



**HAL**  
open science

## Idiophones à plaque et à coque. Partie I. Instruments linéaires et faiblement non linéaires: entre cloches et steelpans

Olivier Thomas, Mélodie Monteil, Cyril Touzé

► **To cite this version:**

Olivier Thomas, Mélodie Monteil, Cyril Touzé. Idiophones à plaque et à coque. Partie I. Instruments linéaires et faiblement non linéaires: entre cloches et steelpans. *Musique & Technique*, 2016, 6, pp.34-50. hal-01338550

**HAL Id: hal-01338550**

**<https://ensta-paris.hal.science/hal-01338550>**

Submitted on 30 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Idiophones à plaque et à coque

## Partie I. instruments linéaires et faiblement non linéaires: entre cloches et steelpans

**O. Thomas**, enseignant-chercheur, Laboratoire de Mécanique des Structures  
et Systèmes Couplés (LMSSC), CNAM, Paris,

**M. Monteil et C. Touzé**, doctorante et enseignant-chercheur,  
Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, Palaiseau

Dans cet article, ainsi que le suivant, on s'intéresse aux idiophones à plaque et à coque. Cette famille englobe des instruments aussi divers que la cloche d'église, le bol tibétain, les divers types de gongs, les cymbales ou encore les plaques tonnerre, dont le corps sonore à la forme d'une plaque, plus ou moins épaisse et plus ou moins incurvée<sup>1</sup>. Le terme idiophone, du grec "idios" : soi-même et "phonos" : le son, désigne les instruments dont "le son est produit par la matière même de l'instrument, grâce à sa solidité et à son élasticité, sans qu'on ait recours à la tension de membranes ou de cordes" [1].

L'ensemble des idiophones étudiés dans ces deux articles a été séparé en deux familles, sur des critères de physique vibratoire, en distinguant les instruments dits *faiblement* non linéaires, pour lesquels la non-linéarité, bien que produisant des effets déjà audibles, est faiblement mise en jeu, des instruments *fortement* non linéaires, pour lesquels la physique vibratoire est beaucoup plus complexe. Le présent article se focalise sur les instruments de la première famille, dont le timbre, influencé par les non-linéarités, produit tout de même un son de hauteur tonale parfaitement perceptible. On y regroupe, entre autres, les grands gongs de Gamelan, dont le son présente des battements qui s'expliquent par des phénomènes non linéaires, les gongs d'opéra chinois, dont le timbre est caractérisé par des glissements fréquentiels, montant ou descendant selon la taille de l'instrument considéré, ou encore les steelpans, instruments de percussion mélodiques de Trinidad et Tobago, dont la brillance particulière du timbre est là encore d'origine non linéaire. Les instruments de la seconde famille, quand à eux, sont caractérisés par un son sans hauteur définie, extrêmement brillant et dont le contenu fréquentiel est très riche, ce qui s'explique par

des phénomènes non linéaires plus complexes. Ils sont traités dans la seconde partie de cet article, qui regroupe le cas de la plupart des cymbales, des gongs « tam-tam » chinois et des plaques tonnerre.

Dans cet article, nous utilisons le terme « résonateur » pour désigner le corps sonore des idiophones étudiés, c'est-à-dire la structure vibrante à l'origine du son. De manière générique, la production du son dans les idiophones est directement liée aux vibrations du résonateur, qui créent dans le milieu environnant des ondes acoustiques qui se propagent jusqu'aux oreilles des auditeurs. Dans cet article, nous laissons ce rayonnement acoustique de côté, pour nous concentrer sur les vibrations du résonateur. Leur connaissance est en effet suffisante pour caractériser le timbre de l'instrument, car la propagation dans le milieu environnant agit sur le son comme un filtre acoustique, parfaitement linéaire, qui ne change pas le timbre en profondeur. Considérer le rayonnement acoustique serait cependant nécessaire pour expliquer la directivité de l'instrument.

Le plan de cet article est le suivant. Tout d'abord, nous introduisons dans la première partie les notions fondamentales de mécanique des milieux minces (plaques et coques) nous permettant de comprendre l'origine de la non linéarité mise en jeu dans la physique vibratoire des idiophones. La seconde partie montrera les effets typiques que l'on peut attendre de tels systèmes non linéaires. Les résultats montrés au cours de ces deux premières parties sont donc communs à cet article et au suivant. Ensuite, trois instruments exemplaires par les phénomènes vibratoires mis en jeu seront considérés. On traitera ainsi dans la troisième partie le cas des cloches, dont les vibrations sont linéaires, pour bien comprendre les effets faiblement

1. On verra qu'une plaque incurvée est appelée une coque par les mécaniciens.

non linéaires introduits sur deux autres instruments : un gong viet-namien dans la quatrième partie et des steelpans dans la cinquième partie.

# 1 La mécanique des milieux minces

## 1.1 Des plaques et des coques



FIGURE 1: Photographies d'une cloche d'église et du gong viet-namien utilisé pour les mesures de cet article

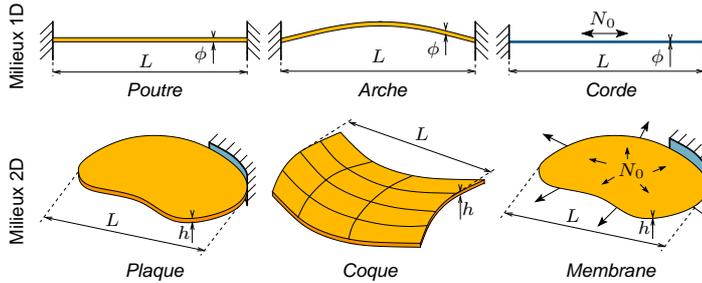


FIGURE 2: Les milieux minces

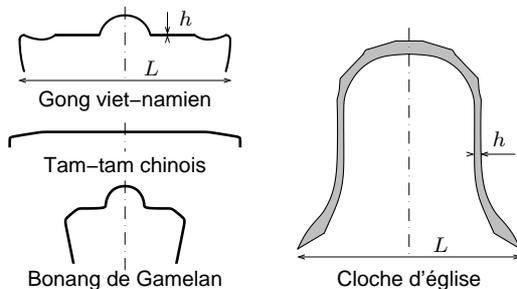


FIGURE 3: Profils de quelques idiophones à coque axisymétrique.

Les résonateurs des instruments de musique qui nous intéressent ici – deux exemples sont proposés sur la figure 1 – sont tous qualifiés de « milieux minces bidimensionnels » par les physiciens qui en étudient leur mécanique, car leur géométrie est assimilable à une surface à laquelle on a donné une épaisseur. Cette épaisseur est supposée faible devant les dimensions caractéristiques de la surface ( $h \ll L$  sur les figure 2 et 3). Dans ce texte, on s'intéresse aux deux familles de milieux minces appelés *plaques*, ceux dont la surface est plane, et *coques*,

ceux dont la surface est incurvée. Les tables d'harmonie de piano ou de guitare sont un bon exemple de plaques, celles des violons étant des coques. Parmi les idiophones, les plaques sont utilisées de manière plus anecdotique, par exemple comme élément principal – le résonateur – des scies musicales ou dans les plaques tonnerre. Ce dernier instrument est évoqué dans la seconde partie de cet article. En revanche, en grande majorité, les résonateurs d'idiophones sont des coques, comme les steelpans étudiés au paragraphe 5. Dans le cas des cloches, la géométrie du résonateur est particulière car elle présente une symétrie de révolution, c'est-à-dire qu'elle s'obtient en définissant un profil et en le faisant tourner autour d'un axe. Les cymbales et les gongs sont aussi des coques de révolution, mais ils présentent une épaisseur beaucoup plus faible. Des exemples de profils d'idiophones à symétrie de révolution sont donnés sur la figure 3.

On doit signaler que les mécaniciens définissent un troisième milieu mince bidimensionnel, les membranes, qui sont des plaques d'épaisseur très faible, soumises à une tension imposée par un dispositif externe. Comme les plaques et les coques, les membranes sont aussi très utilisées comme résonateur d'instrument de musique, que ce soit dans les membranophones (tambours, timbales... ) ou dans les banjos. Enfin, signalons aussi que ces trois familles (plaques, coques et membranes) ont leurs équivalents unidimensionnels : les poutres, les arches et les cordes. Ces éléments servent aussi de résonateurs d'instruments de musique.

