frac{\overline{D}\overline{e_c}}{\overline{D}t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(- U_j P + \tau_{ij} U_i\big) - \tau_{ij}\overline{e_{ij}}.} \tag{4.22}$$

Le premier terme représente la puissance qui nourrit l'écoulement moyen. Le deuxième terme représente la puissance transférée à l'agitation turbulente. Cette seconde puissance $\tau_{ij}\overline{e_{ij}}$ correspond donc à une "dissipation" de l'écoulement moyen.

4.6.2.2 Equations de l'écoulement fluctuant

Maintenant on va remplacer le champ de vitesse et de pression par les décompositions de Reynolds (4.11) sans prendre de valeurs moyennes. On obtient ainsi l'équation du champ fluctuant :

$$\partial_t u_i' + U_j \partial_j u_i' + u_j' \partial_j U_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p' + \nu \partial_j \partial_j u_i' + \partial_j \overline{u_i' u_j'} - u_j' \partial_j u_i' \tag{4.23}$$

et pour l'énergie cinétique fluctuante $\overline{e_c'} = \frac{1}{2}\rho u_i'^2$:

$$\frac{\overline{De_c'}}{\overline{D}t} = \frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{1}{2}\rho \overline{u_i' u_i' u_j'} + \overline{u_j' p'} - 2\rho\nu \overline{u_i' e_{ij}'}\big) + \tau_{ij}\overline{e_{ij}} - 2\rho\nu \overline{e_{ij}' e_{ij}'} \tag{4.24}$$

où $e_{ij}' = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i})$ est le tenseur des déformations turbulentes. Dans le membre de droite on retrouve le terme $\tau_{ij}\overline{e_{ij}}$ de l'équation (4.22) qui cette fois ci est un terme de production d'énergie turbulente. Le terme $2\rho\nu\overline{e_{ij}' e_{ij}'}$ représente la dissipation moléculaire. Enfin le terme convectif $-\frac{\partial(...)}{\partial x_j}$ redistribue l'énergie au sein de l'agitation turbulente en la conservant. Pour une turbulence stationnaire et homogène, ce bilan d'énergie devient simplement :

$$\boxed{\tau_{ij}\overline{e_{ij}} = 2\rho\nu\overline{e_{ij}' e_{ij}'}.} \tag{4.25}$$

Les différents échanges mis en jeu sont représentés sur la *figure 4.6*.

4.7 Micro-échelle de Taylor

Puisque les gradients de l'écoulement moyen ne sont pas la cause de la dissipation de l'énergie, il convient de définir une échelle de taille caractéristique de la turbulence à laquelle les gradients contribue à la dissipation par viscosité. On définie la micro-échelle de la turbulence où échelle de Taylor λ par :

$$\boxed{\epsilon = \nu(\frac{u'}{\lambda})^2.} \tag{4.26}$$

La vitesse u' est caractéristique de l'agitation turbulente et peut être définie comme $u' = \frac{1}{3}\sqrt{u_i' u_i'}$. Cette nouvelle échelle conduit à un nouveau nombre de Reynolds, dit nombre de Reynolds turbulent appelé R_λ :

$$\boxed{R_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu}.} \tag{4.27}$$

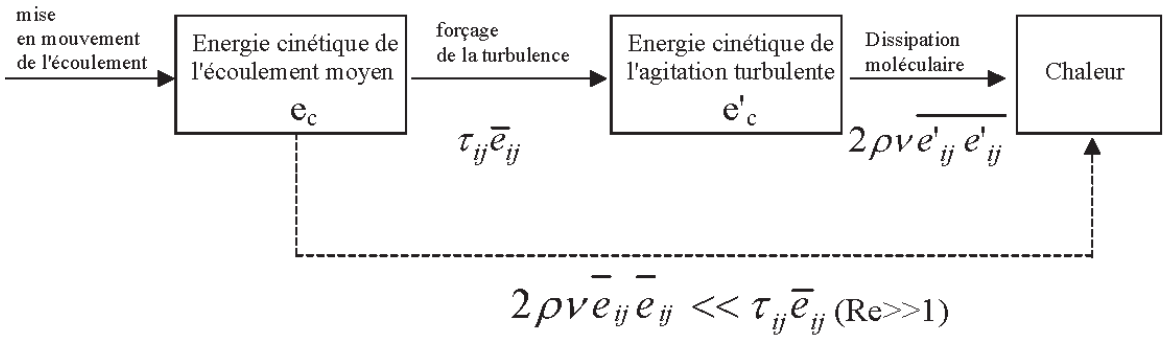


FIG. 4.6 – bilan des échanges d'énergie par unité de volume à partir de la décomposition de Reynolds. Le nombre de Reynolds *Re* est basé sur l'écoulement moyen. L'écoulement moyen est incapable de dissiper directement l'énergie en chaleur. La dissipation est réalisée efficacement par l'intermédiaire de l'agitation turbulente.

Ce nombre de Reynolds n'est pas défini de façon arbitraire comme le nombre de Reynolds de l'écoulement moyen. Il est utilisé pour comparer des résultats réalisés dans des configurations différentes (voir figure 4.3). De par sa définition R_λ ne varie pas linéairement avec Re. On a en fait une relation du type : $Re \propto R_\lambda^2$, ce qui fait que le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle est toujours plus petit que le nombre de Reynolds basé sur l'écoulement moyen.

Chapitre 5

Modèle de viscosité turbulente et théories de similitudes

Dans cette partie du cours on ne s'intéresse qu'à l'écoulement moyen (on oublie alors les petites échelles et les mécanismes de transferts de l'énergie). Les théories qui suivent fournissent donc le champ moyen à partir de la modélisation du tenseur de Reynolds. Pour notre part, nous étudierons la modélisation fondée sur l'hypothèse de viscosité turbulente et uniquement pour des écoulements présentant des propriétés de similitude. Les hypothèses sont déduites de données expérimentales et la modélisation (non universelle) s'adapte à l'écoulement considéré.

5.1 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds : fermeture des équations

La décomposition de Reynolds en un champ moyen et un champ fluctuant ajoute des inconnues au problème, il manque donc une équation donnant l'expression du tenseur de Reynolds (on parle de problème de fermeture des équations). On se réduit donc à trouver des solutions approchées en imaginant des expressions possibles de τ_{ij} (relations de fermetures) pour la résolution des équations moyennées de l'écoulement.

5.1.1 Viscosité turbulente

On rend compte de l'augmentation de la friction par la turbulence en introduisant un autre terme de viscosité, ν_T appelé viscosité turbulente. Ce concept fut introduit par Boussinesq (1890) et est basé sur une analogie avec l'expression du tenseur des contraintes totales $\sigma_{ij} = 2\rho\nu e_{ij} - p\delta_{ij}$ des fluides Newtoniens. On décompose le tenseur de Reynolds en un tenseur de trace nulle et un tenseur ayant la trace du tenseur de Reynolds. La partie isotrope est $\rho\frac{1}{3}\tau_{mm}\delta_{ij}$, où $\tau_{mm} = 2\rho k$ et k est l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes, $k = 1/2(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$. L'hypothèse de Boussinesq est donc d'écrire le tenseur de Reynolds comme :

$$\boxed{\tau_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j} = 2\rho\nu_T\overline{e_{ij}} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} = \rho\nu_T(\partial_i\overline{u_j} + \partial_j\overline{u_i}) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}.} \tag{5.1}$$

La partie du tenseur ayant ν_T en préfacteur est à trace nulle car la divergence de l'écoulement moyen est nulle. La déception pour ce modèle réside dans la constatation que la viscosité turbulente ν_T n'est

pas universelle, elle dépend non seulement de l'écoulement mais aussi de l'espace et éventuellement du temps si on considère des moyennes dépendantes du temps : $\nu_T(\vec{r},t)$. Il en résulte donc qu'il faut faire un modèle pour ν_T !

En fait, ce qui est séduisant dans cette méthode c'est que la viscosité turbulente vient s'ajouter à la viscosité du fluide et l'équation de l'écoulement moyen retrouve une forme identique à l'équation de Navier Stokes donnée par :

$$D_t\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(P + \frac{2}{3}\rho k) + \nu_{\text{eff}}(\vec{r},t)\Delta\vec{U}, \tag{5.2}$$

en prenant une viscosité effective :

$$\nu_{\text{eff}}(\vec{r},t) = \nu + \nu_T(\vec{r},t), \tag{5.3}$$

et une pression moyenne modifiée :

$$P + \frac{2}{3}\rho k. \tag{5.4}$$

Quelques mots maintenant sur les modèles de ν_T. Le plus simple est le modèle de la longueur de mélange que nous discutons plus en détail dans la section suivante. Dans ce cas, la viscosité turbulente prend la forme :

$$\nu_T = C_\nu^{(0)} u_0 \ell \tag{5.5}$$

où C^0 est une constante à déterminer, u_0 une vitesse caractéristique dépendant de l'écoulement et ℓ la longueur de mélange qui sont aussi à déterminer. Un autre modèle plus élaboré, appelé modèle à une équation consiste à prendre :

$$\nu_T = C_\nu^{(1)} \sqrt{2k}\ell \tag{5.6}$$

Dans (5.6), la vitesse caractéristique est estimée à partir de l'énergie cinétique turbulente k, et on introduit une équation pour résoudre k. La longueur de mélange reste quant à elle à être déterminée. Enfin le modèle le plus connu (modèle $k-\epsilon$) est un modèle à deux équations, où la viscosité turbulente a pour expression :

$$\nu_T = C_\nu^{(2)} k^2 \bar{\epsilon} \tag{5.7}$$

où $\bar{\epsilon} = 2\nu\overline{e_{ij}e_{ij}}$ est la dissipation moyenne par unité de masse. Pour ce modèle il y a deux équations pour déterminer k et ϵ et des constantes à fixer.

5.1.2 Longueur de mélange

La longueur de mélange fut introduite par Prandtl (1908). L'idée est une analogie avec l'expression de la viscosité calculée en théorie cinétique des gaz parfaits :

$$\boxed{\nu_{TCG} \propto v^* \ell.} \tag{5.8}$$

Nous rappelons que v^* est la vitesse quadratique moyenne ou vitesse d'agitation thermique des molécules et ℓ leur libre parcours moyen. Il y a une analogie entre la température du gaz et le nombre de Reynolds. Plus la température (nombre de Reynolds) est grande et plus la viscosité (viscosité turbulente) est grande. Par analogie avec l'expression de la viscosité turbulente (5.5), la vitesse v^* est

une vitesse caractéristique à déterminer dans l'écoulement ainsi que ℓ. La longueur de mélange ℓ correspond à un longueur de cohérence sur laquelle il y a transfert de quantité de mouvement par la turbulence.

Dans la partie suivante nous présenterons des écoulements turbulents statistiquement 2D, parallèles où faiblement non parallèles qui sont des succès du modèle de la longueur de mélange.

5.2 Approximation de couche limite turbulente

Nous appliquerons cette approximation aux écoulements pour lesquels :
- l'écoulement moyen dominant est suivant la direction x (direction longitudinale),
- la vitesse transversale est relativement faible $V << U$
- l'écoulement s'étale lentement suivant la direction principale x (on dit aussi faiblement non parallèle)

Comme on le montre sur la figure 5.1, ces propriétés sont partagées par un bon nombre d'écoulements libres tels que le jet, le sillage et la couche de mélange et bien sûr par tous les écoulements de parois, tels que la plaque, le canal ou la conduite. Ces écoulements sont statistiquement bidimensionnels et stationnaires, les gradients de vitesses moyennes sont prédominants dans la direction y et la statistique ne varie pas suivant z. Pour la vitesse moyenne, les composantes sont alors U, V et $W = 0$. Les équations de continuité et de quantité de mouvement moyennes sont :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \tag{5.9}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \left\{\nu\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}\right\} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} - \frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \tag{5.10}$$

$$\left\{U\frac{\partial V}{\partial x}\right\} + \left\{V\frac{\partial V}{\partial y}\right\} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \left\{\nu\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}\right\} + \left\{\nu\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y}\right\} - \frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x} \tag{5.11}$$

Ces équations sont aussi valables pour les écoulements laminaires, pour lesquels le tenseur de Reynolds est nul. Les termes entre accolades $(\{\})$ sont négligés dans l'approximation de couche limite laminaire (voir le *cours MF 102*).

Les équations de couche limite turbulente sont obtenues simplement en négligeant les termes entre accolades - pour les mêmes raisons que dans le cas laminaire - et en négligeant tous les gradients longitudinaux (suivant x ici) du tenseur de Reynolds devant tous les gradients transversaux (suivant y ici). Ainsi, l'équation (Eq. 5.11) pour la quantité de mouvement moyenne transversale devient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} = 0. \tag{5.12}$$

Pour l'écoulement à l'infini ($y \to \infty$, voir figure 5.1), la pression est $p_0(x)$ et $\overline{v'^2} = 0$. La pression se calcule donc sans problème :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \overline{v'^2}. \tag{5.13}$$

Ainsi le gradient de pression longitudinal est donné par :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} - \frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial x}. \tag{5.14}$$

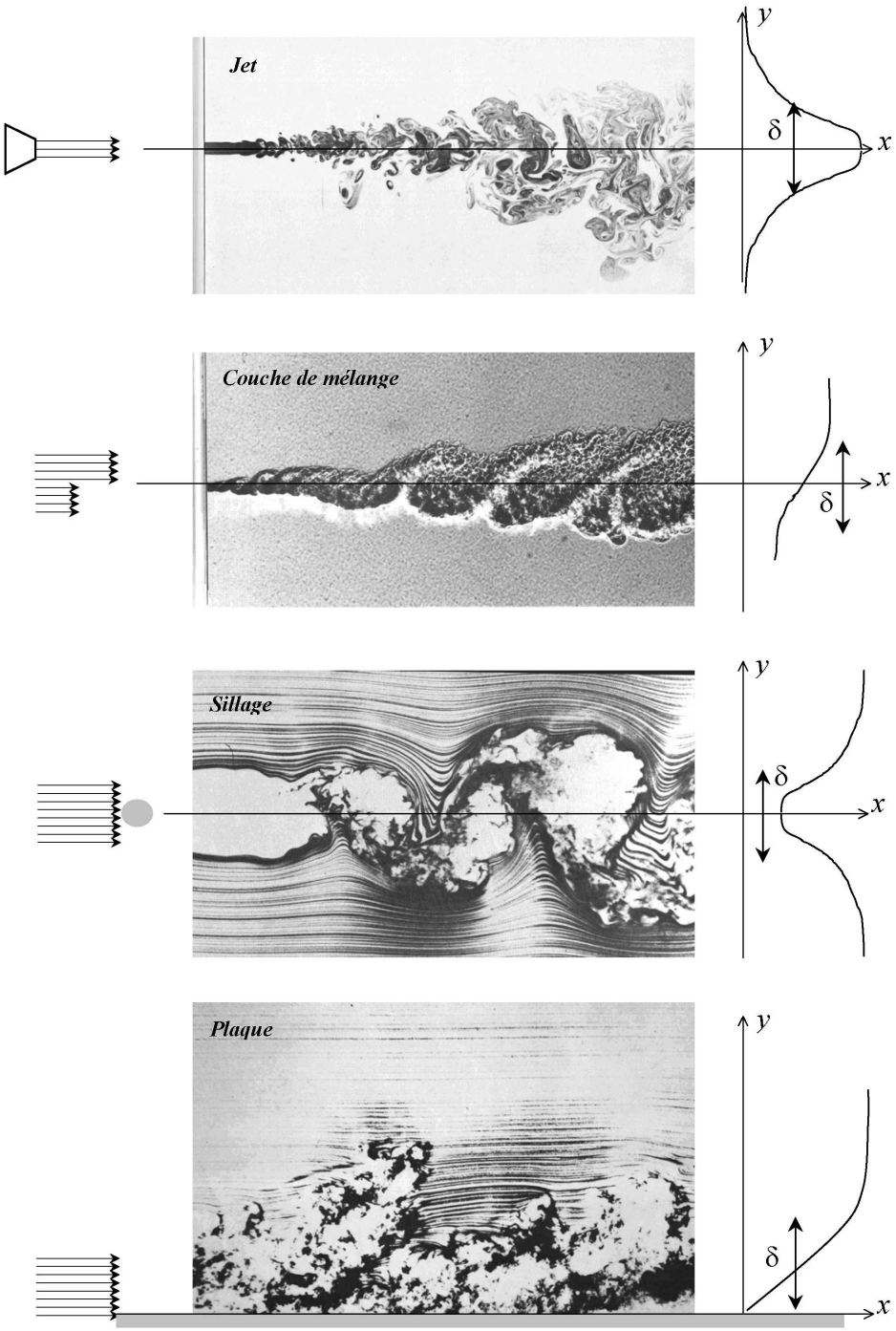


FIG. 5.1 – Configurations d'écoulements libres et de parois. On schématise à gauche la condition initiale du profil des vitesses. A droite, on a représenté le profil moyen $U(y)$. Ces écoulements ont la propriété d'être faiblement non parallèle, c'est-à-dire $\frac{d\delta}{dx} << 1$ comme en témoignent les visualisations placées au centre.

