



**HAL**  
open science

# Approche variationnelle de la rupture dynamique via les modèles d'endommagement à gradient

Tianyi Li, Jean-Jacques Marigo, Daniel Guilbaud, Serguei Potapov

## ► To cite this version:

Tianyi Li, Jean-Jacques Marigo, Daniel Guilbaud, Serguei Potapov. Approche variationnelle de la rupture dynamique via les modèles d'endommagement à gradient. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01402910

**HAL Id: hal-01402910**

**<https://hal.science/hal-01402910>**

Submitted on 25 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Approche variationnelle de la rupture dynamique via les modèles d'endommagement à gradient

T. Li<sup>1</sup>, J.-J. Marigo<sup>2</sup>, D. Guilbaud<sup>1,3</sup>, S. Potapov<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, [tianyi.li@polytechnique.edu](mailto:tianyi.li@polytechnique.edu)

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, [marigo@lms.polytechnique.fr](mailto:marigo@lms.polytechnique.fr)

<sup>3</sup> Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives, [daniel.guilbaud@cea.fr](mailto:daniel.guilbaud@cea.fr)

<sup>4</sup> Electricité de France - Recherche & Développement, [serguei.potapov@edf.fr](mailto:serguei.potapov@edf.fr)

**Résumé** — Nous présentons une extension en dynamique des modèles d'endommagement à gradient qui peuvent être vus comme une régularisation de l'approche variationnelle de la rupture capable de prédire dans un cadre unifié l'initiation et le trajet spatio-temporel (propagation, bifurcation, branchement, arrêt) de fissures complexes dans des matériaux quasi-fragiles sous chargement dynamique. La formulation variationnelle précise ainsi que son implémentation numérique par éléments finis sont détaillées et illustrées par des simulations représentatives en accord avec les résultats théoriques et expérimentaux.

**Mots clés** — rupture dynamique, modèle d'endommagement à gradient, principes variationnels

### 1 Cadre variationnel des modèles d'endommagement à gradient

Les modèles d'endommagement à gradient [1] permettent de rendre compte toute l'évolution quasi-statique de la fissuration fragile via une localisation de l'endommagement [2]. Ce lien endommagement-rupture peut être établi [3] via la théorie de  $\Gamma$ -convergence lorsque la longueur interne du matériau est petite devant la taille de la structure, grâce au caractère variationnel du modèle basé sur les trois principes physiques d'irréversibilité, de stabilité directionnelle et de bilan d'énergie. Pour des problèmes transitoires accompagnés d'une propagation rapide de fissures sous chargement dynamique, l'interaction entre les ondes élastiques et le front de fissure devra être modélisée dans un cadre où l'effet d'inertie est non-négligeable, ce qui fera l'objet de cette étude. Similaire au modèle quasi-statique, son extension en dynamique sera également formulée et résolue à l'aide des principes variationnels faisant intervenir les énergies élastique  $\mathcal{E}$ , cinétique  $\mathcal{K}$  et de surface au sens de Griffith  $\mathcal{S}$ , fonctions du déplacement  $\mathbf{u}$  et de l'endommagement  $\alpha$  définis sur un domaine  $\Omega$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(\alpha) \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}), \quad \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\alpha) = \int_{\Omega} w(\alpha) + w_1 \ell^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha$$

avec  $\mathbf{A}$  le tenseur d'élasticité,  $w_1$  un paramètre de normalisation permettant de retrouver la ténacité du matériau  $G_c$  et  $a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$  ainsi que  $w(\alpha) = w_1 \alpha$  deux fonctions caractérisant la loi constitutive d'endommagement choisies en raison de leurs bonnes propriétés comme la présence d'une zone en contraintes purement élastique. Le champ d'endommagement scalaire  $0 \leq \alpha \leq 1$  décrit une transition continue entre les parties saine  $\alpha = 0$  et fissurée  $\alpha = 1$  et le largeur du bande est contrôlé par une longueur interne  $\ell$  liée directement à la contrainte critique  $\sigma_c$  du matériau. La présence du gradient d'endommagement  $\nabla \alpha$  souligne le caractère non-local du modèle et peut être vu comme une régularisation des modèles d'endommagement classiques associés à une dépendance pathologique du maillage.