## 1.2 Non-linéarité géométrique

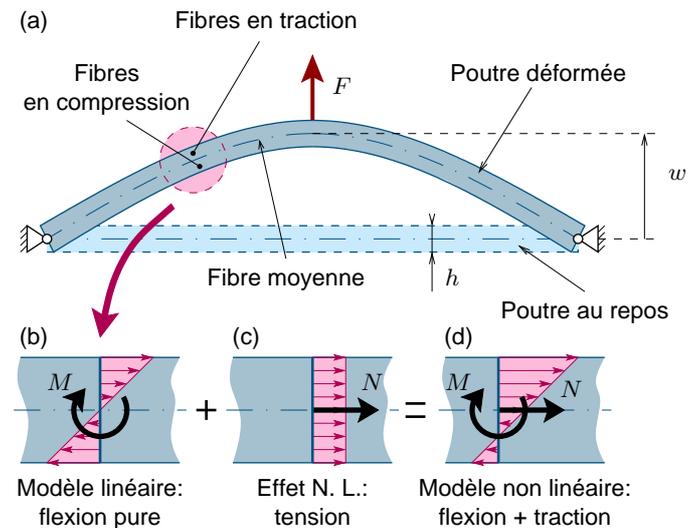


FIGURE 4: Poutre en flexion

Les non-linéarités à l'origine des phénomènes observés dans les idiophones se retrouvent dans toutes les structures minces (plaques, coques, poutres, cordes...) en vibration de grande amplitude. Pour les mettre en évidence, on considère pour simplifier une poutre articulée à ses deux extrémités, représentée sur la figure 4.

Lorsqu'on impose à la poutre de fléchir, par exemple en imposant une force transverse (notée  $F$  sur la figure 4), la structure résiste en allongeant les fibres supérieures, et en raccourcissant les fibres inférieures. Lorsque le déplacement transverse (noté  $w$ ) est petit devant l'épaisseur  $h$  de la structure, le chargement intérieur peut être considéré en première approximation comme symétrique, et la fibre moyenne (située au milieu de la section de la poutre) n'est pas chargée (Fig. 4(b)). Chaque section de la poutre est alors seulement soumise à un moment de flexion  $M$  : on dit qu'elle est en condition de flexion pure. De plus, le comportement global de la structure est linéaire : si on double l'intensité de  $F$ , le déplacement  $w$  est aussi doublé. La poutre est alors analogue à un ressort linéaire, dont l'allongement est proportionnel à la force qui le crée.

Sur la figure 4(a), il est assez clair que la configuration déformée de la poutre est plus longue que celle au repos. Ainsi, le fait de charger la poutre dans la direction transverse produit aussi un allongement de toute les fibres, qui est uniforme suivant l'épaisseur de la poutre (Fig. 4(c)). Toute section est alors soumise à la fois à de la flexion et de la tension (Fig. 4(d)). On peut montrer que cette tension additionnelle  $N$  est synonyme d'une augmentation de la raideur de la poutre. En effet, plus  $w$  augmente, plus les fibres de la poutre s'inclinent et plus elles sont capables de résister à  $F$  en opposant leur tension. Par suite, plus  $w$  augmente, plus la raideur de la poutre augmente, si bien que dans cette situation  $F$  est une fonction non linéaire de  $w$  : doubler  $F$  conduit à une augmentation du déplacement d'un facteur plus faible que deux, puisque la raideur a aussi augmenté. C'est cet effet qui est à la source des non-linéarités étudiées dans ce texte, qualifiées de « géométriques », puisqu'elles proviennent d'un effet purement géométrique d'inclinaison des fibres du milieu continu.

Cette effet non linéaire est négligeable pour les petites valeurs de  $w$  et doit être pris en compte lorsque  $w$  devient de l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $h$  de la structure. Autrement dit, le modèle linéaire décrit plus haut, qui ne considère que la raideur de flexion, n'est valable que pour les très faibles valeurs de  $w$ .

Dans le cas d'une structure bidimensionnelle comme

une plaque, le phénomène reste le même : un chargement transverse de la structure (comme un coup de mailloche, par exemple) crée des efforts non linéaires de tension dans la plaque, que l'on ne peut négliger à grande amplitude. Ces effets et un modèle mathématique en rendant compte ont été proposés en 1910 par Theodore von Kármán dans [2], travail à la base d'un nombre considérable d'études. Ce sont ces non-linéarités qui sont à la source des phénomènes décrits dans ce texte : pour les gongs et les cymbales, de géométrie très fine, en conditions normales de jeux, les déplacements sont de l'ordre de l'épaisseur du résonateur, ce qui crée les phénomènes non linéaires. Inversement, lorsque le résonateur est épais (c'est le cas des cloches d'église, par exemple), la raideur de flexion est très importante, si bien que pour des efforts d'excitation usuels, les déplacements de la structure ne sont pas suffisants pour que les non-linéarités aient des effets décelables.

### 1.3 Effet de courbure

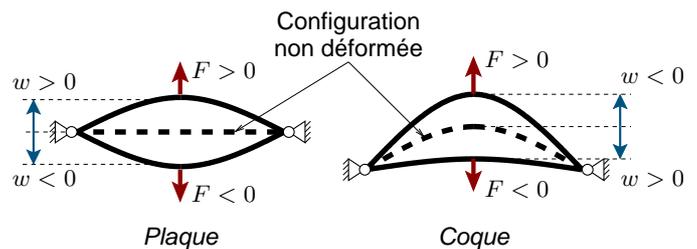


FIGURE 5: Vue en coupe d'une plaque et d'une coque déformées par un effort transverse  $F$ .

Le cas des plaques et des coques est légèrement différent, car la courbure des secondes est responsable d'une dissymétrie du comportement statique, illustrée par la figure 5. Dans le cas des plaques, le sens de l'effort transverse  $F$  n'a pas d'influence sur le comportement non linéaire, car dans les deux cas, qu'il soit dirigé d'un côté ou de l'autre de la plaque, il conduit à une augmentation de la tension dans la plaque qui se manifeste par le raidissement non linéaire évoqué au paragraphe précédent.

Dans le cas des coques, de manière schématique, un effort dirigé « du côté de la courbure » ( $F > 0$  sur la Fig. 5) va créer de la même manière que pour les plaques une augmentation de la tension dans la coque, en augmentant l'inclinaison des fibres, et ainsi se manifester par un effet raidissant. En revanche, un effort opposé ( $F < 0$ ) va diminuer l'inclinaison des fibres et ainsi créer des efforts de compression de la coque, qui vont résulter en une diminution de la raideur et ainsi un effet dit assouplissant.

La courbure est donc responsable d'un comportement statique non linéaire a priori différent pour une plaque et une coque. On verra au paragraphe 2.3.2 que cela a une incidence sur les vibrations non linéaire.

## 2 Comportements vibratoires généraux

Les phénomènes vibratoires peuvent être classés dans deux familles : les vibrations libres et les vibrations forcées. Les vibrations libres correspondent au cas où l'objet vibrant est déformé et/ou soumis à un choc à l'instant initial, puis laissé ensuite libre d'osciller, sous l'action d'aucun effort extérieur. Le fonctionnement des instruments de percussion appartient en général à cette famille. Dans le cas des vibrations forcées, l'objet vibrant est entretenu en vibration par une force extérieure, soit oscillante (on parle alors de vibrations entretenues), soit stationnaire (on parle d'auto-oscillations). Les instruments à vent ainsi que les instruments à cordes frottées appartiennent à cette famille. En laboratoire, on utilise souvent les vibrations forcées pour réaliser les expériences, en imposant une force dont on contrôle l'évolution temporelle (bruit, sinusoïde, ...). Cela permet de mesurer la réponse fréquentielle d'un objet, ses modes de vibrations, ou sa réponse non linéaire, de manière souvent plus commode qu'en vibrations libres.