En remplaçant (Eq. 5.14) dans (Eq. 5.10) et en négligeant les gradients longitudinaux du tenseur de Reynolds devant les gradients transversaux du tenseur de Reynolds, on obtient pour la quantité de mouvement longitudinale :

$$\boxed{U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}} \tag{5.15}$$

Les équations Eq. 5.9 et Eq. 5.15 constituent l'approximation de couche limite turbulente. Pour les écoulements libres (sans paroi) le terme visqueux dans Eq. 5.15 est négligeable car il est d'ordre $O(Re^{-1})$. Par contre, pour un écoulement de paroi, le terme visqueux ne peut pas être éliminé car il devient dominant quand $y \to 0$.

5.3 Jet turbulent plan

On prends l'exemple du jet plan pour montrer la méthode de résolution du problème (elle s'adapte à tous les écoulements de la figure 5.1). Dans une expérience de laboratoire, le jet plan est produit au travers d'une fente rectangulaire de hauteur d (dans la direction y) et de largeur ℓ dans la direction z. Le rapport d'aspect $\frac{\ell}{d}$ de cette fente doit être grand (typiquement 50). Le nombre de Reynolds est basé sur d et la vitesse uniforme Uj au niveau de la fente. On définie la vitesse longitudinale sur l'axe $U_0(x)$ du jet par :

$$U_0(x) = U(x, 0, 0), \tag{5.16}$$

et la largeur à mi-vitesse $y_{1/2}(x)$ par :

$$\frac{1}{2}U_0(x) = U(x, y_{1/2}(x), 0). \tag{5.17}$$

La largeur $y_{1/2}(x)$ est l'équivalent de δ sur la figure 5.1. Les mesures montrent que sa variation est linéaire :

$$\frac{dy_{1/2}}{dx} = S \approx 0.1, \tag{5.18}$$

et que la vitesse longitudinale sur l'axe $U_0(x)$ varie comme $x^{-1/2}$. Comme nous allons le voir, ces observations sont des conséquences de l'auto-similarité du champ de vitesse suivant x. En effet, en réalisant des mesures à différentes abscisses, les expérimentateurs ont pu montrer les propriétés de similitude suivantes. En posant $\xi = \frac{y}{y_{1/2}}$, le champ de vitesse vérifie :

$$\frac{U}{U_0(x)} = f(\xi) \text{ et } \frac{\overline{u'v'}}{U_0^2(x)} = g(\xi). \tag{5.19}$$

Les fonctions f et g sont donc indépendantes de la position x, en d'autres termes, la forme mathématique du profil de vitesse U reste la même tout le long du jet, quel que soit sa largeur.

L'équation de quantité de mouvement du jet (Eq. 5.15) sans le terme visqueux ni le gradient de pression à l'infini) s'exprime par :

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \tag{5.20}$$

Avec l'équation de continuité (Eq. 5.9), nous ne disposons que de deux équations pour trois inconnues : U, V et $\overline{u'v'}$. Les observations expérimentales sur les similitudes de l'écoulement ne permettront pas

de fermer les équations car nous avons remplacé deux inconnus par deux autres fonctions inconnues f et g. Cependant ces hypothèses permettrons de calculer facilement les grandeurs principales de l'écoulement à savoir $U_0(x)$ et $y_{1/2}(x)$. Nous ferons ensuite une hypothèse de viscosité turbulente pour fermer le système et calculer le profil de vitesse du jet.

Tout d'abord, il est important de remarquer à partir de (Eq. 5.20) que le flux de quantité de mouvement moyenne dans la direction x (et par unité d'envergure suivant z) :

$$\dot{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U^2 dy, \tag{5.21}$$

est conservé. Cette propriété permet de donner rapidement l'évolution de la vitesse axiale $U_0(x)$ en fonction de la largeur $y_{1/2}(x)$. En effet, en introduisant les hypothèses (Eq. 5.19), le flux devient :

$$\dot{M} = \rho U_0^2(x) y_{1/2}(x) \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi. \tag{5.22}$$

On obtient alors que le produit $U_0^2(x) y_{1/2}(x)$ est indépendant de x.

En introduisant les hypothèses de similitudes (Eq. 5.19) dans l'équation de quantité de mouvement (Eq. 5.20), on arrive à la relation suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{dy_{1/2}(x)}{dx}\left(f(\xi)^2 + f'(\xi)\int_0^{\xi} f(\xi)d\xi\right) = g'(\xi). \tag{5.23}$$

La relation (Eq. 5.23) est de la forme $\Sigma_i a_i(x) b_i(\xi) = c(\xi)$, où encore $\Sigma_i \frac{da_i(x)}{dx} b_i(\xi) = 0$. Si les fonctions $b_i(\xi)$ sont indépendantes alors $\forall i \; a_i = cte$. Appliqué à (Eq. 5.23), ce théorème annonce que $\frac{dy_{1/2}}{dx}$ est une constante ce qui est en accord avec les observations expérimentales (Eq. 5.18). La conservation du flux de quantité de mouvement (Eq. 5.22) implique que la vitesse axiale doit évoluer comme $U_0(x) \propto x^{-1/2}$. Ce résultat est aussi vérifié par l'expérience. Nous voyons que les similitudes donnent les évolutions des grandeurs principales de l'écoulement, mais elles ne donnent pas la forme mathématique du profil $f(\xi)$. Pour cela nous allons utiliser l'hypothèse de viscosité turbulente (Eq. 5.1) qui se traduit avec l'approximation de couche limite par :

$$\tau_{xy} = -\rho\overline{u'v'} = \rho\nu_T \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{5.24}$$

Les hypothèses de similitudes (Eq. 5.19) fournissent donc que la viscosité turbulente est autosimilaire selon :

$$\nu_T(x,y) = U_0(x) y_{1/2}(x) \hat{\nu}(\xi). \tag{5.25}$$

Il faut maintenant donner une expression à $\hat{\nu}(\xi)$ pour calculer la forme du profil du jet. En prenant $\hat{\nu}(\xi)$=*constante* on trouve $f(\xi) = sech^2\left(\frac{1}{2} ln(1+\sqrt{2})^2)\xi\right)$. Cette fonction est en assez bon accord avec l'expérience comme le montre la figure 5.2. On retiendra donc que le jet plan est bien représenté par le modèle de longueur de mélange (Eq. 5.5) avec pour vitesse caractéristique la vitesse axiale du jet $u_0 = U_0(x)$ et longueur de mélange la largeur du jet $\ell = y_{1/2}(x)$. La viscosité turbulente augmente donc avec la distance à la buse du jet comme $x^{\frac{1}{2}}$.

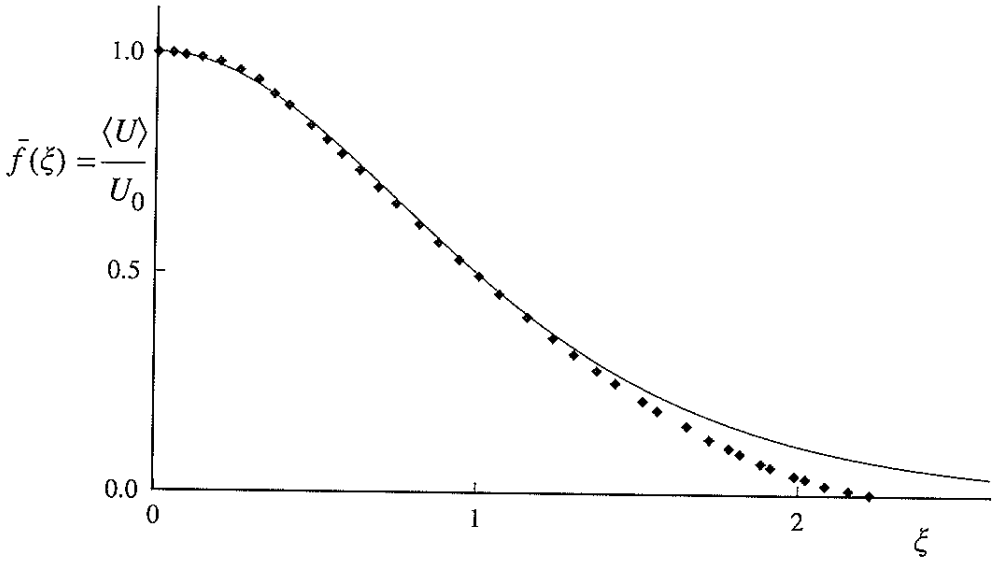


FIG. 5.2 – Comparaison théorique (ligne continue) et expérimentale (points) du profil de vitesse moyenne pour le jet plan.

5.4 Ecoulement de paroi

5.4.1 Profil logarithmique universel des vitesses

Un des résultats expérimentaux majeurs de la couche limite turbulente est le comportement logarithmique du profil des vitesses (voir *figure 5.3*). Nous allons comprendre ce résultat à partir du modèle de viscosité turbulente avec longueur de mélange.

On considère l'écoulement (moyenné dans le temps) le long d'une surface plane illimitée. La direction de l'écoulement est suivant l'axe des x et le plan x, z est le plan de paroi (voir figure 5.1). On rappelle qu'avec l'approximation de couche limite, l'équation de quantité de mouvement transversale fournie (Eq. 5.13) :

$$P(x,y) = p_0(x) - \rho\overline{v'^2(x,y)}. \tag{5.26}$$

On remarquera que contrairement à la couche limite laminaire ($\overline{v'^2(x,y)} \equiv 0$), la pression dépend de y dans la couche limite limite turbulente. Cependant sur la paroi $\overline{v'^2(x,0)} = 0$, par conséquent la pression à la paroi $p_w(x)$ est égale à la pression de l'écoulement extérieur $p_0(x)$ comme pour la couche limite laminaire. Ainsi la nature laminaire ou turbulente de la couche limite sur l'aile d'un avion ne devrait pas changer sa portance. On reprend maintenant l'équation de quantité de mouvement longitudinale (Eq. 5.15) :

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{tot}}{\partial y} \tag{5.27}$$

où nous avons regroupé les contraintes turbulentes et visqueuses dans un seul terme de contrainte totale τ_{tot} :

$$\tau_{tot} = \rho\nu\frac{dU}{dy} - \rho\overline{u'v'}. \tag{5.28}$$

La force exercée par le fluide sur la paroi ($y = 0$) est une force de friction tangentielle (les contraintes normales à la paroi sont négligeables à cause de l'hypothèse de couche limite). La contrainte moyenne correspondante est appelée contrainte de paroi. A $y = 0$, les termes convectifs sont nuls à cause de la condition d'adhérence à la paroi. Il en résulte que l'expression de la contrainte de paroi est simplement donnée par la relation contrainte déformation du fluide visqueux Newtonien, et qui s'adapte dans le cadre de l'approximation de couche limite à :

$$\tau_w = 2\rho\nu\overline{e_{xy}} = \rho\nu(\partial_x\overline{u_y} + \partial_y\overline{u_x}) \approx \rho\nu\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0}. \tag{5.29}$$

Dans l'expression (Eq. 5.29), la prise de valeur moyenne est nécessaire car même si les vitesses sont nulles en paroi, l'écoulement n'est pas stationnaire pour autant et les gradients, même pris à la paroi, fluctuent. On retrouve bien à partir de (Eq. 5.28) que $\tau_{tot}|_{y=0} = \tau_w$. Le profil de vitesse se raccorde linéairement sur la paroi.

Pour déterminer le profil de vitesse il est nécessaire d'utiliser les résultats expérimentaux, à savoir que le terme du tenseur de Reynolds est d'ordre $O(\rho U^2)$. L'équation de quantité de mouvement (Eq. 5.27) peut alors s'écrire avec une approximation de couche limite :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{tot}}{\partial y} \tag{5.30}$$

dont l'intégration de 0 à y mène à :

$$\rho\nu\frac{dU}{dy} - \rho\overline{u'v'} = \tau_w + \frac{dp_0}{dx}y \tag{5.31}$$

Dans la zone turbulente où les effets visqueux seront négligeables (c'est-à-dire suffisamment loin de la paroi), l'équation (Eq. 5.31) devient si on considère une couche limite sans gradient de pression :

$$-\rho\overline{u'v'} = \tau_w \tag{5.32}$$

La contrainte turbulente est constante dans cette zone et égale à la contrainte de paroi. On ferme maintenant les équations à partir d'une hypothèse de viscosité turbulente à longueur de mélange (Eq. 5.5) :

$$\nu_T = \kappa y u^* \tag{5.33}$$

où $\kappa = 0.41$ est une constante universelle, dite constante de Kármán, y est la longueur de mélange et u^* une vitesse caractéristique définie par la contrainte de paroi :

$$\tau_w = \rho {u^*}^2 \tag{5.34}$$

u^* est aussi appelée vitesse de friction. Dans cette zone turbulente l'intégration de (Eq. 5.32) après avoir introduit (Eq. 5.33) et (Eq. 5.34) donne le profil logarithmique des vitesses :

$$U = \frac{u*}{\kappa}(\ln y + c), \tag{5.35}$$

où c est une constante d'intégration qui ne peut pas être déterminée par les conditions aux limites, car physiquement la relation 5.32 n'est pas valable aux petites distances de la paroi ($y \to 0$) où la

viscosité se fait ressentir. On introduit alors une échelle visqueuse (différente de l'épaisseur de couche limite). On définie cette échelle en fixant à l'unité le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement à la distance δ_ν, $Re = \frac{\delta_\nu u*}{\nu} = 1$. On en tire donc que :

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u*}, \tag{5.36}$$

La région telle que $y << \delta_\nu$ s'appelle la sous-couche visqueuse. Dans cette région la vitesse se raccorde linéairement à la paroi selon la loi (Eq. 5.29) :

$$\boxed{U(y) = \frac{{u*}^2}{\nu} y, \quad y << \delta_\nu.} \tag{5.37}$$

Maintenant il faut raccorder la solution (Eq. 5.35) valable pour $y > \delta_\nu$ et (Eq. 5.37) valable pour pour $y << \delta_\nu$ par le choix de la constante c dans (Eq. 5.35). D'après la loi (Eq. 5.37) dans la sous-couche, la vitesse en δ_ν devrait être égale à $u*$. Comme à cette distance les effets convectifs commencent à prendre le dessus, on approxime la vitesse en δ_ν par $c' u*$, on obtient donc en remplaçant dans (Eq. 5.35) :

$$U(y) = \frac{u*}{\kappa}(\ln \frac{yu*}{\nu} + c"), \tag{5.38}$$

D'après les mesures réalisées en laboratoire sur des surfaces extrêmement lisses, on trouve :

$$\boxed{U(y) = u*(2.5 \ln \frac{yu*}{\nu} + 5.1), \quad y > \delta_\nu.} \tag{5.39}$$

Le profil de vitesse moyenne adimensionné $U^+(y^+)$ par les variables intrinsèques au problème, $U^+ = \frac{U}{u*}$ et $y^+ = \frac{y}{\delta_\nu}$ est représenté sur la ***figure 5.3***. On remarque que quelque soit le nombre de Reynolds, les profils se superposent tous sur une même loi . Pour $y > 50\delta_\nu$ on retrouve bien la loi logarithmique (5.39) et pour $y < 50\delta_\nu$ le raccordement vers la loi linéaire (5.37) correspondant ici à la courbure introduite par la représentation semi-logarithmique. En fait la loi linéaire se retrouve avec une bonne approximation pour des distances telles que $y < 5\delta_\nu$.