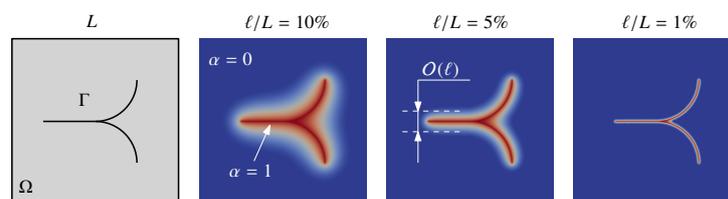


FIGURE 1 – La fissure discrète  $\Gamma \subset \Omega$  est approchée par le champ d'endommagement continu  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

A l'aide de l'action définie comme intégrale sur le temps du lagrangien généralisé, homologue en dynamique de l'énergie potentielle totale  $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \alpha)$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \alpha) = \int_I (\mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}_t) - (\mathcal{E}(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \mathcal{S}(\alpha_t) - \mathcal{W}(\mathbf{u}_t))) dt$$

où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle en temps physique et  $\mathcal{W}$  une fonctionnelle regroupant tous les efforts externes, nous pouvons maintenant formuler les lois d'évolution en temps du problème d'endommagement en dynamique couplé en deux-champs  $(\mathbf{u}, \alpha)$ , qui seront toujours régies par les trois principes physiques.

1. **Irréversibilité** : l'endommagement  $\alpha(\cdot, \mathbf{x})$  sera non-décroissant pour chaque  $\mathbf{x} \in \Omega$
2. **Equilibre dynamique et stabilité de fissures** : l'extension dynamique de la condition de stabilité d'ordre un écrite par une inégalité variationnelle

$$\mathcal{L}'(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \beta - \alpha) \leq 0 \text{ pour tout } \mathbf{v} \in C(\mathbf{u}) \text{ et } \beta \in \mathcal{D}(\alpha) \quad (1)$$

avec  $C(\mathbf{u})$  et  $\mathcal{D}(\alpha)$  deux espaces admissibles prenant en compte les conditions aux limites en espace et en temps ainsi que la condition d'irréversibilité.

3. **Bilan d'énergie** : la dérivée en temps de l'énergie totale sera égale à la puissance externe

$$\dot{\mathcal{E}}_t + \dot{\mathcal{K}}_t + \dot{\mathcal{S}}_t = \mathcal{W}(\dot{\mathbf{u}}_t) + \int_{\partial\Omega_D} \mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{u}_t)\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{U}}_t$$

On peut montrer moyennant les régularités en espace et en temps des champs, que l'inégalité variationnelle (1) est équivalente à l'équation des ondes élastodynamiques

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_t = \text{div}(a(\alpha_t)\mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{u}_t)) + \mathbf{f} \quad (2)$$

et le critère d'endommagement formellement identique avec celui en quasi-statique

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \mathcal{S}(\alpha_t) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}_t, \beta) + \mathcal{S}(\beta) \text{ pour tout } 1 \geq \beta \geq \alpha_t \geq 0 \quad (3)$$

qui postule qu'à chaque instant  $t$  les fissures doivent minimiser la somme de l'énergie élastique et l'énergie de surface via une localisation de l'endommagement.

## 2 Implémentation numérique

Les champs  $\mathbf{u}$  et  $\alpha$  sont discrétisés en espace par les éléments finis isoparamétriques avec les mêmes fonctions d'interpolation basées sur un maillage  $\Omega_h \subset \Omega$  non-structuré et isotrope dont la taille caractéristique doit être suffisamment petite (même ordre que la longueur interne  $\ell$ ) pour estimer correctement l'énergie de surface  $\mathcal{S}(\alpha_t)$ . En dynamique rapide les éléments finis *linéaires* sont largement préférés en raison de son faible coût de calcul et d'une matrice de masse condensée qui peut être facilement obtenue.