### 2.1 Modes propres

L'étude des vibrations se fait à partir des modes propres de la structure vibrante étudiée. Un mode propre est constitué d'une fréquence propre et d'une déformée modale. Une structure vibrante donnée possède théoriquement une infinité de modes propres, qui sont caractéristiques de cette structure, indépendamment des conditions d'excitation. Ils dépendent de son matériau, de sa géométrie (et donc de sa raideur et de sa masse) et des connections de cette structure avec le milieu environnant (les conditions aux limites). Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'article [4].

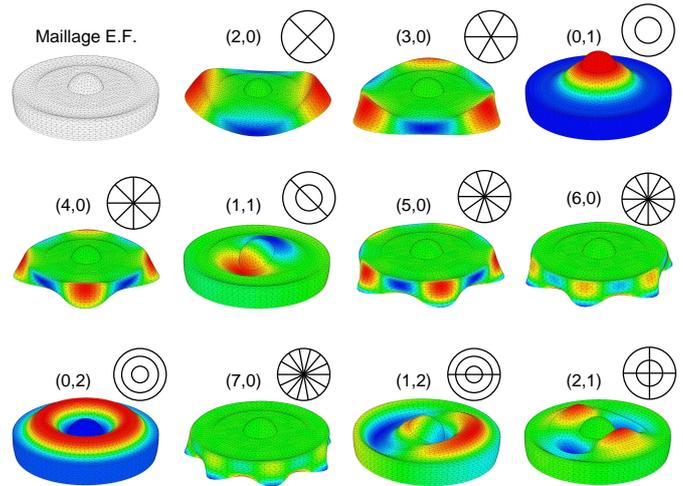


FIGURE 6: Déformées modales du gong de la figure 1, rangées par ordre de fréquence croissante et obtenues par un calcul numérique par la méthode des éléments finis, avec le code de calcul Cast3M [3]. Pour chaque mode, le diagramme symbolise, en vue de dessus, les  $k$  diamètres et  $n$  cercles nodaux du mode  $(k, n)$ .

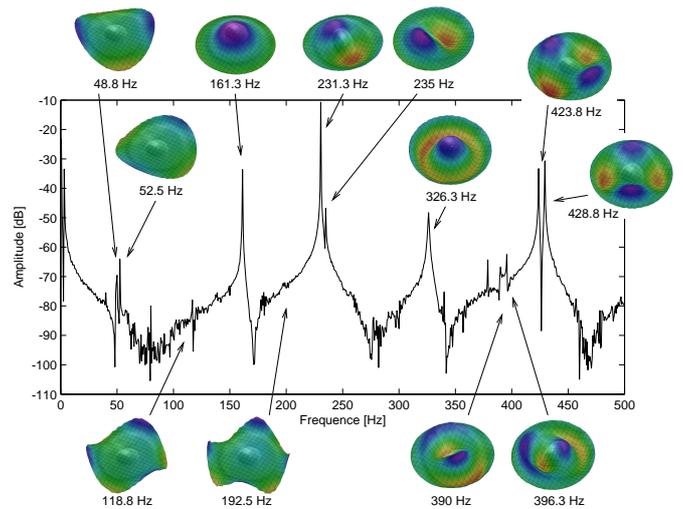


FIGURE 7: Fonction de réponse en fréquence expérimentales du gong de la figure 1, au point d'excitation, situé au milieu de la partie plane du profil, proche du bord. Fréquences propres et déformées modales expérimentales, obtenues par vibrométrie laser.

Dans le cas des résonateurs à symétrie de révolution, les modes possèdent quelques propriétés remarquables. Les lignes nodales de chaque déformée modale forment un ensemble de cercles concentriques, centrés sur l'axe de symétrie, et de lignes diamétrales, qui coupent l'axe de symétrie. On indique par le couple  $(k, n)$  le nombre  $k$  de diamètres nodaux et le nombre  $n$  de cercles nodaux de chaque mode. Par suite, on regroupe les modes suivant deux familles. La première est constituée des modes

$(0, n)$  *axisymétriques*, dont les déformées modales ne possèdent aucun diamètre nodal, si bien que leur motif de déformation est axisymétrique. La seconde est constituée des modes *asymétriques*, dont les déformées modales possèdent au moins un diamètre nodal ( $k \geq 1$ ). Un exemple est proposé sur les figures 6 et 7, qui montrent quelques déformées modales et fréquences propres du gong de la figure 1, obtenues par calcul numérique et par analyse modale expérimentale. Dans ce dernier cas, la courbe de la figure 7 est obtenue en forçant la structure avec un effort approprié qui contient toutes les fréquences (un sinus glissant dans ce cas) et les déformées modales sont le résultat, aux résonances, d'un balayage spatial de la structure au moyen du vibromètre laser. On peut remarquer que la comparaison calcul/expérience est remarquable, que se soit sur la géométrie des déformées modales ou sur leur ordre d'apparition dans le spectre. Les modes axisymétriques  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$  apparaissent aux fréquences 161.3 Hz et 326.3 Hz et les autres sont asymétriques.

Une particularité des modes asymétriques est qu'ils apparaissent par paire dans le spectre : les deux modes de chaque paire comportent théoriquement la même fréquence propre et leurs déformées modales sont identiques à une rotation de  $\pi/(2k)$  près autour de l'axe de symétrie,  $k$  étant le nombre de diamètres nodaux. En pratique, cette symétrie est légèrement brisée, les paires de modes se trouvant avec des fréquences propres distinctes mais toutefois très proches. Par exemple, la première paire de modes asymétriques – les modes  $(2, 0)$  – est visible aux fréquences 48.8 Hz et 52.5 Hz (qui correspondent aux deux premières résonances) et la symétrie des déformées modales est clairement visible, sur la figure 7.

## 2.2 Vibrations linéaires

Dans ce paragraphe, on s'intéresse brièvement aux principaux phénomènes vibratoires observés lorsque l'amplitude des vibrations du résonateur est suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les non-linéarités. En vibrations libres, lorsqu'on frappe une structure vibrante, par exemple à l'aide d'une mailloche, les déformations de la structure en fonction du temps sont la combinaison des déformées modales, chacune étant animée d'une oscillation amortie à la fréquence propre du mode considéré. L'énergie initiale communiquée à la structure par la frappe de la mailloche s'est ainsi répartie entre les modes. On dit que dans ce cadre linéaire, les modes sont indépendants, car l'amplitude de leurs oscillations ne dépend que de l'énergie initiale qui leur a été communiquée.

En vibrations forcées, le phénomène principal qui est

observé est la résonance. Lorsque la structure vibrante est entretenue en vibration, par exemple par une force sinusoïdale en fonction du temps, l'amplitude des vibrations devient très grande lorsque la fréquence de forçage est proche de l'une des fréquences propres. Le motif de déformation de la structure est alors très proche de la déformée modale associée à la résonance considérée, qui oscille de manière sinusoïdale à la fréquence du forçage. Cela est illustré sur la figure 7, chaque pic de la courbe correspondant à une résonance du gong de la figure 1.

## 2.3 Vibrations non linéaires

### 2.3.1 Comportement non linéaire unimodal

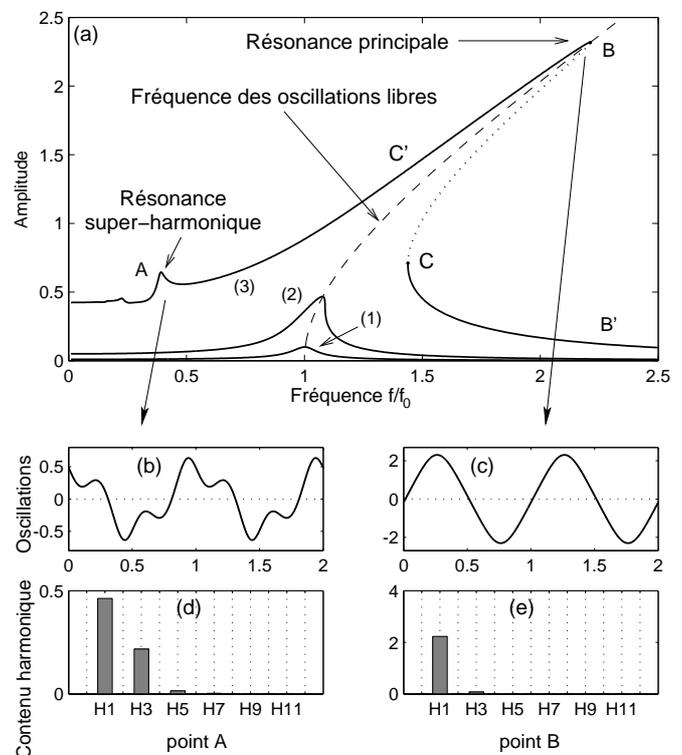


FIGURE 8: Réponse non linéaire au voisinage d'une résonance. (a) Amplitude du mouvement en fonction de la fréquence de forçage  $f$  ( $f_0$  est la pulsation propre du mode considéré), obtenue par un balayage en fréquence avec une amplitude de forçage constante. (1), (2), (3) : faible, moyenne et grande amplitude de forçage. (b), (c) : forme des oscillations en fonction du temps, aux points A et B. (d), (e) : contenu fréquentiel correspondant. Courbes obtenues par continuation de solutions périodiques d'un oscillateur de Duffing [5].