Enfin, quel sera l'effet d'une rugosité de la surface sur la forme du profil ? Si la taille caractéristique de la rugosité d est petite devant δ_ν, il n'y aura pas d'effet et la relation (5.38) sera inchangée. Par contre dans le cas où $d > \delta_\nu$, la taille caractéristique intrinsèque ne sera plus δ_ν mais d. La distribution des vitesses sera donnée par une formule dérivant de 5.38, où on aura remplacé δ_ν par d :

$$\boxed{U(y) = \frac{u*}{\kappa}(\ln \frac{y}{d} + c"),} \tag{5.40}$$

5.4.2 Comparaison entre couche limite laminaire et turbulente

Dans le cas de la plaque plane, la couche limite correspond au raccord de l'écoulement uniforme extérieur (potentiel) à la vitesse nulle à la paroi. Dans le cas laminaire, ce raccord est réalisé directement entre le profil linéaire de la vitesse en proche paroi et la vitesse uniforme de l'écoulement extérieur (c'est la solution de Blasius). Dans le cas turbulent, il apparaît un zone intermédiaire entre ces deux dernières qui correspond au profil logarithmique étudié dans la partie précédente. La conséquence se voit très bien sur la figure 5.4 : la couche limite turbulente est beaucoup moins déficitaire en quantité de mouvement que la couche limite laminaire. Ce déficit se mesure par le rapport de

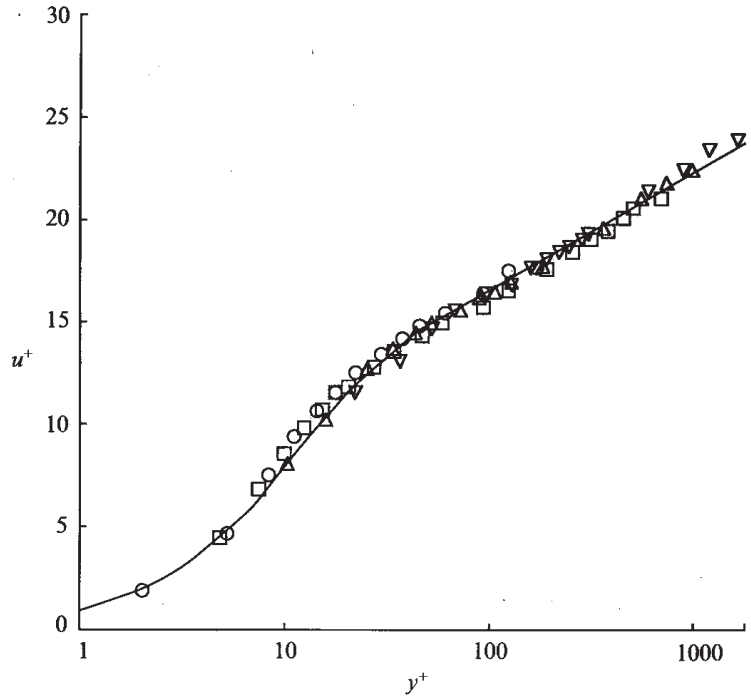


FIGURE 13. Mean velocity profiles, non-dimensionalized on inner variables, for the four Reynolds numbers examined. ○, $Re = 2970$; □, $Re = 14914$; △, $Re = 22776$; ▽, $Re = 39582$. The solid line through the data is the 'law of the wall' plot compiled by Coles (1953) for a zero-pressure-gradient turbulent boundary layer.

FIG. 5.3 – Profil universel des vitesses

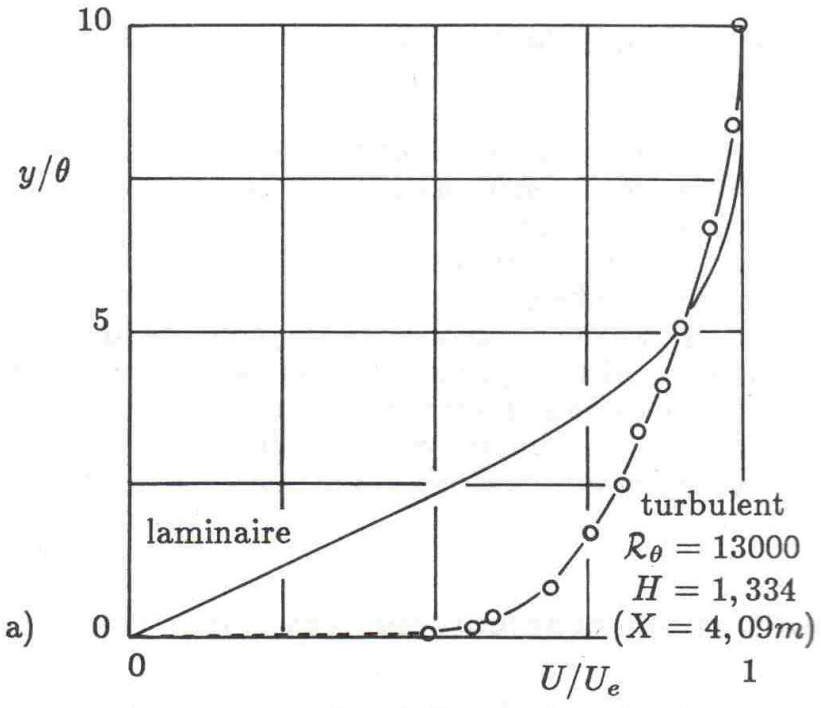


FIG. 5.4 – Profil de vitesse de couche limite laminaire (solution de Blasius, $H = 2.59$, trait continu) et turbulente (mesures expérimentales, cercles).

forme $H = \delta_1/\theta$, entre épaisseur de déplacement $\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{U}{U_e})dy$ et épaisseur de quantité de mouvement $\theta = \int_0^\infty \frac{U}{U_e}(1 - \frac{U}{U_e})dy$.

5.5 Ecoulement dans une conduite

Nous allons estimer le coefficient de friction λ (3.7) dans les tubes lisses à section circulaire dans le régime où l'écoulement est turbulent. Les mesures de ce coefficient sont reportées dans la *figure 3.19*. Pour ces mesures, λ est calculé à partir de la vitesse moyenne dans le tuyau, U_m et le diamètre du tuyau, D. La vitesse moyenne est en bonne approximation égale à la vitesse prise en $y = D/2$:

$$U_m = U(D/2) = (2.5 \ln \frac{Dv*}{2\nu} + 5.1), \tag{5.41}$$

A partir de cette vitesse moyenne et de l'expression 5.39 on obtient une relation implicite pour λ en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{U_m D}{\nu}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.88 \ln Re\sqrt{\lambda} - 0.77, \tag{5.42}$$

L'expression 5.42 de λ trouvée à partir du profil logarithmique des vitesses se superpose parfaitement aux mesures expérimentales de la *figure 3.19* (loi en pointillé) et de la *figure 5.5* (loi 2). Dans le

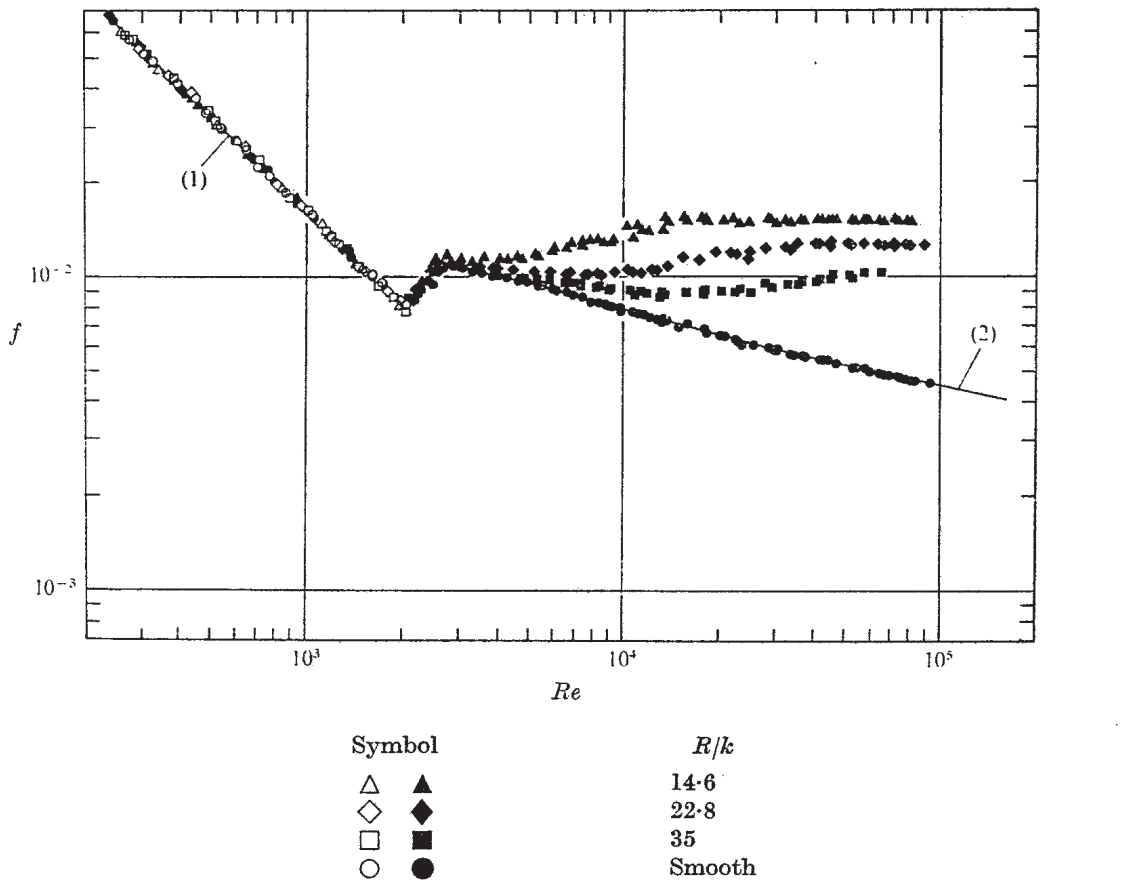


FIG. 5.5 – Mesure du coefficient de friction λ en fonction du nombre de Reynolds pour des tuyaux lisses et de différentes rugosités

cas des tuyaux rugueux, le même raisonnement mais à partir de 5.40 mène à :

$$\lambda = \frac{1.3}{\ln D/2d^2}, \tag{5.43}$$

Le coefficient de friction devient constant comme on peut le constater par les mesures expérimentales montrées sur la *figure 5.5*. La raison est que ces deux types d'écoulements n'ont pas de dépendance directe avec la viscosité contrairement au tuyau lisse où l'échelle caractéristique de l'écoulement $\delta_n u = \nu/u*$ dépend du nombre de Reynolds. Pour les deux autres écoulements c'est soit la taille de la rugosité soit la taille de l'obstacle qui fixe l'échelle caractéristique de l'écoulement turbulent. Si cette taille caractéristique est indépendante du nombre de Reynolds alors les forces dissipatives de la turbulence ne dépendront plus que de la vitesse moyenne au carré (i.e. coefficient de traînée ou de friction constant). On retrouve la propriété fondamentale de la turbulence exposée dans le chapitre précédant.

5.6 Croissance de la couche limite turbulente

A la différence de l'écoulement du tuyau où la couche limite a une épaisseur constante le long de la direction de l'écoulement, la couche limite turbulente sur une plaque se développe en grossissant. L'évolution de cette épaisseur se détermine simplement en supposant que l'épaississement est dû à la turbulence et donc en moyenne dû à une vitesse verticale de l'ordre de $u*$. Comme la frontière de la couche limite se déplace avec une vitesse U_∞ on doit avoir :

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v*}{U_\infty}, \tag{5.44}$$

d'où

$$\boxed{\delta(x) \sim \frac{xv*}{U_\infty},} \tag{5.45}$$

La couche limite turbulente s'élargit linéairement avec la distance alors que la couche limite laminaire s'élargit en racine carrée de la distance.

Localement le profil logarithmique des vitesses reste valable car l'écoulement n'est que faiblement non parallèle. Ainsi, on trouvera un coefficient de traînée semblable à celui des tuyaux lisses pour des parois lisses. Le calcul donne la loi en ligne continue à grand Re dans la *figure 3.18*. Pour des plaques rugueuses on trouvera exactement les mêmes effets que pour les tuyaux rugueux.

Chapitre 6

Structures Tourbillonnaires et dissipation d'énergie

Nous quittons maintenant l'approche écoulement moyen de la turbulence pour nous intéresser à la dynamique des mouvements dans la turbulence. Nous commencerons par caractériser ces "mouvements" par des structures de vorticité que nous définirons. Nous avions vu que le rôle de la turbulence était de produire des petites échelles de mouvements par le biais de la cascade d'énergie : comment ce mécanisme est-il possible dans Navier-Stokes ?

6.1 Cinématique

6.1.1 Décomposition du tenseur des gradients de vitesse

Le tenseur des gradients de vitesse $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ s'écrit comme la somme d'un tenseur symétrique e_{ij} et d'un tenseur antisymétrique ω_{ij} :

$$\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}. \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \quad ; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}).} \tag{6.1}$$

Chacun de ces tenseurs joue un rôle spécifique dans la dynamique des écoulements : le tenseur des taux de déformation e_{ij} est directement relié à la dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur alors que le tenseur des taux de rotation ω_{ij} est relié aux tourbillons.

6.1.1.1 Propriétés du tenseur des taux de déformation

Le tenseur des taux de déformation est un tenseur symétrique, c'est à dire que l'on a : $e_{ij} = e_{ji}$. L'incompressibilité du fluide, $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ (ou encore $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ en notation tensorielle), impose que la trace du tenseur, $tr(e_{ij}) = e_{ll} = 0$. Les composantes de ce tenseur symétrique étant réelles, il admet une base de vecteurs propres orthonormée. Ainsi quelque soit l'écoulement, le taux de déformation peut être localement diagonalisé, où à chaque direction propre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ correspond une valeur propre $(\lambda_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \lambda_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \lambda_3 = \frac{\partial v_3}{\partial x_3})$. L'incompressibilité se traduit par :

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,} \tag{6.2}$$

et le champ de vitesse de déformation locale est en intégrant $\partial_j v_i = e_{ij}$, à une constante près :

$$\vec{u}_D = \begin{cases} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_3 x_3 \end{cases}$$

Les directions propres de valeurs propres positives sont appelées directions d'étirement et celles de valeurs propres négatives, directions de compression. Avec l'incompressibilité, on a toujours au moins une direction de compression et une direction d'étirement. Sur la ***figure 6.1(a)***, on a représenté les lignes de courant d'un champ de vitesse de déformation bidimensionnel, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Cet écoulement est appelé *déformation pure, point de stagnation* ou *point col*.

Le tenseur des taux de déformations est directement relié au tenseur des contraintes totales dans le fluide σ_{ij}. En effet, ces contraintes s'écrivent comme la somme des contraintes de pression (qui sont toutes des contraintes normales) et des contraintes visqueuses :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}. \tag{6.3}$$

Pour un fluide Newtonien, les contraintes visqueuses sont déterminées par le tenseur des taux de déformation par la relation :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij}. \tag{6.4}$$

Enfin, on montre à partir de l'équation de Navier-Stokes et du premier principe de la thermodynamique, que la perte irréversible d'énergie cinétique en énergie interne sous forme de chaleur par unité de temps et de masse est :

$$\boxed{\epsilon = 2\nu e_{ij} e_{ij}.} \tag{6.5}$$

En turbulence, on utilise souvent le tenseur S_{ij} dont la norme est définie par :

$$\boxed{S^2 = 2e_{ij}e_{ij},} \tag{6.6}$$

S^2 est appelée dissipation. Avec ces notations la puissance dissipée par unité de masse est : $\epsilon = \nu S^2$.