Le schéma de Newmark aux différences centrées avec  $\beta = 0$  est utilisé pour la discrétisation temporelle de l'équation des ondes (2), vu sa précision, sa nature symplectique n'introduisant peu de dissipation numérique et son caractère explicite n'exigeant aucune résolution de système linéaire durant chaque pas de temps. La stabilité conditionnelle, imposant un pas de temps critique de stabilité  $\Delta t < \Delta t_{\text{CFL}} \approx h/c$ , n'est pas très contraignante dans notre application étant donnée la propagation rapide de fissures dont la vitesse pouvant atteindre la vitesse du son  $c$  du matériau.

En absence de la dérivée en temps du champ d'endommagement  $\dot{\alpha}$ , le problème de minimisation d'énergie (3) n'est pas un vrai problème d'évolution temporelle proprement dit, à part sa condition d'irréversibilité à discrétiser conformément aux pas de temps. Nous obtenons ainsi mathématiquement un *problème de minimisation convexe* (due aux choix des fonctions  $a(\alpha)$  et  $w(\alpha)$ ) *sous contraintes de borne*, qui sera résolu à l'échelle de la structure par la méthode des gradients projetés (identification des bornes actives) combinée avec la méthode des gradients conjugués (recherche d'une solution pour des variables libres), cf. [4].

Dans le modèle continu en temps l'équilibre dynamique (2) et le critère de stabilité d'endommagement (3) sont couplés dans l'inégalité variationnelle (1). L'incrément en déplacement  $\mathbf{u}$  ou en endommagement  $\alpha$  étant *contrôlé* par un incrément en temps *petit*, le problème d'évolution en deux champs  $(\mathbf{u}, \alpha)$  sera donc découplé [5] via une résolution *indépendante* à chaque pas de temps de deux sous-problèmes respectivement à  $\mathbf{u}$  fixé et à  $\alpha$  fixé. En combinant les discrétisations en temps et en espace, nous arrivons au modèle numérique discrétisé suivant.

---

**Algorithm 1** Modèle numérique discrétisé en temps et en espace du problème (1).

---

- 1: Étant données les conditions initiales  $\mathbf{u}^0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^0$  et  $\alpha^{-1}$
  - 2: **pour** chaque pas de temps  $n$  **faire**
  - 3: Résoudre  $\alpha^n = \text{argmin}(\mathcal{E}(\mathbf{u}^n, \cdot) + \mathcal{S}(\cdot))$  soumis aux contraintes  $1 \geq \alpha^n \geq \alpha^{n-1} \geq 0$
  - 4: Résoudre l'équilibre dynamique  $M\ddot{\mathbf{u}}^n = F_{\text{ext}}^n - F_{\text{int}}(\mathbf{u}^n, \alpha^n)$
  - 5: Mettre à jour les quantités cinématiques selon le schéma de Newmark explicite
  - 6: **fin pour**
- 

### 3 Exemples numériques

#### 3.1 Propagation dynamique en mode III

Nous présupposons le trajet rectiligne de fissure en propagation antiplane et nous étudions l'influence de la vitesse du chargement  $k$  sur la vitesse de fissuration  $\dot{l}$ . Pour chaque vitesse  $k$  donnée, on obtient notamment l'évolution en temps de l'énergie de surface  $\mathcal{S}(\alpha_t) \approx G_c l(t)$  permettant de déduire la vitesse de fissuration, l'approximation valable pour une longueur interne  $\ell$  petite devant le largeur de la plaque en question. La solution analytique du décollement dynamique de film [6] y est aussi indiquée et un très bon accord est observé entre les solutions numériques et théoriques. Dans cette situation, notre modèle d'endommagement en dynamique se comporte comme la loi de Griffith [7] faisant intervenir le taux de restitution d'énergie dynamique  $G(\dot{l}) = G_c$ , comme montre le calcul de ce dernier via la méthode  $G - \theta$ .