Pour bien comprendre les effets non linéaires observés lorsqu'on ne néglige plus les non-linéarités, on s'in-

téresse tout d'abord aux oscillations forcées d'un résonateur, sous l'action d'un effort sinusoïdal, au voisinage d'une de ses fréquences propres. Lorsque l'amplitude du forçage est faible (courbe (1) de la figure 8(a)), on observe une résonance linéaire. En revanche, lorsque l'amplitude du forçage est plus grande (courbe (2) et (3)), l'allure générale de la réponse en fréquence s'incurve. Précisément, plusieurs caractéristiques fondamentalement non linéaires sont observées.

- L'incurvation de la courbe et, par suite, la fréquence de résonance, sont des fonctions de l'amplitude du forçage.
- Pour une amplitude de forçage suffisante, il apparaît une plage fréquentielle où plusieurs amplitudes vibratoires du système coexistent. Dans cette zone, le système a le choix entre deux solutions possibles pour vibrer : l'une de grande amplitude et l'autre de faible amplitude. Le troisième choix, intermédiaire entre les deux, est instable, c'est-à-dire qu'il peut être calculé mathématiquement, mais ne peut pas être observé en pratique (c'est la courbe en pointillés entre les points  $B$  et  $C$  sur la figure 8). En pratique, lorsque le système est soumis à un balayage fréquentiel, des phénomènes de saut entre les deux solutions sont observés. Avec un balayage croissant, un saut d'amplitude de  $B$  vers  $B'$  est observé, alors qu'en balayage décroissant, c'est un saut d'amplitude croissante, de  $C$  vers  $C'$ , qui est observé.
- Des résonances secondaires peuvent être observées, au voisinage de fréquences multiples et sous multiples de la fréquence propre. La résonance super-harmonique (au point  $A$  de la figure 8(a)) apparaît par exemple au voisinage du tiers de la fréquence propre ( $f/f_0 \simeq 1/3$ ).
- Enfin, si le signal de forçage est parfaitement sinusoïdal, les oscillations sont toujours périodiques, mais plus parfaitement sinusoïdales, car elle contiennent des harmoniques de leur fréquence fondamentale. Ce phénomène de distortion harmonique est illustré sur les figures 8(b-e). Des régimes de vibration plus complexes peuvent aussi être observés pour des amplitudes de forçage plus forts, sous la forme de régimes quasi-périodiques ou chaotiques. Ces cas sont étudiés dans la seconde partie de cet article.

En vibrations libres, des phénomènes analogues sont observés. Primo, la fréquence des oscillations libres d'un

mode donné, qui est invariablement la fréquence propre en vibrations linéaires, est maintenant une fonction de l'amplitude du mouvement. La courbe correspondante est tracée en pointillés sur la figure 8(a). Secundo, on observe aussi un phénomène de distorsion harmonique.

Les comportements décrits dans ce paragraphe sont une extension de comportements modaux linéaires au domaine non linéaire. Cette généralisation n'est pas simple d'un point de vue théorique, car l'indépendance des modes évoquée pour les vibrations libres linéaires n'est plus vraie en non linéaire. Il est toutefois possible de définir le concept de mode non linéaire [6, 7, 8], qui permet de prédire de manière rigoureuse le comportement modale d'un résonateur en vibration non linéaire, tel que celui illustré sur la figure 8.

### 2.3.2 Raidissant ou assouplissant ?

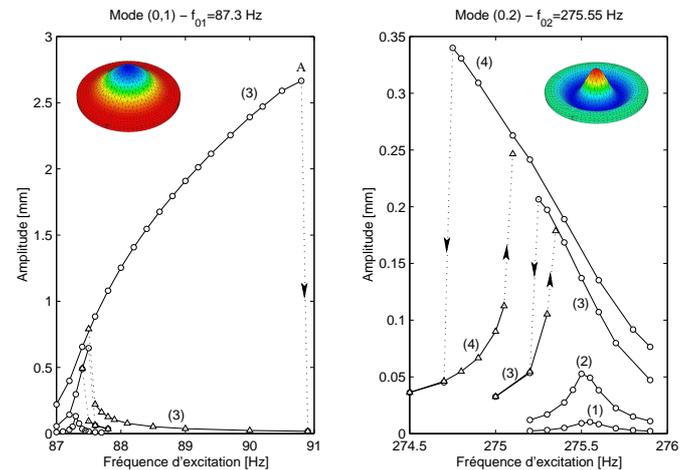


FIGURE 9: Courbes de résonance des deux premiers modes axisymétriques d'un tam-tam. Les courbes de même numéro correspondent au même forçage : courbe (1) :  $13.10^{-3}$  N, (2) :  $64.10^{-3}$  N, (3) : 0.25 N et (4) : 0.51 N. Les 'o' se rapportent aux branches obtenues en balayage à fréquence croissante et les 'Δ' aux balayages à fréquences décroissantes. Expériences extraites de [9].

La figure 9 montre des courbes de résonances des deux premiers modes axisymétriques d'un tam-tam chinois, dont le profil est donné sur la figure 3, de diamètre extérieur 640 mm. Ce tam-tam est étudié plus en détail, en conditions normales de jeux, dans l'article suivant. Les courbes ont été obtenues en l'excitant avec une force sinusoïdale d'amplitude constante, appliquée au centre, en faisant varier pas à pas la fréquence d'excitation autour des résonances des deux premiers modes axisymétriques. La réponse du système correspond globalement à celle décrite au paragraphe précédent. Les phénomènes de saut

sont clairement visibles, ainsi que les fréquences de résonance qui dépendent de l'amplitude du forçage.

On peut voir ici que la direction d'incurvation des résonances dépend du mode considéré. Ainsi, le premier mode est dit raidissant, car sa fréquence de résonance augmente en fonction de l'amplitude. Le second mode est quand à lui assouplissant, car sa fréquence de résonance diminue lorsque l'amplitude augmente. D'un point de vue théorique, le caractère assouplissant ou raidissant d'un mode donné est influencé par la courbure initiale de la structure et la déformée du mode considéré, ce qui s'explique à partir du comportement statique expliqué au paragraphe 1.3. Comme on s'intéresse au comportement vibratoire du résonateur, il faut observer celui-ci pendant une période d'oscillation, où le déplacement  $w$  de la figure 5 est alternativement positif et négatif. Si le résonateur est une plaque, dépourvue de courbure, alors tous les modes sont raidissants. En revanche, dans le cas d'une coque, l'alternance, durant une oscillation, entre les comportements *statiques* raidissant (pour  $w > 0$ ) et assouplissant (pour  $w < 0$ ) donne un comportement *vibratoire* assouplissant ou raidissant, selon la courbure initiale de la coque et la déformée modale du mode. Ces comportements, mis en évidence ici sur un tam-tam, sont analogues à ceux qu'on pourrait mesurer sur un gong d'opéra chinois, qui permettent d'expliquer les glissements fréquentiels clairement audibles dans leur timbre [10].