6.1.1.2 Vorticité

Le tenseur ω_{ij} est un tenseur antisymétrique ce qui veut dire que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. On montre que ce tenseur, appelé tenseur des taux de rotation est directement lié au rotationel de la vitesse $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par :

$$\boxed{\omega_k = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})_k \ ; \ \begin{cases} \omega_k = -\epsilon_{ijk}\omega_{ij} \\ \omega_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k \end{cases}} \tag{6.7}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé *vorticité*. Le module de la vorticité $\vec{\omega}^2$ est parfois appelé enstrophie (Ω^2) et s'exprime en fonction du tenseur des taux de rotation par la relation :

$$\boxed{\vec{\omega}^2 = \Omega^2 = 2\omega_{ij}\omega_{ij}.} \tag{6.8}$$

De la même manière que nous avons regardé l'écoulement de déformation pure nous allons regarder un écoulement de rotation pure . Dans le cas bidimensionnel, où l'écoulement est dans le plan

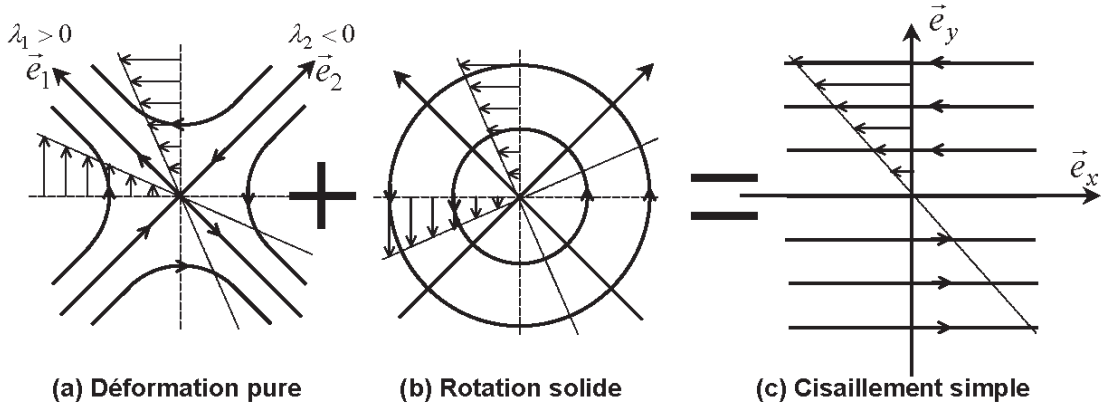


FIG. 6.1 – (a) : écoulement de déformation pure ($\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{2}$). (b) : écoulement de rotation pure, ou rotation solide ($\vec{u}_R = \frac{1}{2}\omega r\vec{e}_\theta$). L'écoulement de cisaillement simple (c) $\vec{u}_C = -2\gamma y\vec{e}_x$, se décompose en une contribution de déformation pure (d'axes propres orientés à 45^o) et d'une contribution de rotation solide telle que la dissipation dans (a) est égale au carré de la vorticité dans (b) : $S^2 = \Omega^2$ soit que $\frac{1}{2}\omega = \lambda = \gamma$.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la vorticité est dirigée dans la direction $\vec{e}_3$, $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$. Le champ de vitesse local est à une constante près donné par :

$$\vec{u}_R = \frac{1}{2}\omega r\vec{e}_\theta = \begin{cases} \omega_{12}x_2 = -\frac{1}{2}\omega x_2 \\ \omega_{21}x_1 = \frac{1}{2}\omega x_1 \end{cases}$$

Pour trouver ce résultat, on intégre $\partial_j v_i = \omega_{ij}$ et on utilise la relation 6.7. Le champ de vitesse $\vec{u}_R$ (voir *figure 6.1(b)*) est celui d'une rotation solide. C'est un écoulement sans aucune déformation et donc sans dissipation d'énergie.

Dans un écoulement quelconque, on a une contribution de déformation (qui dissipe l'énergie) et une contribution de rotation (qui ne dissipe pas). Pour un écoulement bidimensionnel, une contribution égale de rotation et de dissipation fournit un écoulement de cisaillement simple (voir *figure 6.1(c)*).

6.1.2 Equation de la pression

L'équation de la pression s'obtient en prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_i\partial_t v_i + \partial_i v_j \partial_j v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i\partial_i p + \partial_i f_i + \nu\partial_i\partial_j\partial_j v_i \tag{6.9}$$

Le premier terme du membre de gauche et le dernier du membre de droite sont nuls à cause de l'incompressibilté du fluide : $\partial_i v_i = 0$. D'autre part on montre que :

$$e_{ij}e_{ij} - \omega_{ij}\omega_{ij} = \partial_i v_j \partial_j v_i. \tag{6.10}$$

En utilisant les expressions 6.6 et 6.8, on obtient l'équation suivante :

$$\Omega^2 - S^2 = 2(\frac{\Delta p}{\rho} + \vec{\nabla}.\vec{f}) \tag{6.11}$$

Si l'écoulement ne subit qu'un forçage extérieur à divergence nulle, ce qui est le cas des forces de pesanteurs, $\vec{f} = \vec{g}$, on obtient l'équation de la pression :

$$\boxed{\frac{2}{\rho}\Delta p = \Omega^2 - S^2.} \tag{6.12}$$

Cette relation très importante montre que les répartitions spatiales de la vorticité et de la dissipation sont directement reliées au champ de pression. Le Laplacien représente la courbure locale du champ de pression, si la courbure est positive (cas de la présence d'un minimum local et donc d'une basse pression) alors l'écoulement est dominé par la rotation. Au contraire, si le Laplacien est négatif (courbure négative, ce qui est le cas d'un maximum local et donc d'une surpression) alors l'écoulement est dominé par la dissipation. Dans le cas du sillage de la *figure 6.2*, les régions de plus grande dissipation ont lieu dans les régions hyperboliques montrées dans la *figure 6.2 (c)* par des croix : ce sont des zones de haute pression. Les coeurs des tourbillons marqués par des cercles sont des zones de basses pressions. Ces tourbillons correspondent à des régions circulaires de vorticité. De part et d'autre du cylindre on observe des nappes de vorticité, ces nappes correspondent à des cisaillements simples introduits par la couche limite sur le cylindre.

6.1.3 Analogie électromagnétique de la vorticité

Le champ de vitesse $\vec{v}$ et la vorticité $\vec{\omega}$ des fluides incompressibles sont respectivement les analogues de l'excitation magnétique $\vec{H}$ et de la densité de courant $\vec{j}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \end{array} \right. \; ; \; \left\{ \begin{array}{c} \vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} \end{array} \right. \tag{6.13}$$

Les relations établies en électromagnétique sont donc aussi valables en hydrodynamique. Au courant I est associée la circulation Γ, et l'analogue du théorème d'Ampère est :

$$\boxed{\Gamma = \int_C \vec{v}.d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\omega}.d\vec{S}.} \tag{6.14}$$

L'analogue de la relation de Biot et Savart est :

$$\boxed{\vec{v}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\omega}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV'.} \tag{6.15}$$

6.1.4 Exemples de structures tourbillonnaires

Il est souvent très difficile de détecter des structures tourbillonnaires en visualisant le champ de vitesse d'un écoulement. Prenons l'exemple du sillage de la *figure 6.2* où le champ de vitesse (a) ou (b) ne fait pas apparaitre les tourbillons produit dans le sillage. En regardant la carte de vorticité (d), on ne regarde que les taux de rotation locaux, et des structures telles que des tourbillons et des nappes sont facilement détectables. On discute dans la suite de certaine répartition de vorticité qui sont des ingrédients essentiels de la turbulence. Nous commencerons par le tube de vorticité qui est une

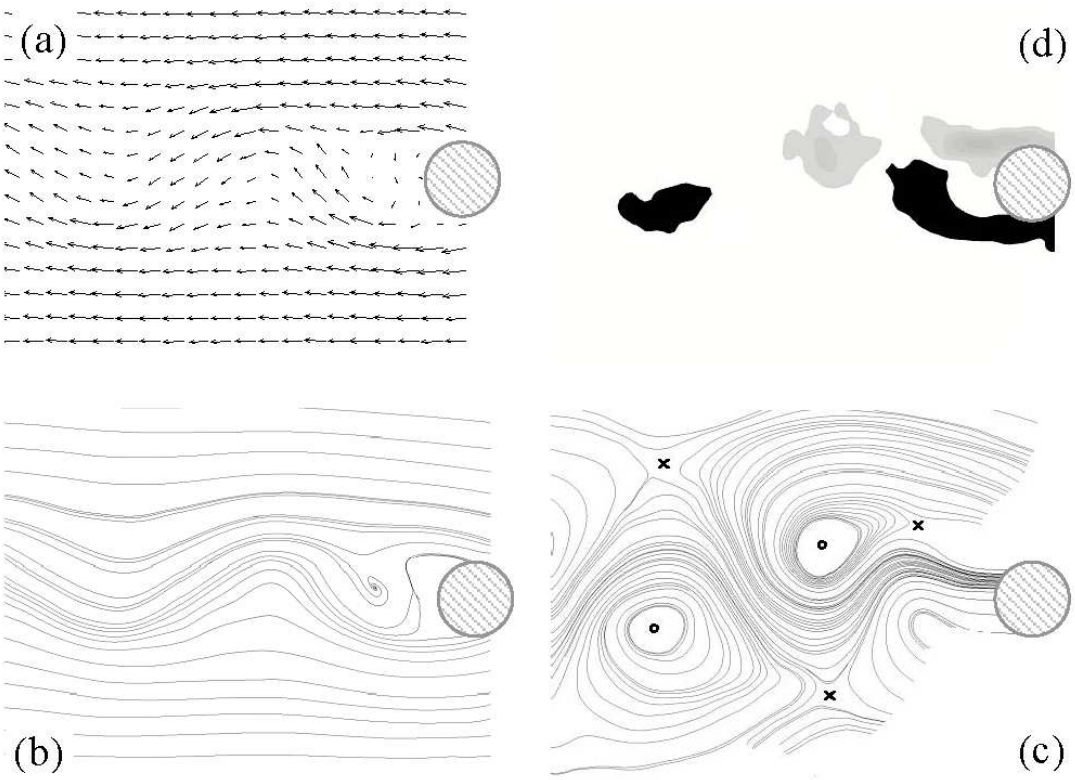


FIG. 6.2 – Mesure du champ de vitesse d'un sillage de cylindre circulaire immobile soumis à un écoulement uniforme U amont. (a) : champ de vecteurs. (b) : lignes de courant dans le référentiel du laboratoire . (c) : lignes de courant dans le référentiel ou l'écoulement amont est nul (le cylindre est donc mobile de vitesse $-U$. (d) Carte de la vorticité, (noir : rotation dans le sens horaire, gris : dans le sens anti-horaire.

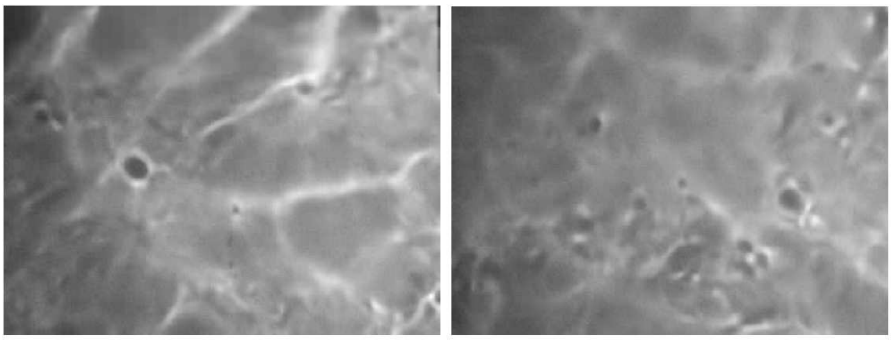


FIG. 6.3 – Vue du dessus de la surface libre de l'eau dans une baignoire après avoir effectué un mouvement en profondeur avec la main. Les zones sombres circulaires correspondent à des creux de la surface et indiquent des tourbillons qui se raccordent perpendiculairement à la surface libre.

structure stable, dont l'exemple dans la nature nous est donné par les tornades, les tourbillons dans les cours d'eau perpendiculaires à la surface libre et visibles par un creux de la surface en forme de cuvette de la taille du tourbillon (voir l'expérience domestique illustrée par la *figure 6.3*). Les nappes de vorticité libres (non confinées par une paroi) sont des objets instables et donc difficilement observables dans un écoulement. Au voisinage des parois, le cisaillement dans la couches limite produit une nappe de vorticité. Dans ce qui suit, on partira à chaque fois de la distribution de vorticité, puis on calculera le champ de vitesse correspondant.

6.1.4.1 Tube de vorticité : le vortex de Rankine

On se place dans un système de coordonnées cylindriques. La distribution de vorticité est donnée par :

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z & \text{si } r \leq r_0 \\ \vec{\omega} = \vec{0} & \text{si } r > r_0 \end{cases} \tag{6.16}$$

la vorticité est alignée avec l'axe du tube, et constante à l'intérieur (voir figure 6.4). En utilisant toutes les symétries du problème (symétrie de rotation et de translation suivant z), on a sur un contour de rayon $r > r_0$, une circulation d'après (6.14) égale à :

$$\Gamma_0 = 2\pi r v_\theta(r) = \pi r_0^2 \omega_0. \tag{6.17}$$

Dans le cas d'un contour de rayon $r < r_0$:

$$\Gamma(r) = 2\pi r v_\theta(r) = \pi r^2 \omega_0. \tag{6.18}$$

Ainsi le champ de vitesse correspondant au tube de vorticité est :

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_0 r & \text{si } r \leq r_0 \\ \frac{\Gamma_0}{2\pi r} & \text{si } r > r_0 \end{cases} \tag{6.19}$$

On a donc une rotation solide à l'intérieur du tube, ce qui définit la taille du tourbillon. Partout dans le tourbillon on a une enstrophie $\Omega^2(r) = \omega_0^2$ et une dissipation $S^2 = 0$. A l'extérieur, l'écoulement est irrotationnel : pas de vorticité $\Omega^2(r) = 0$ et la vitesse décroît en $1/r$, il y a une dissipation $S^2(r) =$

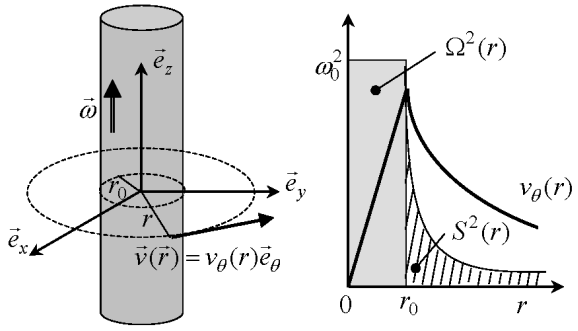


FIG. 6.4 – Vorticité, dissipation et vitesse du vortex de Rankine

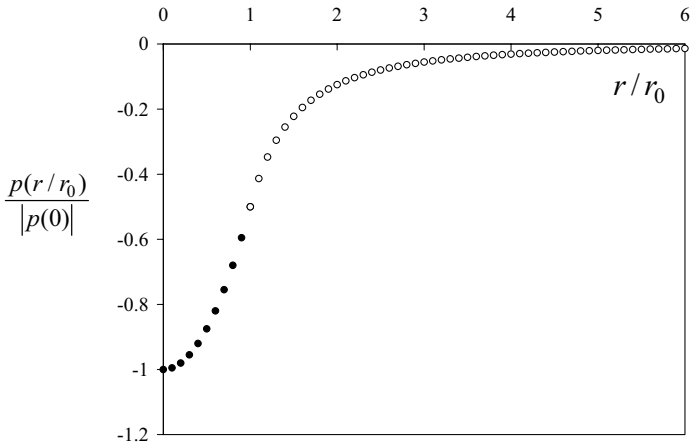


FIG. 6.5 – Profil de pression dans le vortex de Rankine

$\frac{\Gamma_0^2}{\pi^2 r^4}$. La plus grande partie de la dissipation se trouve dans un manchon autour de la vitesse maximum périphérique. On peut calculer la pression dans ce vortex en utilisant l'équation de la pression. En prenant la pression nulle à l'infini, on a :

$$p(r) = \begin{cases} -\frac{\rho\Gamma_0^2}{4\pi^2 r_0^2} + \frac{1}{8}\rho\omega_0^2 r^2 & \text{si } r \leq r_0 \\ \frac{1}{2}\rho\frac{\Gamma_0^2}{4\pi^2 r^2} & \text{si } r > r_0 \end{cases} \tag{6.20}$$

On trouve que le coeur ($r < r_o$) a une pression en r^2, ce qui est inhérent à la rotation solide. Le profil complet de la pression calculé en (6.20) est montré sur la *figure 6.5*. Au passage en $r = r_0$, le changement de courbure indique qu'on passe d'une région dominée par la rotation à une région dominée par la dissipation et, autour du coeur la pression est en $1/r^2$. Ce profil de dépression s'observe couramment dans les cours d'eau (*figure 6.3*) où des tourbillons semblables à ce tourbillon modèle évoluent perpendiculairement à la surface libre. La pression de la surface libre devant rester égale à la pression atmosphérique, l'écoulement ajuste sa pression hydrostatique et la surface se creuse avec exactement le même profil que celui présenté sur la *figure 6.5* (les effets de tension de surface sont négligeables pour des vortex de taille r_0 plus grande que la longueur capillaire $l_C \simeq 2.5mm$).