### 2.3.3 Couplages modaux

Ordre 2 ( <i>quadratique</i> )		Ordre 3 ( <i>cubique</i> )	
		1:1	$f_2 \simeq f_1$
1:2	$f_2 \simeq 2f_1$	1:3	$f_2 \simeq 3f_1$
1:1+1	$f_3 \simeq f_1 + f_2$	1:1+2	$f_3 \simeq f_1 + 2f_2$
		1:1+1+1	$f_4 \simeq f_1 + f_2 + f_3$

TABLE 1: Quelques relations de fréquences donnant lieu à des résonances internes

Alors que le paragraphe précédent a illustré des comportements non linéaires conditionnés par simplement un mode de vibration, des comportements plus complexes où plusieurs modes échangent de l'énergie sont aussi observés. Ils apparaissent lorsque des relations de fréquences propres particulières, résumées dans le tableau 1, sont vérifiées.

Par exemple, lorsqu'un mode a une fréquence propre voisine du double de celle d'un autre mode, une excitation forcée sinusoïdale au voisinage d'une des fréquences

propre produit une réponse de la structure où les deux modes oscillent à des amplitudes voisines, alors que dans un cadre linéaire, seul le mode directement excité devrait répondre. En vibrations libres, si l'excitation initiale transmet principalement de l'énergie à l'un des deux modes, des échanges d'énergie entre les modes sont observés et le second se retrouve à osciller là encore avec une amplitude voisine du premier. Ce type de résonance est illustré au paragraphe 5 pour le steelpan. Cette résonance interne particulière est noté symboliquement 1:2, pour signifier que les deux fréquences propres sont telles que  $f_2 \simeq 2f_1$  ( $f_2$  est proche du double de  $f_1$ ). D'autres résonances internes, ainsi que leur symboles, sont indiquées dans le tableau 1.

Il est remarquable de noter que le mécanisme qui conduit à ces couplages modaux est purement fréquentiel, c'est-à-dire qu'il n'apparaît que si les relations de fréquences du tableau 1 sont vérifiées. Il n'est ainsi pas rare d'observer des échanges d'énergies entre modes dont les déformées modales sont radicalement différentes. Des exemples de résonances 1:1+1 entre un mode axisymétrique et deux modes asymétriques d'un tam-tam chinois sont proposés dans l'article suivant.

Enfin, signalons que les couplages non linéaires liés aux résonances « quadratiques » du tableau 1 sont une conséquence directe de la dissymétrie de comportement non linéaire évoquée au paragraphe 1.3, si bien qu'ils ne sont observés que lorsque le résonateur est courbé, dans le cas des coques. Les résonances « cubiques » en revanche, sont susceptibles d'être observées dans tous les milieux minces, et donc en particulier dans les plaques. L'article suivant montrera que la présence de ces résonances internes est un facteur favorisant les transitions vers des régimes de vibrations chaotiques, caractéristiques des sons de cymbales.

Au cours de ces deux premières parties, nous avons défini la non-linéarité géométrique et avons montré qu'elle était responsable de comportements non linéaires observés dans les idiophones à plaque et à coque. Les effets principaux ont été introduit : dépendance – raidissante ou assouplissante – des fréquences de vibration avec l'amplitude, distorsion harmonique et couplages entre modes. La suite de l'article est dévolue à montrer comment ces phénomènes sont observables dans le comportement vibratoire de quelques instruments, et quelles en sont les conséquences sur leur timbre. Trois cas de figures sont étudiés : un instrument linéaire, la cloche d'église ; puis un instrument présentant un couplage faiblement non linéaire créant des battements (le gong viet-namien) ; en-

fin, un instrument mélodique faiblement non linéaire où les échanges d'énergie entre modes accordés sont directement responsable de son timbre : le steelpan.

### 3 Idiophones linéaires : les cloches

Le cas des idiophones à comportement linéaire est ici brièvement évoqué. D'un point de vue auditif, les fréquences propres sont capitales dans les instruments de percussion linéaires, car elles correspondent au contenu fréquentiel du spectre du son de l'instrument. En effet, comme on l'a vu, lorsque le résonateur est mis en vibration à la suite d'un choc, l'énergie est répartie entre les modes, qui se mettent à osciller en fonction, à leur fréquence propre. Lorsque les vibrations sont entendues par un auditeur, chaque mode est ainsi perçu comme un son pur, à la fréquence propre du mode considéré.

Ce principe est directement mis à profit dans les instruments mélodiques, où les résonateurs sont soigneusement accordés. Pour les idiophones qui concernent ce texte, la seule latitude d'accord qu'a le facteur est de modifier la géométrie du résonateur. C'est ce qui est fait notamment pour les cloches d'église, dont le profil – en épaisseur et en forme (Fig. 3) – est soigneusement défini pour accorder les fréquences des cinq premiers partiels, dont les rapports de fréquences sont en général choisis pour réaliser un accord mineur. Un accord fin est réalisé par tournage après que la première étape de fonderie ait été réalisée [11, 12].

Le timbre d'un idiophone linéaire est ainsi conditionné essentiellement par les fréquences propres du résonateur, qui imposent la valeur des fréquences présentes dans le timbre de l'instrument, qui sont une signature perceptive très forte de l'instrument. Il peut arriver parfois que des battements soient audibles pour certains instruments. Cela ne veut pas dire pour autant que le comportement soit non linéaire : il suffit pour cela que deux modes soient de fréquences très proches. Cela arrive notamment pour les structures à symétrie de révolution, où tous les modes asymétriques apparaissent par paire de fréquences voisines dans le spectre, comme expliqué au paragraphe 2.1, ce qui produit des battements. Cela s'entend notamment avec certaines cloches d'églises, et dans certains bols et cloches tibétaines. A titre d'exemple, le gong de la figure 1 a une géométrie théoriquement axisymétrique et ses déformées modales asymétriques apparaissent par paires de fréquences légèrement différentes sur la figure 7. En le frappant sur le bord, pour exciter principalement les modes asymétriques, des battements

entre ceux-ci sont clairement audibles.

### 4 Un instruments quasi linéaire : le gong accordé

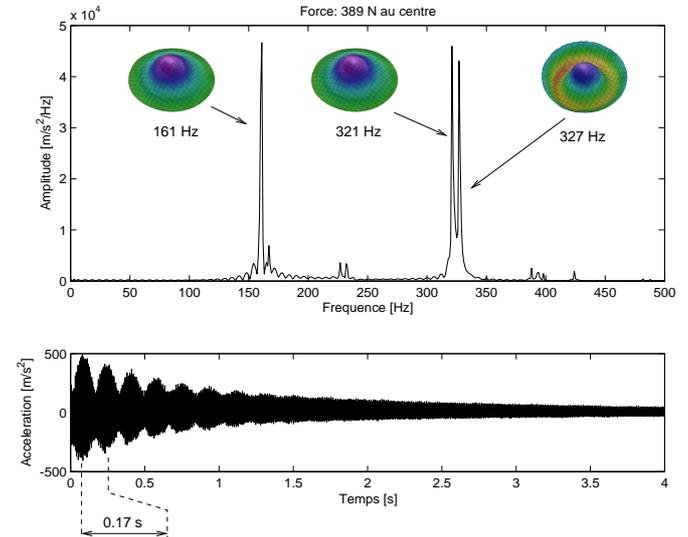


FIGURE 10: Spectre et évolution temporelle du signal d'accélération au centre du gong de la figure 1, lors d'une frappe d'intensité moyenne au centre.

Certains travaux récents [13] montrent que les grands gongs asiatiques, et notamment ceux utilisés dans le Gamelan javanais, sont sujets de battements dans leur timbre, dont l'origine est non linéaire. Dans ce texte, on illustre ce phénomène sur le gong viet-namien représenté sur les figures 1 et 3, qui possède les mêmes propriétés que les gongs de Gamelan.

La forme de ces instruments est toujours celle d'un disque circulaire au bord fortement recourbé, muni d'un dôme au centre. Ils sont en général joués en les frappant au centre, sur le dôme, au moyen d'une mailloche. Cela a pour effet de transmettre l'énergie principalement vers les modes axisymétriques, dont l'amplitude est par suite prépondérante dans le timbre de l'instrument. Les deux premiers modes axisymétriques sont accordés à l'octave l'un de l'autre, pour obtenir un timbre harmonique et une hauteur tonale franche. Sans non-linéarité, le timbre de l'instrument ne devrait contenir que deux raies quasiment harmoniques, l'une à  $f_1$ , la fréquence propre du premier mode axisymétrique et l'autre à  $f_2$ , celle du second (éventuellement, les fréquences des autres modes axisymétriques, plus haut dans le spectre).

Avec les non-linéarités, et comme on l'a vu, chaque

mode mis en vibration en régime libre oscille avec de la distorsion harmonique, si bien que dans le cas du gong, le timbre est composé en basses fréquences des deux raies aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , et d'une troisième à  $2f_1$ . Les battements du timbre peuvent s'expliquer par un léger désaccord d'un mode par rapport à l'autre, si bien que la composante fréquentielle à  $2f_1$  est proche de celle  $f_2$ , ce qui crée les battements, à une période  $T = 1/(f_2 - 2f_1)$ . La figure 10, obtenue au laboratoire sur un gong viet-namien, illustre cela. Les battements sont clairement visibles sur l'évolution temporelle de l'accélération et la troisième raie fréquentielle à  $2f_1$  est aussi bien identifiée. Dans ce cas, on a  $2f_1 \simeq 321$  Hz et  $f_2 \simeq 327$  Hz, ce qui donne bien comme période de battement  $T \simeq 1/6 = 0.17$  s.

On aurait pu imaginer, en observant simplement le spectre en vibrations libres de la figure 10, être en présence d'un phénomène de battements linéaires, si un mode propre avait eu sa fréquence au voisinage de  $2f_1 \simeq 321$  Hz. Cela n'est pas le cas, comme le montrent les analyses modales des figures 6 et 7.

## 5 Un instruments faiblement non linéaires : le steelpan

### 5.1 Origine et description



FIGURE 11: Quelques instruments composant un steelband et steelpan en conditions de jeu.

	Nombre de notes	Nombre de fûts	Registre
Tenor	28 à 30	1	soprano
Double Tenor	32	2	mezzo soprano
Double second	38	2	alto
Double guitar	20	2	tenor
Tri guitar	24	3	baryton
Quadrophonic	36	4	baryton
Cello	28	4	baryton
Tenor bass	20	4	bass
Six bass	18	6	bass

TABLE 2: Dénomination et registre de quelques steelpans

Le steelpan est l'un des derniers instruments acoustiques à avoir été inventé. Il est né dans les années 1940,

sur l'île de Trinidad et Tobago dans les Antilles, suite à une longue période coloniale dont la politique culturelle interdisait les pratiques musicales [14, 15].

C'est une percussion mélodique fabriquée à partir de bidons métalliques emboutis et façonnés, pour les transformer en une cuve principale contenant différents dômes finement accordés par martelage, chaque dôme correspondant à une note. Le musicien, appelé *pannist*, frappe les dômes à l'aide de *sticks*, qui sont des baguettes de bois recouvertes d'une pièce de caoutchouc à leur extrémité. Le steelpan est un instrument chromatique qui permet l'interprétation de répertoires musicaux variés allant du calypso (musique traditionnelle de Trinidad) à la musique savante en passant par le jazz et les « musiques du monde ».

Il existe des steelpans de différents registres qui constituent des ensembles, organisés à la manière d'orchestres symphoniques, appelés *steelbands* (Fig. 11). Plus la note d'un steelpan est grave, plus le dôme correspondant occupe de l'espace à l'intérieur de la cuve. Ainsi, afin de conserver le chromatisme de l'instrument et de couvrir plusieurs octaves, les steelpans les plus graves sont constitués de plusieurs bidons. Certains sont répertoriés dans le tableau 2.

### 5.2 Fabrication et accordage

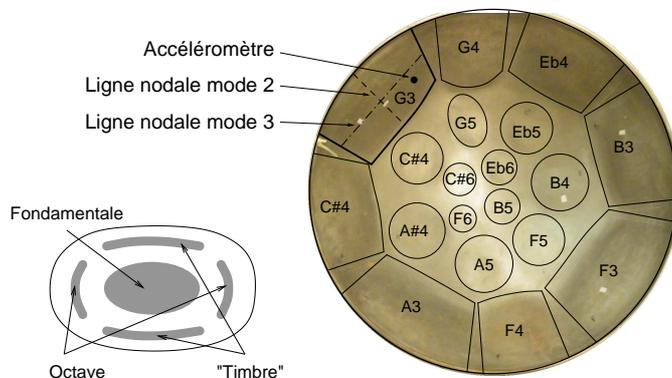


FIGURE 12: *Pattern* (organisation des notes) du steelpan étudié : *double second* - fût à main droite. Localisation de la note étudiée : G3. Diagramme montrant les position, de martelage pour l'accord des trois partiels (fondamentale, octave et timbre) d'une note.

Lors de la facture des steelpans, le *tuner* procède à une succession de transformations. Il commence par emboutir la surface supérieure du fût, initialement plane, pour obtenir une cuve concave. Il dessine l'emplacement des futures notes à l'aide de gabarits dont les dimensions, adaptées à la taille des notes, sont relativement standardisées. Il vient ensuite marteler, puis poinçonner entre ces espaces pour faire ressortir la convexité des dômes. Le fût

est ensuite chauffé, avant l'accordage fin des notes où le *tuner* prend soin, pour chaque note, d'ajuster un ensemble de partiels en martelant différentes zones du dôme. Généralement, un *tuner* accorde les trois premiers partiels : le premier à la fréquence fondamentale ( $f$ ) en jouant sur la hauteur du centre du dôme, le second à l'octave ( $2f$ ) en martelant deux bords opposés du dôme et le troisième pour ajuster le timbre à une fréquence multiple supérieure non systématique ( $3f, 4f, \dots$ ) en modelant les deux bords restant (Fig. 12 et [16]). C'est donc en modifiant la géométrie du dôme qu'il maîtrise l'accord et le timbre de la note.

La répartition des notes à l'intérieur du fût, aussi appelée *pattern*, est faite de manière concentrique : plus les notes sont aiguës, plus elles sont placées au centre de l'instrument (Fig. 12). Dans la plupart des cas, une note et son octave sont juxtaposées : soit elles sont à côté l'une de l'autre, soit elles sont alignées selon un diamètre de la coque principale.

### 5.3 Caractérisation expérimentale

Les expériences qui suivent ont été réalisées sur le fût droit d'un *double second* (Fig. 12) constitué de 38 notes réparties équitablement sur deux fûts. Les analyses présentées, qui étendent les résultats de référence de [17], sont concentrées sur la note G3 de ce steelpan et sont issues de [18].

#### 5.3.1 Caractérisation linéaire

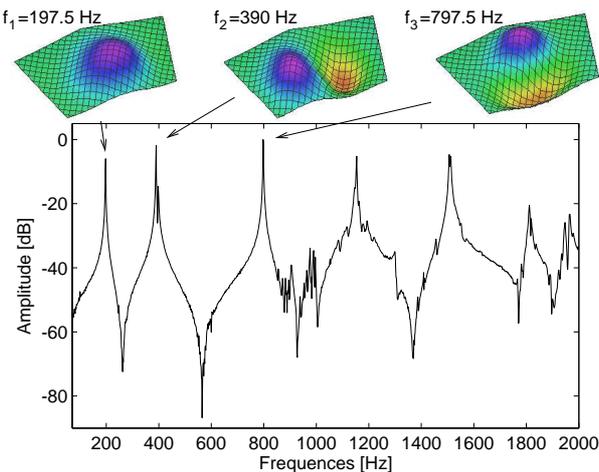


FIGURE 13: Fonction de réponse en fréquence en un point de la note G3 du *double second* de la Fig. 12 et déformées modales associées aux trois premiers pics de résonance.

Une analyse modale expérimentale, réalisée au vibromètre laser à balayage, permet d'extraire les fréquences

propres et les déformées modales du steelpan étudié. La première propriété qu'on peut observer est que les déformées modales sont toutes localisées sur les dômes des notes de l'instrument, c'est-à-dire que les oscillations d'un mode donné ne sont pas réparties sur l'intégralité de la surface de l'instrument, mais simplement sur certains dômes. Ainsi, à chaque dôme on peut associer un certain nombre de modes qui sont responsable du timbre et de la hauteur de la note correspondante.