Le vortex que nous venons de discuter n'est pas solution des équation de Navier-Stokes mais

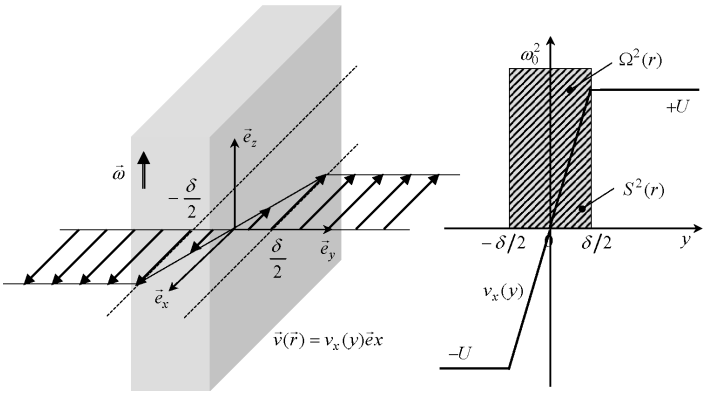


FIG. 6.6 – Vorticité, dissipation et vitesse dans une nappe de vorticité constante

modélise une solution exacte (non stationnaire) qui est le vortex de Lamb-Oseen. Ces vortex sont stables mais non stationnaires, c'est à dire qu'au cours de leur dynamique ils diffusent par viscosité en grossissant (voir partie suivante sur la dynamique de la vorticité).

6.1.4.2 Le point vortex

Quand on fait tendre le rayon du tube vers 0, le tube devient une ligne et son intersection avec le plan (x, y) un point. La circulation reste finie, et la vitesse produite par le point vortex est :

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}. \tag{6.21}$$

L'écoulement est partout irrotationnel sauf sur le point où la vorticité est $\omega(r) = \Gamma_0 \delta(x)\delta(y)$.

6.1.4.3 Nappes de vorticité

Ces nappes correspondent à des écoulements cisaillés comme la couche limite et les profils avec point d'inflexion. On choisit un système de coordonnées cartésiennes, on s'intéresse à une distribution de vorticité donnée par :

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \omega_0 \vec{e}_z & \text{si } -\frac{\delta}{2} \leq y \leq \frac{\delta}{2} \\ \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{6.22}$$

Dans la nappe d'épaisseur δ, la vorticité est uniforme et orientée suivant $\vec{e}_z$. En applicant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire centré de longueur l suivant x et $2y$ suivant y on trouve :

$$v_x(y) = \begin{cases} \frac{\omega_0 \delta}{2} = +U & \text{si } y < -\frac{\delta}{2} \\ -\frac{\omega_0 \delta}{2} = -U & \text{si } y > \frac{\delta}{2} \\ -\omega_0 y & \text{si } -\frac{\delta}{2} \leq y \leq \frac{\delta}{2} \end{cases} \tag{6.23}$$

Sur ce contour la circulation est $\Gamma_0 = 2Ul$, on lui préfère la circulation par unité de longueur $\gamma_0 = \frac{\Gamma_0}{l} = 2U$ qui est égal au saut de vitesse de part et d'autre de la nappe. La vorticité dans la nappe est $\omega_0 = \frac{\gamma}{\delta}$.

A l'extérieur de la nappe il n'y a ni rotation ($\Omega^2 = 0$) ni déformation ($S^2 = 0$)(voir *figure 6.6*). A l'intérieure, on a la vitesse d'un cisaillement simple, il y a donc autant de dissipation que de vorticité, $\Omega^2 = S^2$. Si on néglige la pression hydrostatique, la pression restera constante dans tout l'écoulement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de la nappe vers 0, on obtient un nappe infiniment fine de ciculation par unité de longueur $\gamma_0 = \frac{\Gamma_0}{l} = 2U$. L'intersection de la nappe avec le plan (x, y) donne une ligne.

6.2 Dynamique de la vorticité

Les vortex et nappes que nous venons de décrire ne sont pas des solutions stationnaires de l'équation de la dynamique des fluides. Ils évolueront tous irrémédiablement par diffusion visqueuse et parfois par convection.

6.2.1 Equation de la vorticité

Pour connaitre la dynamique de la vorticité, on prend le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et on obtient l'équation de la vorticité :

$$\boxed{D_t\vec{\omega} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{v} + \nu\Delta\vec{\omega}.} \tag{6.24}$$

Dans le membre de gauche, on reconnaît le terme de transport de la vorticité par la vitesse :$(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{\omega}$. Dans le terme de droite on reconnaît le terme de transport de la vorticité par diffusion moléculaire. Il y a un terme de signification physique nouvelle :$(\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{v}$, c'est le terme d'amplification de la vorticité par le champ de déformation. On peut montrer que $[(\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{v}]_i = e_{ij}\omega_j$. Dans le cas d'écoulement bidimensionnel (2D), la vorticité est toujours perpendiculaire au plan dans le lequel a lieu le mouvement : $\vec{\omega} \perp \vec{v}$ et donc $(\vec{\omega}.\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{0}$. Cette différence fondamentale entre des écoulements 2D et 3D conduit à des dynamiques totalement différentes.

6.2.2 Notions sur la dynamique de la vorticité en écoulement 2D

6.2.2.1 Ecoulement 2D en fluide parfait 2D

En écoulement 2D dans le plan (x, y), la vorticité (forcément orientée suivant $\vec{e}_z$), est simplement transportée par diffusion et convection. Dans le cas d'un fluide parfait, le terme diffusif est nul et on obtient l'équation de convection, $D_t\omega = 0$. La vorticité est alors conservée le long des trajectoires. La dynamique en fluide parfait 2D d'une distribution quelconque de vorticité est le résultat du transport de la vorticité par le champ de vitesse induit par la distribution de vorticité elle même. Cette vitesse induite est déterminée en tout point par la relation de Biot et Savart (6.15). L'équation de convection devient (6.25) en coordonnées cartésiennes et (6.26) en polaires :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_x\frac{\partial\omega}{\partial x} + v_y\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_r\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = 0. \tag{6.26}$$

On illustre cette dynamique à partir de l'évolution de deux points vortex. Prenons deux points vortex de même circulation Γ_0 et distant de a, chaque point vortex va induire sur son voisin une

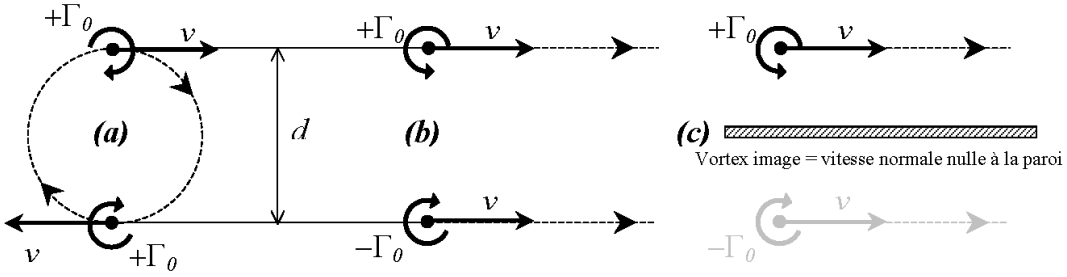


FIG. 6.7 – Trajectoires en pointillé provoquées par le jeu des vitesses induites de deux points vortex. (a) : les deux points vortex ont la même circulation et ils décrivent des trajectoires circulaires confondues. (b) : les points vortex ont des circulations opposées et les trajectoires sont rectilignes. (c) proche d'une paroi un vortex s'auto-induit une vitesse de translation

FIG. 6.8 – Mise en évidence des tourbillons de bout d'aile

vitesse $v = \frac{\Gamma_0}{2\pi a}$ et les points vortex vont tourner l'un autour de l'autre à cette vitesse (*figure 6.7 (a)*). Par contre, si les deux points vortex ont des circulations opposées, les modules des vitesses induites seront toujours les mêmes mais les deux point vortex auront un mouvement de translation (*figure 6.7 (b)*). Proche d'une paroi, un point vortex va avoir un mouvement de translation le long de celle ci. En effet, la condition cinématique à la paroi impose que les vitesses normales doivent y être nulles. Techniquement, cette condition peut être réalisée en placant un vortex image de l'autre coté de la paroi (*figure 6.7 (c)*), on se retrouve alors dans la même situation que dans le cas de la *figure 6.7 (b)* et le vortex avancera le long de la paroi à la vitesse v.

En fait une grande partie de la dynamique des tourbillons peut se comprendre avec le jeu des vitesses induites. Par exemple en aviation, il existe deux tourbillons longitudinaux mis en évidence dans la *figure 6.8*. Les vitesses induites entre ces deux tourbillons provoquent un mouvement de translation des tourbillons vers le bas. Lors de l'atterrissage, les intéractions avec le sol, feront s'écarter les deux tourbillons. De manière un peu plus compliquée, la dynamique d'un sillage plan (allée tourbillonnaire de Bénard von Kármán) est aussi le résultat du jeu des vitesses induites comme le montre la simulation numérique simple sur la *figure 6.9*. Il en est de même pour les anneaux tourbillonnaires, la dynamique d'un jet plan ...

On remarque à partir de 6.26 et de l'équation de continuité que tout écoulement 2D axisymétrique est solution stationnaire de l'équation de convection, puisque dans ce cas $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$. Ainsi, le vortex de Rankine et le point vortex sont des solutions stationnaires de l'équation de convection. Par contre

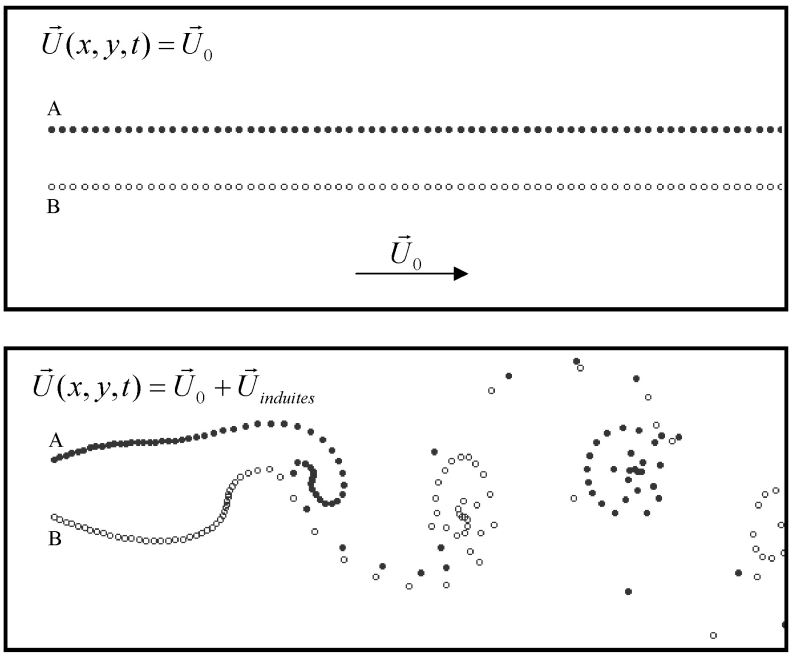


FIG. 6.9 – En haut, on injecte en A et B des particules passives dans un écoulement uniforme $\vec{U}_0$. Elles se déplacent simplement de la gauche vers la droite et forment deux lignes d'émissions, semblables à du colorant. En bas, on a donné à chaque particule une circulation (sens horaire pour celles qui sont injectées en A et anti-horaire pour B). On calcule à chaque pas de temps la vitesse résultante (Biot et Savart) sur chaque particule p, $\vec{V}_p = \Sigma_{i \neq p} \frac{\Gamma_i (\vec{r}_p - \vec{r}_i)}{2\pi |\vec{r}_p - \vec{r}_i|^2}$ des vitesses induites par toutes les autres particules i. Une fois les vitesses sur les particules connues, on les déplace de $\vec{V}_p \Delta t$ (equation 6.25).

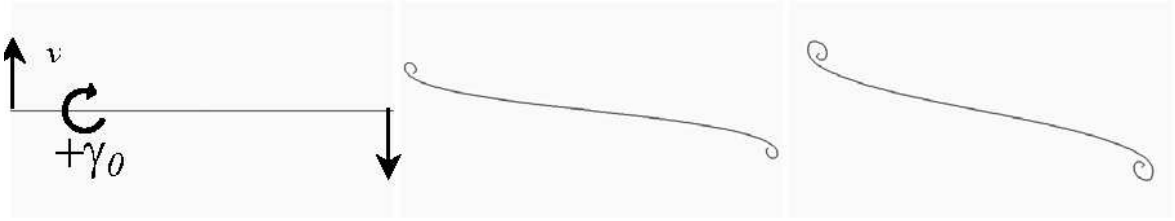


FIG. 6.10 – Evolution d'une nappe de vorticité infiniment mince 2D en fluide parfait

la distribution de vorticité en forme de nappe évoluera irrémédiablement de manière assez complexe. Prenons par exemple une nappe infiniment fine de circulation par unité de longueur $\gamma_0 = \frac{\Gamma_0}{l} = 2U$ de longueur finie. Chaque élément de ce segment aura une vitesse induite par la vorticité de tous les autres éléments du segment. A chaque extrémité les vitesses induites seront les plus grandes, au centre elle sera nulle. La *figure 6.10* montre l'évolution de la nappe initialement rectiligne réalisée par calcul numérique. La nappe s'enroule au niveau des extrémités. On verra plus loin que ces enroulements correspondent à l'instabilité de cisaillement.

6.2.2.2 Effet de la viscosité

De la même manière que la viscosité est responsable du transport de la quantité de mouvement par diffusion, elle le sera pour le transport de la vorticité par diffusion. Dans le cas 2D l'équation s'écrit :

$$D_t\omega = \nu\Delta\omega. \tag{6.27}$$

La viscosité aura pour effet d'étaler la vorticité : les nappes vont s'élargir, les vortex vont grossir dans des lois en racine carrée du temps si aucun autre effet que la viscosité n'intervient dans la dynamique.

L'évolution par viscosité du point vortex, $w(r, t = 0) = \Gamma_0\delta(x)\delta(y)$ donne lieu à une solution exacte : le vortex de Lamb-Oseen dont la solution est :

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_0(t)^2} e^{\frac{-r^2}{r_0(t)^2}}, v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}(1 - e^{\frac{-r^2}{r_0(t)^2}}), r_0^2(t) = 4\nu t, \tag{6.28}$$

où $r_0(t)^2$ est le rayon quadratique moyen de la vorticité définie par :

$$r_0^2 = \frac{\iint r^2\omega ds}{\iint \omega ds}. \tag{6.29}$$

On voit bien dans ce cas que la taille du vortex, donnée par $r_0(t)$ évolue en racine carrée du temps. Ce grossissement s'effectue à circulation constante. Notons que le nombre de Reynolds d'un tel vortex, basé sur sa circulation et la viscosité reste donc constant tout au long de son évolution. La solution de Lamb-Oseen est un excellent modèle de vortex, mais cependant il a le problème que son énergie cinétique est infinie !

Contrairement au vortex, le nombre de Reynolds d'une nappe de vorticité qui évolue par viscosité augmente au cours du temps. Une nappe devient donc de plus en plus instable vis à vis des instabilités inertielles au cours de son évolution visqueuse.

6.2.3 Bilan d'enstrophie

On se place maintenant dans le cadre général des écoulements 3D, et on s'intéresse à l'évolution du module carré de la vorticité : $W = \vec{\omega}^2$. Cette équation s'obtient en multipliant l'équation (6.24) par $\vec{\omega}$:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = 2\vec{\omega}\underline{\underline{e}}\vec{\omega} + \nu(\Delta W - 2(\vec{\nabla}\vec{\omega})^2).} \tag{6.30}$$

Le terme du membre de gauche de cette équation traduit l'évolution temporelle d'un volume élémentaire du module carré de la vorticité qui se déplace avec l'écoulement. Cette équation de bilan nous fournit trois mécanismes responsables de cette évolution. Le troisième terme du membre de droite sera toujours négatif et correspond à une diminution irréversible du module de la vorticité : c'est la dissipation d'énergie.

La viscosité fait apparaître des gradients de vitesses au voisinage des parois et crée donc de la vorticité, le terme responsable pour cette création est le deuxième terme du membre de droite.

Enfin le premier terme du membre de droite est propre aux écoulements 3D : il correspond à une augmentation ou à une réduction de la vorticité par le champ de déformation. Dans un écoulement turbulent homogène et isotrope, ce terme est en moyenne positif, ce qui veut dire qu'en moyenne, la turbulence amplifie la vorticité par "étirement" (voir section suivante). Rappelons que la dissipation locale dépend des gradients de vitesse locaux (équation 6.5), ainsi l'intensification locale de la vorticité aura aussi pour effet d'accroître la dissipation d'énergie.