La fonction de réponse en fréquence en un point de la note G3 (on excite l'instrument et on mesure sa réponse au même point) et les trois premières déformées modales sont représentées sur la figure 13. Seules les oscillations sur la surface de la note G3 sont représentées. On peut tout d'abord remarquer que les trois premiers pics sont répartis de manière quasi harmonique, propriété recherchée par l'accordage pour garantir un son avec une hauteur tonale franche.

On remarque aussi que les trois premières déformées modales sont organisées systématiquement (pour chacune des notes du steelpan) comme suit.

- A sa fréquence fondamentale ( $f_1$ ), la note excitée se déforme selon un seul ventre de vibration qui occupe la quasi totalité de la surface du dôme.
- A la fréquence de l'harmonique 2 ( $f_2 \approx 2f_1$ ), la déformée possède une ligne nodale (où la structure ne vibre pas) qui sépare le dôme en deux ventres de vibration en opposition de phase.
- A la fréquence de l'harmonique 3 (ici,  $f_3 \approx 4f_1$ ), on retrouve la même déformée que précédemment (une ligne nodale et deux ventres), tournée de  $90^\circ$ .

On peut alors mettre en lien ces observations expérimentales avec la procédure d'accord des steelpans (§5.2). En effet, en modifiant localement la forme du dôme, le *tuner* ajuste les modes propres en agissant sur les maxima de vibration des déformées modales. Il accorde  $f_1$  en martelant le centre de la note, et  $f_2$  et  $f_3$  en modelant les périphéries du dôme (Fig. 12).

#### 5.3.2 Mode de jeu usuel

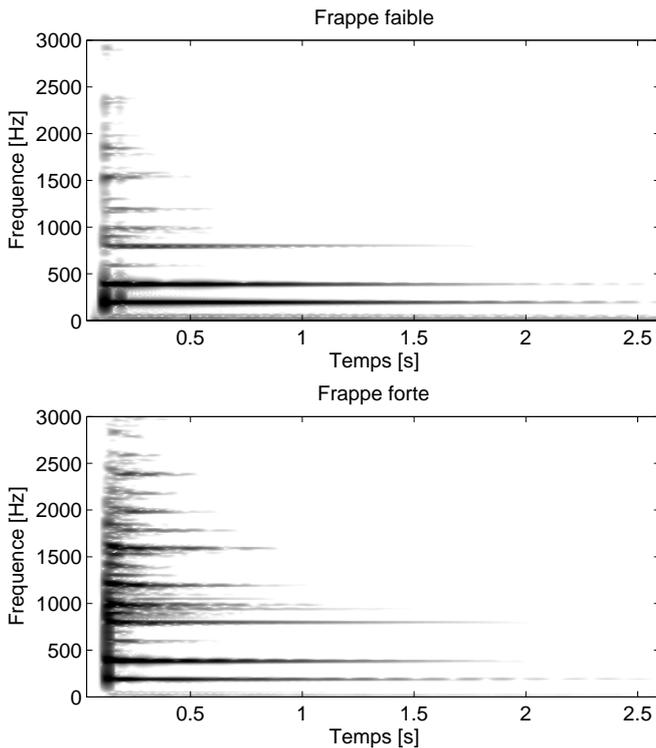


FIGURE 14: *Double second* G3 : représentation temps-fréquence des oscillations libres selon différentes forces de frappe (faible et forte).

Comme on l'a vu, le *pannist* joue en percutant les dômes les uns à la suite des autres pour interpréter une mélodie ou simultanément pour jouer en accords. Ce sont donc les oscillations libres (après impact) de la structure que l'on perçoit. La force de frappe permet de faire des nuances, entraînant des modifications dans le timbre. Pour rendre compte de ces variations, nous avons mesuré l'accélération en un point de la note G3 du *double second* pour différentes forces de frappes.

Les représentations temps-fréquences des signaux mesurés (Fig. 14) montrent en premier lieu que l'énergie est concentrée dans les deux premières composantes fréquentielles à savoir l'harmonique 1, qui oscille à la fréquence du mode 1 ( $f_1$ ), et l'harmonique 2, à la fréquence du mode 2 ( $f_2 \approx 2f_1$ ). D'autre part, on remarque que plus l'intensité de frappe est forte, plus la réponse contient d'énergie dans les hautes fréquences. La présence de hautes fréquences donnant une sensation de « brillance » dans le son, caractéristique du timbre des steelpans, le timbre diffère d'une frappe faible à une frappe forte. Cette dépendance du timbre en l'intensité de la frappe et donc en l'amplitude des vibrations est une manifestation caractéristique des non-linéarités.

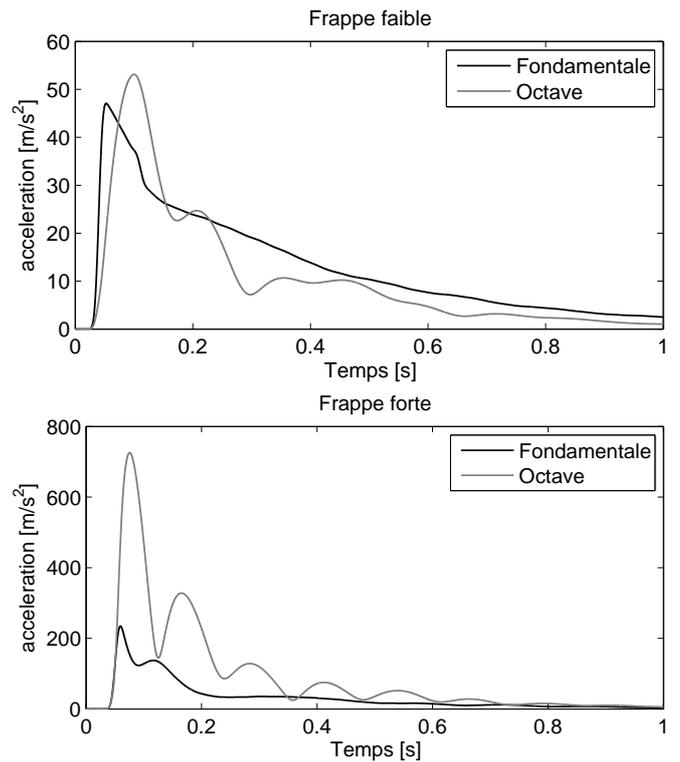


FIGURE 15: *Double second* G3 : évolution temporelle des deux premiers partiels des spectres figure Fig. 14.

Sur la figure 15, on a filtré les deux premiers partiels des spectres de la figure 14 afin d'observer leur évolution temporelle. Nous remarquons d'abord que naturellement, plus la frappe est forte, plus l'amplitude de vibration de chacun des partiels est élevée. De plus, l'information importante donnée par ces courbes est que plus la force de frappe du *pannist* est importante, plus le second partiel gagne en amplitude par rapport au premier et atteint son maximum quelques millisecondes après le maximum du premier partiel. Une fois les maxima atteints, l'énergie s'échange entre les modes, pendant la décroissance, via des battements que l'on remarque d'autant plus rapides que la sollicitation a été forte au préalable. On a donc ici une nouvelle preuve d'un couplage non linéaire fort par un transfert d'énergie du mode 1 vers le mode 2.

Cette observation semble être caractéristique des timbres si particuliers des steelpans, car le décalage temporel est tout à fait audible. Dans le son d'un steelpan, on perçoit d'abord la hauteur de la fréquence fondamentale puis comme une sorte de rebond vers le mode supérieur, accordé à l'octave.