6.2.4 Etirement de la vorticité, échelle de Burgers

L'équation de la vorticité sans viscosité s'écrit (en 3D) :

$$D_t\vec{\omega} = \underline{\underline{e}}\vec{\omega}. \tag{6.31}$$

Plaçons nous dans le repère propre du tenseur des taux de déformations. Dans ce cas la matrice $\underline{\underline{e}}$ est diagonale :

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

et l'incompressibilité du fluide impose que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Suivons une particule fluide de vorticité $\vec{\omega}$ transportée par l'écoulement de telle sorte que l'évolution temporelle de la vorticité soit donnée par $D_t\vec{\omega}$. L'avenir de la vorticité portée par la particule sera d'être amplifiée exponentiellement par les taux de déformation de chaque direction propre :

$$\boxed{\omega_i(t) = \omega_i(0)e^{\lambda_i t}.} \tag{6.33}$$

En vertu de l'incompressibilité, il y a au moins une, sinon deux directions où la vorticité augmente exponentiellement pour les valeurs propres λ_i positives. Pour la, ou les autres valeurs propres négatives, la vorticité décroît exponentiellement. Notons qu'en turbulence, le fait est qu'il y a en moyenne plus d'étirement que de contraction de vorticité. L'étirement concentre une distribution initiale de vorticité sur une taille qui décroit exponentiellement avec le temps. La relation taille-vorticité est une conséquence du théorème de Kelvin sur le bilan de la circulation sur un contour fermé se déplaçant avec

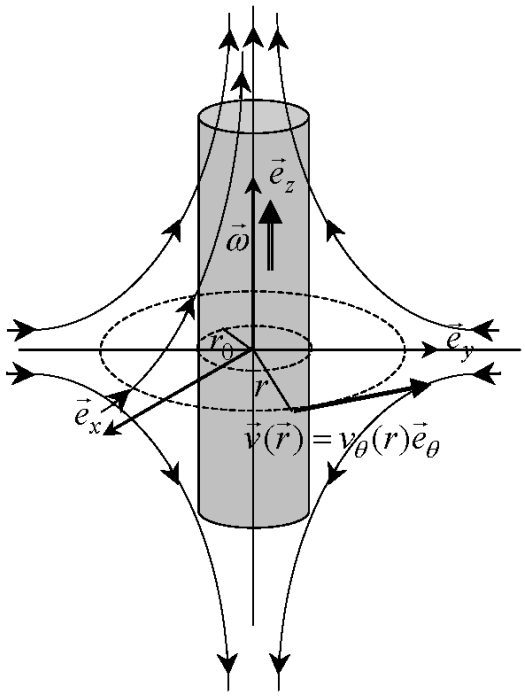


FIG. 6.11 – Tube de vorticité étirée, la vorticité est alignée avec la direction d'étirement

l'écoulement. Pour un fluide inviscide avec un forçage dérivant d'un potentiel (ce qui est le cas pour la pesanteur), la circulation doit être conservée. Prenons un vortex axisymétrique dont la vorticité est distribuée de façon gaussienne (vortex de Lamb-Oseen (6.30)). On applique à ce vortex un champ de déformation stationnaire donné par (voir *figure 6.11*) :

$$\vec{v}_D = \begin{cases} v_r = -\frac{1}{2}\gamma r \\ v_z = \gamma z \end{cases} \tag{6.34}$$

Ici, les valeurs propres dans la base du tenseur des taux de déformation sont $(-\gamma/2; -\gamma/2; \gamma)$ et la vorticité est alignée avec la direction z de valeur propre positive. En laissant $r_0(t)$ le seul paramètre dépendant du temps, on trouve que la vitesse $v_\theta(r,t)$ et la vorticité $\omega(r,t)$ évoluent de façon autosimilaire avec :

$$v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}(1 - e^{\frac{-r^2}{r_0(t)^2}}), \omega(r,t) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_0(t)^2} e^{\frac{-r^2}{r_0(t)^2}}, r_0(t) = r_0(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \tag{6.35}$$

La vorticité au centre du vortex $\omega(0,t) = \omega(0,0)e^{\gamma t}$ diverge exponentiellement comme prévue par la relation (6.33).

La viscosité aura pour rôle de tuer la divergence de la vorticité et stoppera le processus d'amplification à une taille caractéristique appelée échelle de Burgers. Si on reprend l'exemple du vortex de Lamb-Oseen, on a vu que l'évolution visqueuse était d'augmenter la taille du vortex (6.30), ce qui est le contraire de l'évolution par étirement qui réduit la taille du vortex (6.35). Quand les deux effets sont

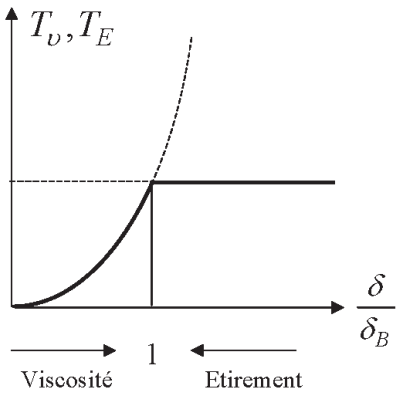


FIG. 6.12 – Mise en évidence d'une échelle de taille pour laquelle les effets diffusifs visqueux s'équilibrent avec les effets de concentration de vorticité dans un étirement

présents, il y aura une compétition entre les deux mécanismes, et l'emportera celui qui aura le temps caractéristique le plus court. Pour une distribution de vorticité de taille caractéristique δ (ici le rayon du vortex de Lamb-Oseen), le temps caractéristique de l'évolution visqueuse sera donné par $T_\nu = \frac{\delta^2}{\nu}$ alors que le temps caractéristique de l'évolution sous étirement sera $T_E = \frac{1}{\gamma}$. Suivant la taille δ, les deux effets n'auront pas le même poids comme l'indique la *figure 6.12*.

Ces deux effets s'équilibrent pour $T_E = T_\nu$, ce qui définit l'échelle caractéristique de Burgers donnée par :

$$\boxed{\delta_B = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}}.} \tag{6.36}$$

Il existe plusieurs solutions exactes stationnaires de l'équation de Navier-Stokes de structures de vorticité déformées par un étirement. On donne ici l'exemple du vortex de Burgers dont le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = -\frac{1}{2}\gamma r \\ v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}(1 - e^{\frac{-r^2}{r_0^2}}) \\ v_z = \gamma z \end{cases} \tag{6.37}$$

La taille du vortex de Burgers est $r_0 = \sqrt{4\nu/\gamma}$, ce qui est bien conforme à l'échelle de Burgers énoncé en 6.36.

6.3 Visualisation expérimentale et dynamique de la vorticité

On peut obtenir des informations sur la répartition de vorticité d'un écoulement au moyen de technique de visualisation.

Le première technique est basée sur le fait qu'en écoulement inviscide, la vorticité suit le mouvement fluide (conséquence du théorème de Kelvin) : la vorticité portée par une particule fluide reste constante. Ainsi, si on marque à l'aide d'un colorant une zone de vorticité, ou pourra visualiser la

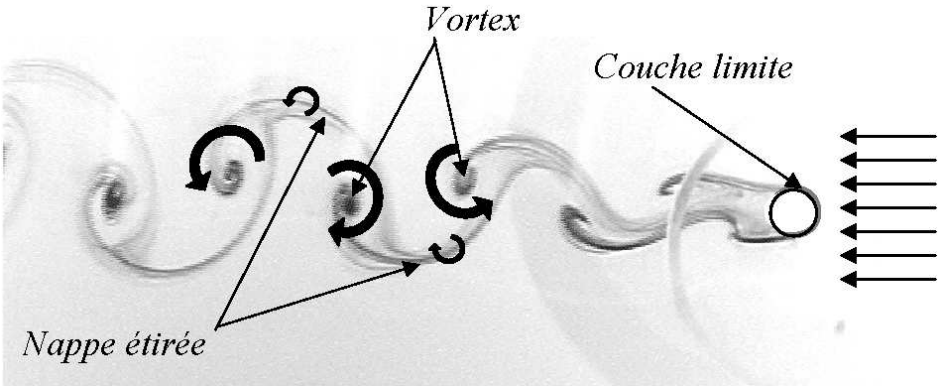


FIG. 6.13 – Visualisation du sillage de von Kármán par injection de colorant dans la couche limite en amont du cylindre

dynamique de cette vorticité. On montre sur la *figure 6.13*, la visualisation d'un sillage de Kármán. Ici le colorant (noir sur la figure) est injecté dans la couche limite sur le cylindre. C'est dans cette couche limite que toute la vorticité initiale est localisée : en suivant l'avenir du colorant on a des informations sur la dynamique de la vorticité : formation de zones circulaires (les tourbillons de l'allée de Kármán) et des zones allongées appelées "rubans", qui sont en fait la section d'une nappe de vorticité. Dans cette image la vorticité est partout perpendiculaire au plan de visualisation. On remarquera que les rubans sont étirés par les tourbillons. Cependant, la vorticité du ruban n'étant pas alignés avec l'étirement, il n'y a pas de mécanisme d'amplification.

Dans la seconde image de la *figure 6.14*, on voit les interactions où des vortex primaires étirent des vortex secondaires. La taille des vortex secondaires atteint l'échelle de Burgers qui est ici l'équilibre entre l'étirement produit par les vortex primaires et la diffusion visqueuse. La formation des vortex secondaires étirés est provoquée par le basculement de la vorticité initialement perpendiculaire à l'écoulement (localisée dans les nappes de la *figure 6.13*) dans la direction de l'écoulement. Ce mécanisme est très bien mis en évidence dans l'expérience de vidange (*figure 6.15*). Pour cette expérience on utilise une deuxième technique de visualisation de la dynamique de la vorticité en regardant la pression. Nous avons vu que les régions de dépression sont corrélées aux régions de grande vorticité. Les effets de tensions de surface sont négligeables et la forme de la surface libre épouse la forme de la dépression. Au début de l'expérience on ouvre un trou dans la partie inférieure du récipient par le lequel le liquide s'écoule. Vu les symétries du problème ; la vorticité qui se crée dans la couche limite est partout perpendiculaire au champ de vitesse. En principe, la vorticité ne devrait pas être amplifiée. Cependant c'est rarement ce qui est observé, puisqu'on finit toujours pas observer un tourbillon de vidange signalant un tube de vorticité étirée et alignée avec l'écoulement. L'origine du basculement est le "bruit" inévitable de la répartition de vorticité qui sera amplifié exponentiellement dans la direction de l'étirement 6.33, entraînant la vorticité qui se trouve dans la couche limite. Le sens de rotation du tourbillon final dépend du bruit initial (axisymétrie non parfaite de l'expérience).

Enfin, en turbulence développée, on met en évidence l'existence de tube de vorticité étiré par une méthode d'ensemencement de microbulles d'air dans un l'écoulement liquide. Migrant vers les zones de basse pression, les bulles montrent par des surconcentrations locales la forme et la dynamique de certaines zones de haute vorticité. On peut voir sur la *figure 6.16*, un tel tube étiré dans un écoulement pleinement turbulent (Re=500 000). Ces vortex sont formés par une dynamique d'étirement, cependant

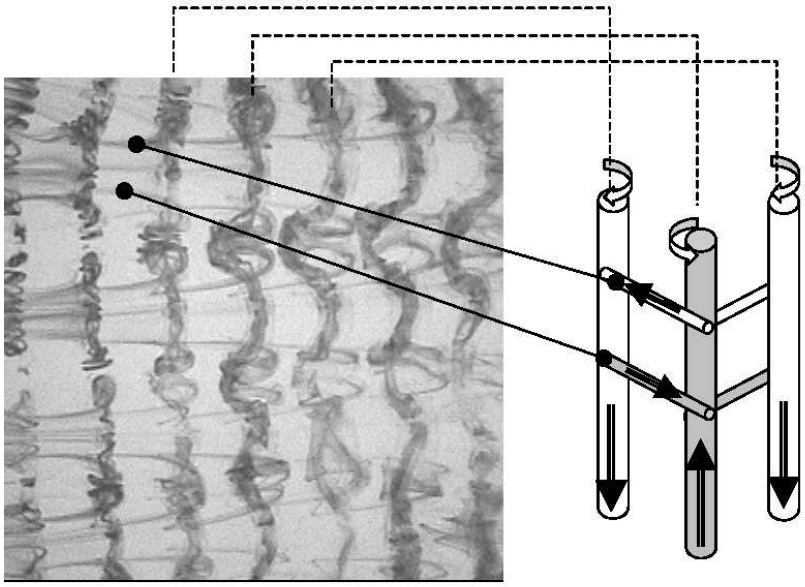


FIG. 6.14 – Visualisation des interactions entre tubes de vorticité : des vortex primaires étirent des vortex secondaires qui atteignent la taille de l'échelle de Burgers

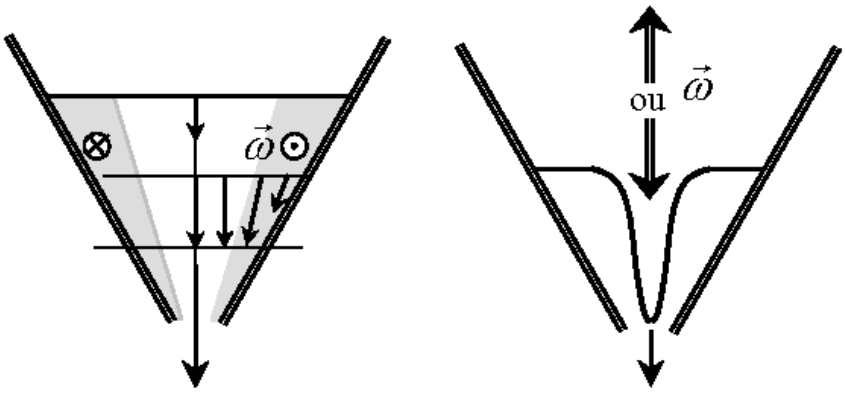


FIG. 6.15 – Basculement et amplification de la vorticité initialement perpendiculaire à l'écoulement dans l'expérience du tourbillon de vidange.

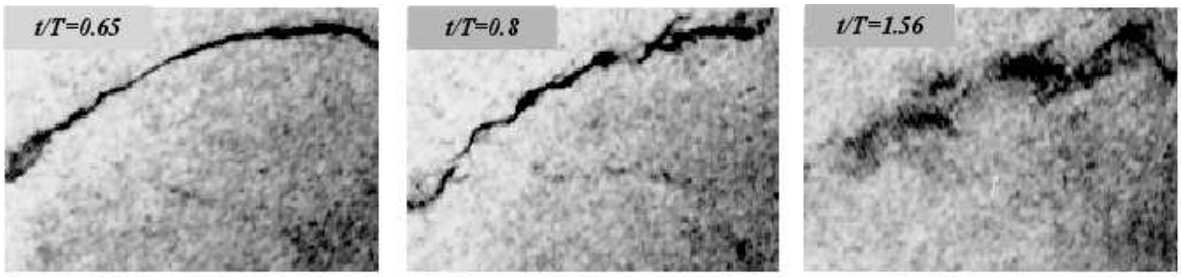
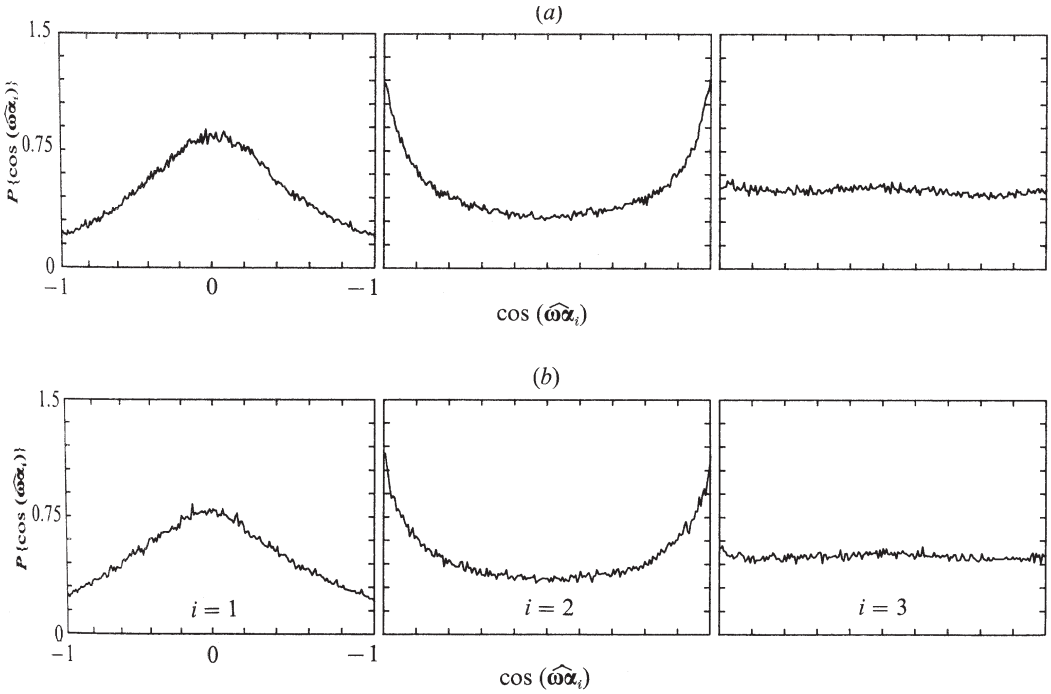


FIG. 6.16 – Tube de vorticité étirée en turbulence pleinement développée mis en évidence par une technique d'ensemencement de microbulles. Après sa formation, le filament est détruit par une instabilité inertielle.

leur taille finale n'atteint pas complétement l'échelle de Burgers, car ils se déstabilisent avant.

6.4 Production de la game d'échelles turbulentes

Le mécanisme d'étirement de la vorticité qui vient d'être discuté est supposé jouer un rôle important dans le processus de formation de petites échelles de mouvement dans l'écoulement. On rappelle que ce mécanisme concentre la vorticité sous l'action d'un champ de déformation. Les chercheurs ont donc regardé localement dans un écoulement turbulent l'orientation du vecteur vorticité dans la base propre du tenseur des déformations. Le résultat montré sur la *figure 6.17* est expérimental (il est aussi vérifié par des simulations numériques directes de turbulence homogène et isotrope). Cette figure représente l'orientation moyenne du vecteur vorticité dans la base propre du tenseur des déformations ($\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3$). On trouve, en moyenne, que deux des valeurs propres sont positives (λ_2 et λ_3 correspondant à deux directions d'étirements : $\vec{\lambda}_2$, $\vec{\lambda}_3$) et une négative (λ_1 correspondant à une direction de compression : $\vec{\lambda}_1$). Les trois valeurs propres sont indicées par ordre croissant : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Le résultat surprenant mis en évidence par la figure et qui reste toujours incompris, c'est que la vorticité n'est pas en moyenne alignée avec la direction propre $\vec{\lambda}_3$ correspondant à la direction d'étirement la plus intense mais avec $\vec{\lambda}_2$ intermédiaire ! En terme de structure cette configuration ne peut pas correspondre à un vortex étiré (voir *figure 6.11*). Le vortex étiré n'est donc pas la structure la plus probable en turbulence. La configuration la plus probable peut correspondre à une nappe de vorticité étirée. En effet, la nappe de vorticité (voir *figure 6.6*) qui est un écoulement cisaillé simple est constituée d'une déformation ayant une valeur propre positive pouvant jouer le rôle de λ_3 et une valeur propre négative pouvant jouer le rôle de λ_1 (voir *figure 6.1*). L'étirement de la nappe serait produit par λ_2 dont la direction propre est alignée avec le vecteur vorticité. Les nappes étirées ont été observées dans les simulations numériques de la turbulence. On présente sur la *figure 6.18* une méthode de visualisation des structures de vorticité par seuillage conditionné. On conditionne la visualisation des régions d'isovaleur de $Q = \frac{1}{2}\Omega^2$ (Q est la moitié du carré du vecteur vorticité, cf. eq. 6.8) par la valeur de $D = \frac{1}{2}S^2$ (D est la moitié de la dissipation, 6.6). Le résultat montre qu'à vorticité donnée, les structures sans dissipation sont des tubes (a) et les structures d'égale vorticité et dissipation sont les nappes (b). Nous reparlerons plus loin des tubes de vorticité lorsque nous aborderons le problème de l'intermittence de la turbulence. Il existe d'autres techniques de visualisation de structures à petite échelle basée sur la valeur du Laplacien de la pression (6.12) et de l'orientation relative de la vorticité dans la base propre du tenseur des déformations.



Probability density functions of cosine of the angle between vorticity vector and eigenvectors of the rate-of-strain tensor; $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$; $x/M = 30$. (*a*) Grid flow, (*b*) boundary layer $y/\delta = 0.2$.

FIG. 6.17 – Orientation moyenne de la vorticité dans la base propre du tenseur des déformations ($\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3$).

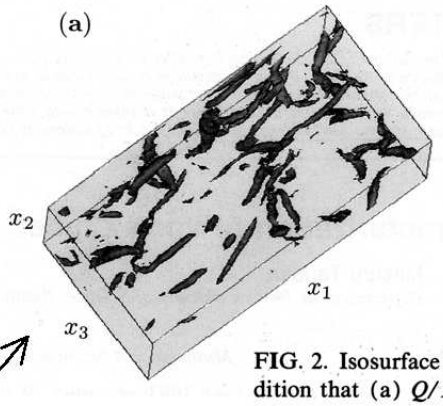
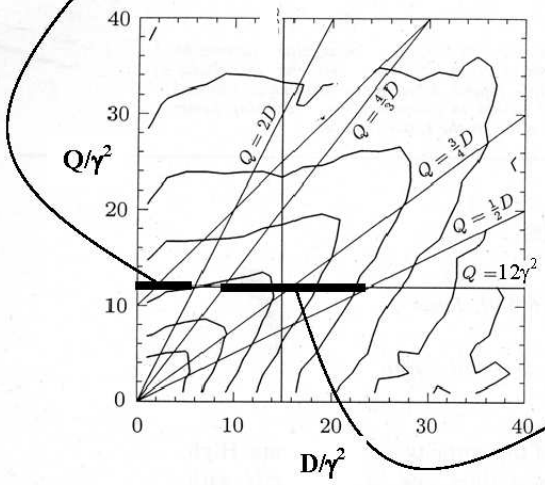


FIG. 2. Isosurface of the vorticity magnitude of $Q=12\gamma^2$ under the condition that (a) $Q/D>2$ and (b) $\frac{1}{2}<Q/D<\frac{4}{3}$.



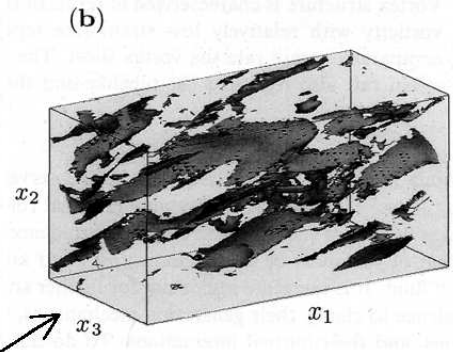


FIG. 1. Joint probability density function of the rate of strain squared $D=s_{ij}s_{ji}$ and the half of the vorticity squared $Q=\frac{1}{2}\omega_i\omega_i$. The contour levels are 2^{-7}, 2^{-9}, 2^{-11}, ..., 2^{-21}. There are 20 bins in each direction.

FIG. 6.18 – Visulalisation des tubes et des nappes de vorticité dans un écoulement turbulent numérique. L'écoulement à grande échelle est un cisaillement $\frac{\Delta U}{L} = \gamma$.

Chapitre 7

Propriétés statistiques des échelles de la turbulence

7.1 Introduction

Dans cette partie du cours nous allons nous intéresser quantitativement aux propriétés statistiques spatiales de la turbulence, en complétant la théorie de Kolmogorov évoquée dans le chapitre 4.

7.1.1 Différences à deux points

Pour définir une vitesse caractéristique d'une échelle donnée on construit la différence de vitesse entre deux points séparés d'une distance $\vec{\ell}$.

$$\boxed{\Delta_\ell \vec{u} = \vec{u}(\vec{x}+\vec{\ell}) - \vec{u}(\vec{x}),} \tag{7.1}$$

Cette différence de vitesse se décompose en trois composantes, la première est une différence longitudinale que nous noterons // (c'est la projection sur le vecteur unitaire $\frac{\vec{\ell}}{\ell}$).

$$\boxed{\Delta_\ell u_{//} = \Delta_\ell \vec{u}.\frac{\vec{\ell}}{\|\ell\|} = u_{//}(\vec{x}+\vec{\ell}) - u_{//}(\vec{x}),} \tag{7.2}$$

Les deux autres composantes sont des composantes transverses $\perp$ (ce sont les projections sur les vecteurs perpendiculaires à $\frac{\vec{\ell}}{\ell}$) qui par raison de symétrie présenteront des statistiques identiques. On ne parle donc que d'une seule composante transverse :

$$\Delta_\ell u_\perp = u_\perp(\vec{x}+\vec{\ell}) - u_\perp(\vec{x}), \tag{7.3}$$

Les moments statistiques d'ordre p des différences de vitesses s'appellent fonctions de structures d'ordre p. Les fonctions de structure longitudinales et transverses des différences de vitesse d'ordre p sont donc par définition :

$$< (\Delta_\ell u_{//})^p >= \frac{1}{N}\sum_i^N (\Delta_\ell u_{//}^{(i)})^p, \; < (\Delta_\ell u_\perp)^p >= \frac{1}{N}\sum_i^N (\Delta_\ell u_\perp^{(i)})^p, \tag{7.4}$$

où la variable aléatoire indicée i représente une réalisation au point $\vec{x}$ parmi l'ensemble des N réalisations. Les <> dénotent donc des moyennes spatiales et les fonctions de structures peuvent aussi dépendre du temps en plus de ℓ.

L'hypothèse $H1$ implique que la statistique, ici représentée par les moments d'ordre p de la fonction de structure longitudinale ne doit dépendre que de ν et $< \varepsilon >$ soit que :

$$< (\Delta_\ell u_{//})^p >= (< \varepsilon > \ell)^{p/3} F_p(\frac{\ell}{\eta}) \tag{7.5}$$

En vertu de la seconde hypothèse, les fonctions universelles F_p doivent tendre vers des constantes universelles C_p dans la gamme d'échelles inertielles où on doit avoir :

$$\boxed{< (\Delta_\ell u_{//})^p >= C_p(< \varepsilon > \ell)^{p/3}.} \tag{7.6}$$

La relation (7.6) constitue la généralisation de la théorie de Kolmogorov nommée K41. Elle prédit les relations autosimilaires en lois de puissances entre les échelles de mouvements turbulents.

7.1.2 Energie cinétique des fluctuations

Dans le cadre du formalisme décrit ci-dessus, à une échelle donnée ℓ, l'énergie cinétique (longitudinale) est en valeur moyenne donnée par le moment d'ordre 2 de la fonction de structure des différences de vitesse 7.6 :

$$< (\Delta_\ell u_{//})^2 >= C_2(< \varepsilon > \ell)^{2/3}. \tag{7.7}$$

Cette loi porte le nom de loi en $\frac{2}{3}$ de Kolmogorov. Son équivalence dans le domaine spectral est la célèbre loi en $-\frac{5}{3}$. On la retrouve aisément à partir de 7.7 par la correspondance qu'il y a entre le nombre d'onde k et l'échelle $\ell = \frac{2\pi}{k}$. Le spectre de l'énergie cinétique est la densité d'énergie cinétique par bandes de nombres d'ondes comprises entre k et $k + dk$:

$$\boxed{E_{//}(k) = C_1 < \varepsilon >^{2/3} k^{-5/3}.} \tag{7.8}$$

La constante C_2 se déduit de la constante C_1 par un calcul exact qu'on ne détaillera pas. On a avec une bonne approximation :

$$C_2 \approx 4C_1 \approx 2. \tag{7.9}$$

7.1.3 Asymétrie des fluctuations

Il existe un résultat exact provenant de l'équation de Navier Stokes moyennée reliant la fonction de structure d'ordre 2 à la fonction de structure d'ordre 3. Cette équation porte le nom d'équation de Kármán-Horwarth qui dans sa version intégrale est appelée équation de Kolmogorov :

$$\frac{3}{\ell^4}\int_0^\ell r^4 \frac{\partial}{\partial t} < (\Delta_r u_{//})^2 > dr = 6\nu \frac{\partial < (\Delta_\ell u_{//})^2 >}{\partial \ell} - < (\Delta_\ell u_{//})^3 > -\frac{4}{5} < \varepsilon > \ell \tag{7.10}$$

En turbulence statistiquement isotrope et stationnaire en énergie, le terme instationnaire dans le membre de gauche est nul. Dans la gamme d'échelles inertielles, les effets visqueux sont négligeables de sorte que Kolmogorov a pu donner la prédiction suivante :

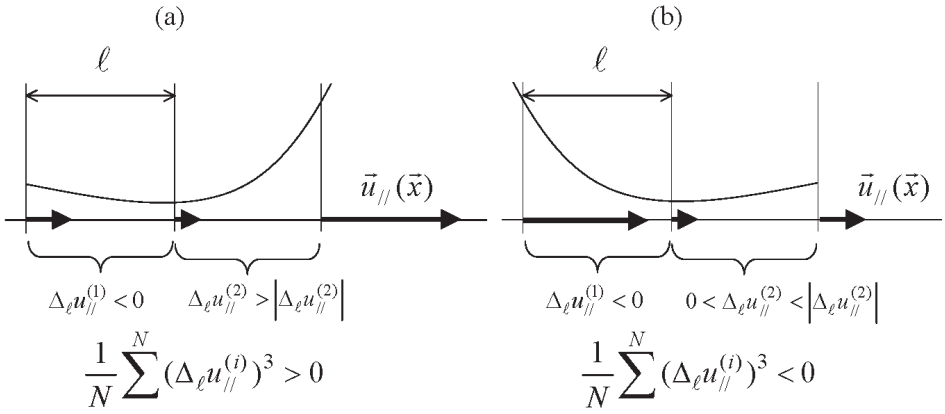


FIG. 7.1 – Champ de vitesse à asymétrie positive (a) et négative (b) des différences de vitesse. L'asymétrie négative (b) correspond à un champ contenant plus de gradients négatifs intenses que de gradients positifs.

$$\boxed{< (\Delta_\ell u_{//})^3 >= -\frac{4}{5} < \varepsilon > \ell.} \tag{7.11}$$

Cette loi, appelée loi des $\frac{4}{5}$ de Kolmogorov, annonce que dans la gamme inertielle, les fluctuations de vitesse à toutes échelles ℓ sont asymétriques. Cette asymétrie négative montre que statistiquement les gradients positifs de vitesse sont moins grands que les gradients négatifs de vitesse pris en valeur absolue (voir *figure 7.1*). Physiquement ceci montre que les éléments fluides subissent en moyenne des décélérations plus grandes que les accélérations.

On mesure le degré d'asymétrie (*skewness* en anglais) par le rapport :

$$S' = \frac{< (\Delta_\ell u_{//})^3 >}{< (\Delta_\ell u_{//})^2 >^{3/2}} \tag{7.12}$$

Dans la théorie de Kolmogorov 41, S' est une constante (indépendante de l'échelle ℓ) et qui s'exprime en fonction de la constante universelle C_2.

7.2 Comparaisons théorie/expérience : le problème de l'intermittence

Le succès de la théorie de Kolmogorov a été la vérification expérimentale de la loi en $k^{-5/3}$ du spectre de l'énergie cinétique 7.8. Cependant, avant de montrer les résultats expérimentaux nous devons expliquer la mise en oeuvre expérimentale permettant de mesurer le champ de vitesse dans l'espace.

7.2.1 Hypothèse de Taylor

Pour vérifier la théorie, on a besoin de faire des mesures spatiales $\vec{u}(\vec{x}, t_0)$ à un instant donné. La statistique réalisée dans tout l'espace fournirait ainsi des résultats directement comparables à la théorie. Cependant, cette mesure n'est toujours pas possible car il s'agit de résoudre une gamme d'échelles

spatiales s'étendant de la grande échelle L à la plus petite de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov. Le rapport entre ces échelles est donné en combinant 4.1 et 4.2 : $\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}$. Pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 1 million, $\frac{L}{\eta} \approx 30000$. La technique de vélocimétrie à images de particules serait la technique la plus adaptée car elle fournit des champs de vitesse instantanés. Cependant il faudrait avoir une caméra de résolution $30000 * 30000$ au minimum et actuellement la résolution des caméras est de l'ordre 2000*2000. En plus de ce problème de résolution, il y a le problème de l'homogénéité de l'écoulement sur la grande échelle. Il est en fait plus astucieux de réaliser une mesure de la vitesse en un seul point de l'écoulement (il n'y a donc plus de problème d'homogénéité spatiale) et de s'arranger pour que la mesure temporelle de vitesse obtenue soit équivalente à une mesure réalisée dans l'espace. La mesure temporelle doit avoir une très bonne réponse en fréquence et une intrusion peu perturbatrice à l'échelle de Kolmogorov. Le capteur répondant à ces critères existe depuis longtemps, c'est le fil (dans en gaz) ou film chaud (dans un liquide).