### 5.3.3 Réponse forcée

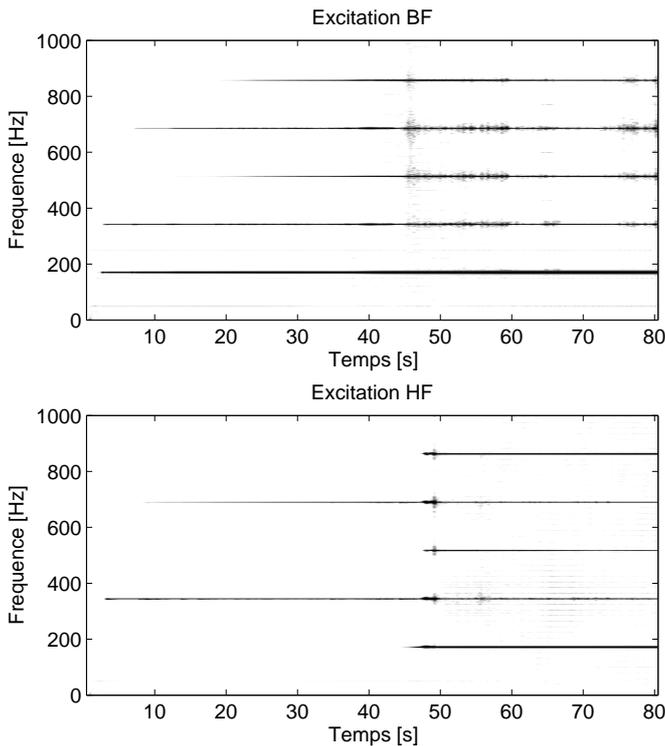


FIGURE 16: Couplage par résonance interne : forçage harmonique du steelpan autour de ses fréquences de résonances, augmentation de l'intensité de forçage.

Le couplage peut aussi être mis en évidence à l'aide d'une expérience en vibrations forcées, où l'on impose au steelpan d'osciller à une fréquence choisie (Fig. 16). Si l'on excite au voisinage de la fréquence la plus basse  $f_1$ , on observe que l'augmentation de l'amplitude du forçage externe entraîne un enrichissement spectral progressif, avec l'énergie se concentrant essentiellement au double ( $2f_1$ ) et au quadruple ( $4f_1$ ), c'est-à-dire au voisinage des fréquences des modes 2 et 3. C'est le phénomène de distorsion harmonique évoqué au paragraphe 2.3.1, couplé à la résonance interne 1:2, qui est ici mis en évidence.

Dans le cas où la fréquence d'excitation est proche de  $f_2$ , on observe que le couplage s'établit en deux temps : d'abord, comme dans le cas basse fréquence, la réponse est enrichie progressivement de composantes multiples de celle sollicitée par l'excitation, puis, à partir d'une certaine intensité de forçage, le couplage avec le mode 1 apparaît. Le spectre est agrémenté d'une nouvelle composante de fréquence moitiée ( $f_1 = f_2/2$ ) et de ses multiples. Des échanges d'énergie sont donc bien mis en évidence entre les modes propres des notes des steelpan, une nouvelle manifestation de la résonance interne 1:2.

## 6 Conclusion

Cet article a tenté de mettre en évidence les principaux phénomènes non linéaires vibratoires observés dans les idiophones, ainsi que les mécanismes physiques à l'origine de ces non-linéarités. On peut retenir qu'elles sont causées par un couplage non linéaire entre les déplacements transverses et des efforts de tension dans le résonateur, qui modifie sa raideur en fonction de ses vibrations. Ces effets dépendent ainsi directement de l'amplitude des oscillations : il faut que cette dernière soit suffisante, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du résonateur, pour observer des effets non linéaires.

Linéaires	Faiblement non linéaires	Fortement non linéaires
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modes indépendants</li> <li>- Spectre discret</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Couplages modaux / résonances internes</li> <li>- Oscillations périodiques / distorsion harmonique / spectre harmonique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Couplages modaux / résonances internes</li> <li>- Oscillations quasi-périodiques / spectre discret</li> <li>- Chaos / spectre continu</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cloches</li> <li>- Métallophones de Gamelan</li> <li>- Bois tibétains</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grands gongs de Gamelan</li> <li>- Gongs d'opéra chinois</li> <li>- Steelpan</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gongs "tam-tam" chinois</li> <li>- Cymbales crash, splash</li> <li>- Plaques tonnerre</li> </ul>



FIGURE 17: Classification des idiophones à plaques et à coques en fonction de l'impact des non-linéarités sur leur timbre.

La figure 17 propose une classification des idiophones à plaques et à coques, du point de vue de l'importance des phénomènes non linéaires mise en jeux dans leur vibration en condition normale de jeux. Les instruments linéaires sont caractérisés par des modes indépendants, et par un timbre au spectre discret dont les fréquences sont directement les fréquences propres du résonateur. Les instruments faiblement non linéaires sont également caractérisés par un timbre au spectre discret, mais des phénomènes non linéaires tels que des glissements fréquentiels, de la distorsion harmonique ou des couplages modaux viennent le modifier. Enfin, les instruments fortement non linéaires, traités en seconde partie de cet article, sont caractérisés par des phénomènes chaotiques qui produisent un timbre très riche, sans hauteur tonale franche, composé d'un continuum de fréquences.

Sur les phénomènes typiquement non linéaires observés ici, on peut retenir que les fréquences caractéristiques des vibrations (fréquences d'oscillation, fréquences de résonance) dépendent de l'amplitude des oscillations. Si le résonateur est une plaque, dépourvue de courbure, alors ces fréquences augmentent en fonction de l'amplitude quel que soit le mode, qui est qualifié de raidissant.

Pour les coques, la courbure produit l'effet inverse pour certains modes, qualifiés d'assouplissants.

Des couplages modaux ont aussi été observés, qui se manifestent par de forts échanges d'énergie entre modes, lorsque des relations de résonance interne existent entre les fréquences propres. Cela est mis à profit dans des instruments mélodiques comme certains gongs et les steelpans, où les modes sont accordés de manière harmonique, pour créer des effets particuliers dans le timbre, comme des battements ou de la brillance.

On a vu aussi que les steelpans sont des instruments tout à fait originaux, à la fois de part leur facture (emboutissage, poinçonnage, chauffage, martelage), mais surtout de part la particularité des sons qu'ils sont capables de produire. Nous avons mis en évidence l'agencement générique des trois premières déformées modales et fait le lien avec les techniques d'accordage des *tuners*. On a aussi mis en évidence l'importance des non-linéarités sur le timbre, exacerbée ici par une résonance interne 1:2 entre les deux premiers modes, à la fois en régime de vibration libre et forcé.

## Références

- [1] F. R. Tranchefort. *Les instruments de musique dans le monde*. Col. Points musique. Ed. du Seuil, 1980.
- [2] Th. von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4) :311–385, 1910.
- [3] CEA. Cast3m, 2011. <http://www-cast3m.cea.fr/>.
- [4] É. Foltête. Fondements de l'analyse modale expérimentale : application aux instruments de musique. *Musique et technique*, 5 :3–10, 2010.
- [5] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517, 2010.
- [6] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [7] C. Touzé and O. Thomas. Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : effect of the geometry. *International Journal of non-linear Mechanics*, 41(5) :678–692, 2006.
- [8] O. Thomas. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, École Normale Supérieure de Cachan, November 2011.
- [9] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques – Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, October 2001.
- [10] N. H. Fletcher. Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells : pitch glide in chinese gongs. *J. Acoust. Soc. Am*, 78(6) :2069–2073, 1985.
- [11] É. Leipp. *Acoustique et Musique*. Masson, Paris, 4th. edition, 1996.
- [12] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, 2nd. edition, 1998.
- [13] D. W. Krueger, K. L. Gee, and J. Grimshaw. Acoustical and vibrometry analysis of a large balinese gamelan gong. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128(1) :EL8–EL13, 2010.
- [14] A. Helmlinger. *Mémoire et jeu d'ensemble – La mémorisation du répertoire musical dans les steelbands de Trinidad*. PhD thesis, Université Paris X Nanterre, 2005.
- [15] P. Gaillard. *Étude de la perception des transitoires d'attaque des sons de steeldrums : particularités acoustiques, transformation par synthèse et catégorisation*. PhD thesis, Université Toulouse II, 2000.
- [16] U. Kronman. *Steel Pan Tuning*. Musikmuseets, Stockholm, Sweden, 1991.
- [17] A. Achong. The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, I : theory, simulation, experiments and bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 197(4) :471–487, 1996.
- [18] M. Monteil. Vibrations non linéaires de steeldrums – caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique. Rapport de stage de master ATIAM, Université Pierre et Marie Curie, 2010.