L'équivalence temps-espace peut être réalisée si on se place dans le cadre de l'hypothèse de Taylor. Cette méthode est applicable dans un écoulement statistiquement stationnaire où l'intensité turbulente $u' \equiv (\frac{2}{3}k)^{1/2}$ est faible devant la vitesse de l'écoulement moyen $\vec{U}$. Ainsi, dans le référentiel se déplaçant avec l'écoulement moyen, une sonde fixe dans le repère du laboratoire est animée d'une vitesse constante $-\vec{U}$ et traverse en ligne droite une turbulence *figée*. Dans ce cas la sonde réalise une mesure spatiale le long de la ligne qui est parallèle à la direction de l'écoulement moyen et on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{< (\Delta_\ell u_{//})^p >= \overline{(u_{//}(t) - u_{//}(t+\tau))^p},} \tag{7.13}$$

avec $\tau = \frac{\ell}{U}$. De la même manière, un spectre réalisé en un point sera équivalent à un spectre dans l'espace. La relation entre fréquences temporelles et spatiales est $f = kU$.

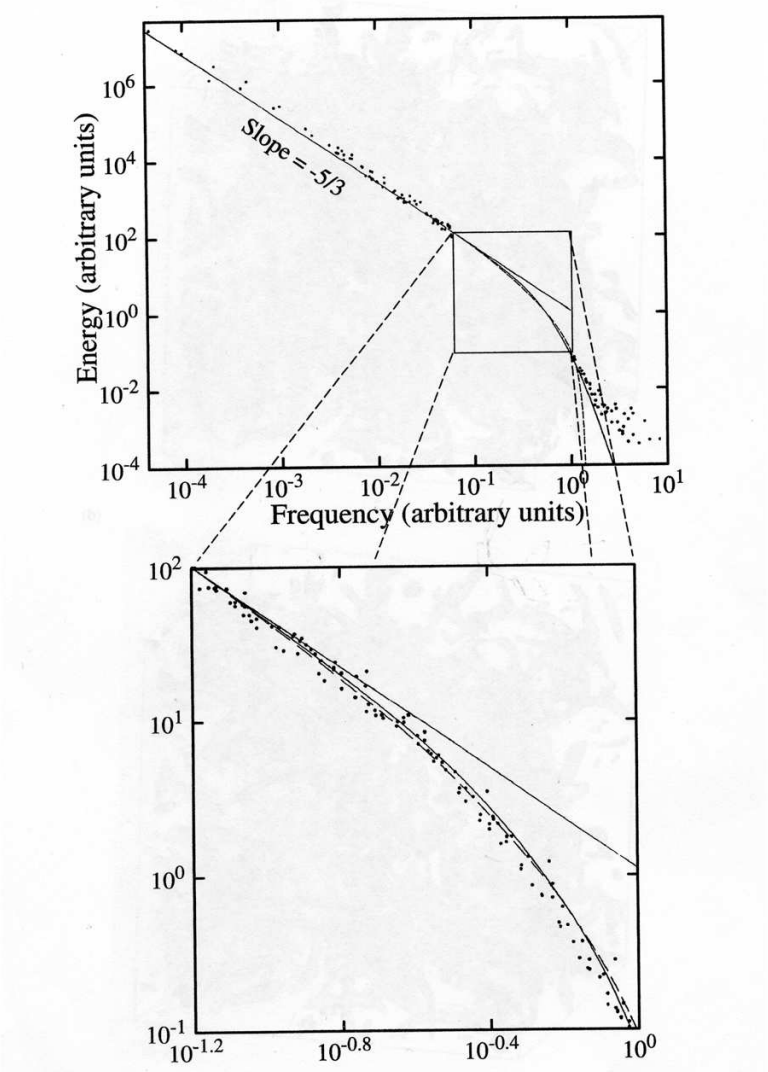
Techniquement, l'hypothèse de Taylor est réalisée dans les écoulements ouverts avec un fort écoulement moyen. On utilise un fil ou film chaud qui mesure essentiellement la composante de la vitesse suivant l'écoulement. On a donc une mesure de la vitesse longitudinale $u_{//}(t)$. Il suffit ensuite de réaliser des différences du signal temporel suivant 7.13 pour obtenir les fonctions de structures de la vitesse. Pour obtenir le spectre de l'énergie cinétique longitudinale, il faut simplement réaliser le spectre de puissance du signal de vitesse fournie par la sonde.

7.2.2 Spectre de l'énergie cinétique

La première réalisation expérimentale du spectre de puissance de la vitesse longitudinale en turbulence développée a été effectué en 1962. La sonde de vitesse a été immergé dans un canal (au Canada) où l'hypothèse de Taylor a été en partie assurée par la marée. Cette expérience dans un lieu naturel permet d'avoir une grande échelle de la turbulence proche d'une dizaine de mètres. Le spectre obtenu montré sur la *figure 7.2* présente effectivement une loi en puissance $-5/3$ couvrant une gamme d'échelles de 3 décades, vérifiant ainsi la prédiction de la loi des $\frac{5}{3}$ de Kolmogorov.

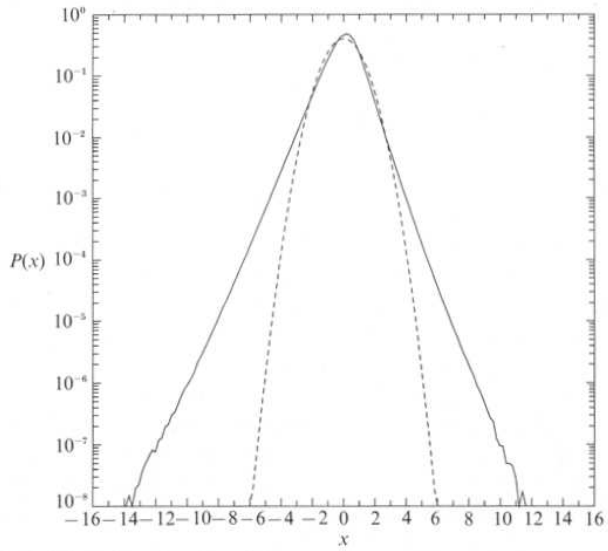
7.2.3 Lois d'échelles des fonctions de structures

On montre l'histogramme des différences de vitesse, $\Delta_\ell u_{//}$, sur la *figure 7.3* pour une échelle donnée proche de l'échelle de Kolmogorov. Cette histogramme (où fonction de densité de probabilité) représente le nombre de fois (où la probabilité) qu'un événement d'amplitude $\Delta_\ell u_{//}$ est réalisé. On voit nettement qu'il y a plus d'événements négatifs que positifs : c'est la vérification expérimentale



log–log plot of the energy spectrum in the time domain and enlargement of the beginning of the dissipation range for tidal channel data (Grant, Stewart and Moilliet 1962).

FIG. 7.2 – Mesure expérimentale du spectre de l'énergie cinétique longitudinale



Probability distribution of $\delta v_x(r) = v_x(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - v_x(\boldsymbol{x})$ for $r = 0.05$ (a dissipation scale), normalized so that $\sigma = 1$, shown together with a Gaussian distribution (dashed line).

FIG. 7.3 – Fonction de densité de probabilité de la variable $\Delta_\ell u_{//}$ mesurée dans une simulation numérique directe

de l'asymétrie négative (7.11). Pour vérifier les lois d'échelles prédite par la théorie de Kolmogorov, on réalise ces histogrammes à toutes les échelles, et on en calcule ses moments pour en déduire les fonctions de structure en fonction de ℓ. On ajuste ensuite sur chacune des fonctions de structures d'ordre p, des lois de puissance de la forme :

$$< (\Delta_\ell u_{//})^p >= C_p (< \varepsilon > \ell)^{\zeta_p}. \tag{7.14}$$

Que ce soit dans les expériences où les simulations numériques, les exposants ζ_p s'écartent significativement de la théorie de Kolmogorov pour $p > 4$ (voir *figure 7.4*).

Une explication de cette différence a été fournie par Obukov et Kolmogorov lui même en 1962. Dans La théorie (K41) on a supposé que le taux de transfert d'énergie n'est pas une variable aléatoire puisqu'on l'a pris comme étant $< \varepsilon >$ dans tout l'espace quel que soit l'échelle. Si on suppose maintenant que ce taux de transfert est une variable aléatoire dont la statistique dépend de l'échelle ℓ, un raisonnement semblable à celui qui avait mené à la relation 7.6 donnerait :

$$\boxed{< (\Delta_\ell u_{//})^p >= C_p < \varepsilon_\ell^{p/3} > \ell^{p/3}.} \tag{7.15}$$

Ce qui ouvre donc sur un autre question qui est de savoir quelle statistique pour ε ?

Il existe plusieurs modèles de distribution statistique de ε dont les plus célèbres sont le modèle multifractal (β), Log-normal (LN), modèle de hiérarchie statistique etc... Un inconvénient de ces théories statistiques c'est que même si elles reproduisent parfaitement les exposants des lois d'échelles, il manque à l'heure actuelle un lien physique avec la véritable structure de la turbulence. Ce dont on est

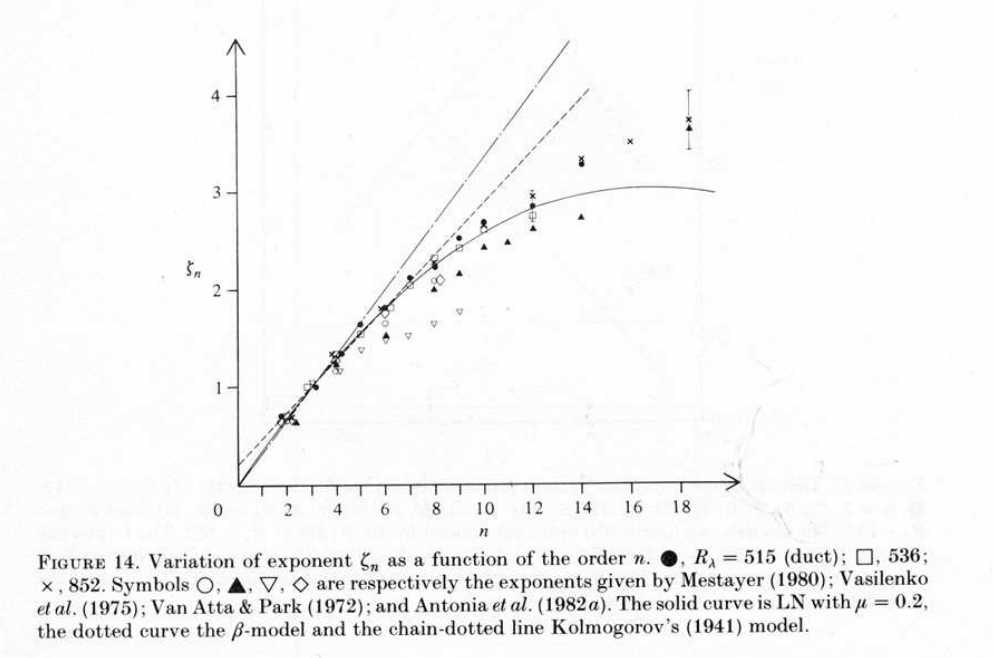


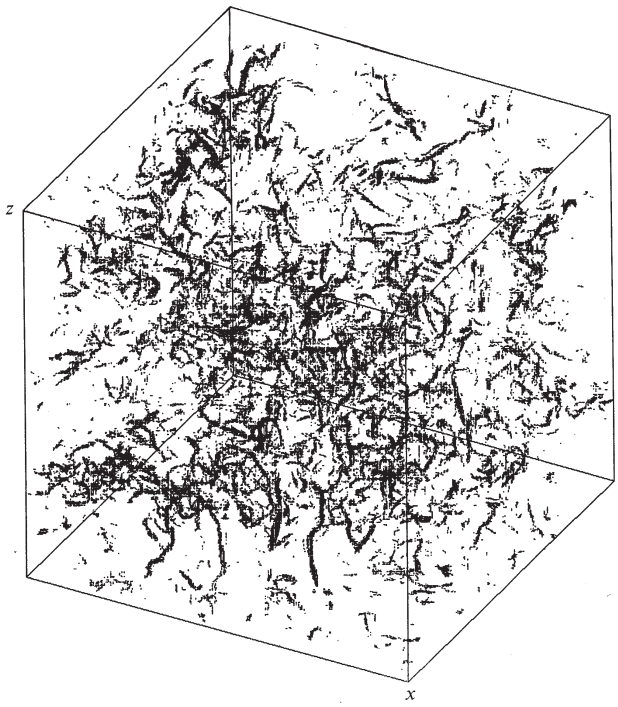
FIGURE 14. Variation of exponent ζ_n as a function of the order n. ●, $R_\lambda = 515$ (duct); □, 536; ×, 852. Symbols ○, ▲, ▽, ◇ are respectively the exponents given by Mestayer (1980); Vasilenko *et al.* (1975); Van Atta & Park (1972); and Antonia *et al.* (1982*a*). The solid curve is LN with $\mu = 0.2$, the dotted curve the β-model and the chain-dotted line Kolmogorov's (1941) model.

FIG. 7.4 – Exposants ζ_p des lois d'échelles 7.14 mesurés expérimentalement. Comparaison avec certains modèles : multifractal (β), Log-normal (LN) et la théorie de Kolmogorov (K41).

sûr, c'est que le taux de transfert de l'énergie n'est pas réparti de manière statistiquement homogène comme l'avait supposé (K41). C'est ce qu'on appelle le problème fondamental de l'intermittence. Pour comprendre l'origine physique de l'intermittence, les chercheurs ont étudié les structures de vorticité de la turbulence. Les simulations numériques (à partir de 1981) puis les expériences (à partir de 1991) ont montré qu'à petite échelle on pouvait trouver des événements rares mais extrémement intenses sortant totalement du cadre de la théorie K41. Ces structures sont des vortex (tubes de vorticité, voir figure *7.5*) ayant une taille de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov et ayant pour vitesse de rotation périphérique la vitesse à grande échelle de la turbulence ! Pour bien saisir l'intensité de ces structures il faut savoir que la vorticité attendue à cette échelle par K41 est $\omega_\eta \approx \frac{u_\eta}{\eta} = \frac{U}{L} Re^{1/2}$ alors que la vorticité des structures responsables de l'intermittence est $\omega_I \approx \frac{U}{\eta} = \frac{U}{L} Re^{3/4}$. On a donc :

$$\omega_I \approx Re^{1/4} \omega_\eta. \tag{7.16}$$

On a donc un facteur multiplicatif grand devant 1 entre la vorticité des structures intermittentes et celle attendue par K41.



View of the vorticity field, represented by a vector of length proportional to the vorticity amplitude at each grid point. Only vectors larger than a given threshold value are shown.

FIG. 7.5 – Structures intermittentes à petite échelle.

Chapitre 8

Conclusion

Pendant ce cours nous avons étudié des écoulements à grand nombre de Reynolds. Notre démarche a d'abord été de rappeler les implications d'un grand nombre de Reynolds au niveau de la dynamique non-linéaire du fluide. Nous avons introduit la notion de structures avec des exemples de répartitions spatiales de vorticité telles que les nappes et les tubes. Nous avons décrit la dynamique de ces structures en mettant en évidence des mécanismes de concentrations, de diffusion et d'équilibres entre ces deux mécanismes. Ces dynamiques sont des ingrédients essentiels qui consituent la base de connaissance indispensable pour comprendre les écoulements turbulents. Nous avons étudié la manière dont les écoulements transitent vers la turbulence et mis en évidence deux types de scenarii : les transitions brutales et les transitions par succession de bifurcations. Dans chaque cas on définit l'état turbulent développé lorsque il n'y a plus de bifurcations. A ce stade du cours, la turbulence proprement dite par une image picturale en terme de cascade d'énergie (Richardson) entre grandes et petites structures. Nous avons alors exposé la théorie de Kolmogorov. A l'aide d'une approche de décomposition (de Reynolds) du champ de vitesse en un champ moyen et un champ fluctuant, nous donnons quelques résultats analytiques basés sur des hypothèses physiques concernant des écoulements de parois et des écoulements libres. Cette approche qui est à la base de nombreux modèles numériques, ne peut constituer de véritable théorie de la turbulence car il y a un problème de fermeture des équations découlant tout naturellement du fait de la décomposition de Reynolds. Nous nous sommes ensuite intéressés aux différentes échelles du mouvement : à quoi correspondent-elles ?. A partir de des structures de vorticité nous avons mis en évidence des mécanismes de production de petites échelles. Le phénomène de l'intermittence qui ressort des mesures expérimentales et numériques montre que la turbulence est capable de produire des événements très énergétiques correspondant à des tubes de vorticité. Une théorie statistique satisfaisante de la turbulence doit donc faire le lien entre une approche statistique des échelles et la dynamique des structures qui est dictée par l'équation de Navier-Stokes.