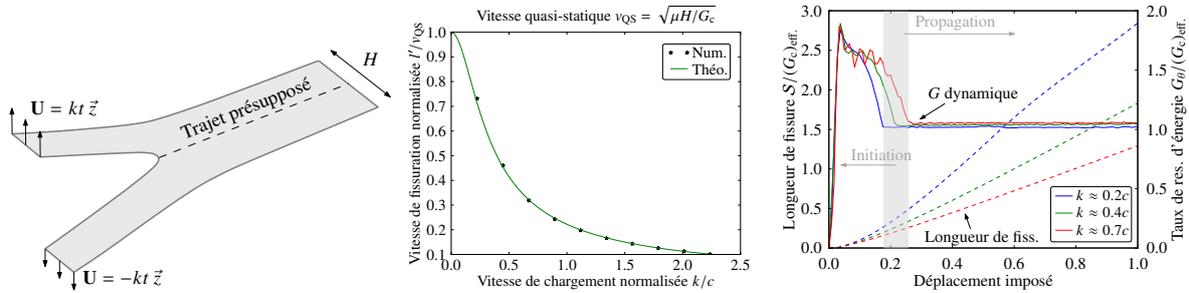


FIGURE 2 – Propagation en mode III avec un trajet spatial de fissure présupposé.

#### 3.2 Bifurcation et branchement en régime dynamique

Un critère de bifurcation (changement d'orientation de fissure ou *kinking* en anglais) et de branchement (traduction littérale du mot anglais *branching*) est implicitement inclus dans le critère de stabilité d'endommagement (3), grâce à son caractère variationnel. Dans le premier exemple une plaque pré-fissurée en contraintes planes est soumise à un impact de projectile, modélisée par une vitesse imposée, qui provoque l'amorçage et la propagation fragile en mode I de fissure. L'angle de propagation est en bon accord avec les résultats expérimentaux et d'autres modèles [8].

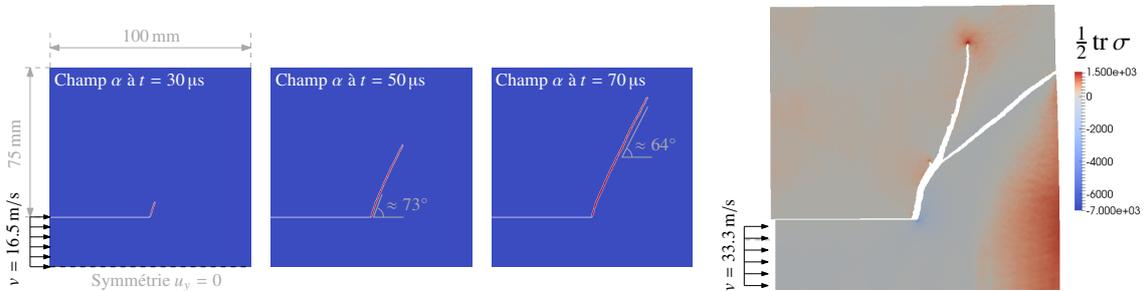


FIGURE 3 – Plaque sous impact d'un projectile provoquant une propagation fragile en mode I. La figure de droite présentant un branchement de fissure est obtenue en passant à une vitesse d'impact supérieure.

Dans un autre exemple nous appliquons dès l'instant initial une pression constante sur les bords supérieur et inférieur d'une plaque pré-fissurée en déformation plane. Nous observons un branchement

de fissure à  $t \approx 5 \times 10^{-5}$  s avec un demi-angle de branchement d'environ  $30^\circ$ . Les oscillations de l'énergie élastique sont dues aux aller-retour d'ondes aux bords de la plaque et la croissance de l'énergie dissipée nous indique une propagation monotone de fissure sans arrêt. La fissure s'amorce dès que la contrainte critique  $\sigma_c$  est atteinte par la pression hydrostatique  $\frac{1}{2} \text{tr} \sigma$  devant le front de fissure, qui reste ensuite presque constante durant toute la durée de propagation et en ce point n'est pas un bon indicateur pour expliquer le mécanisme de branchement.

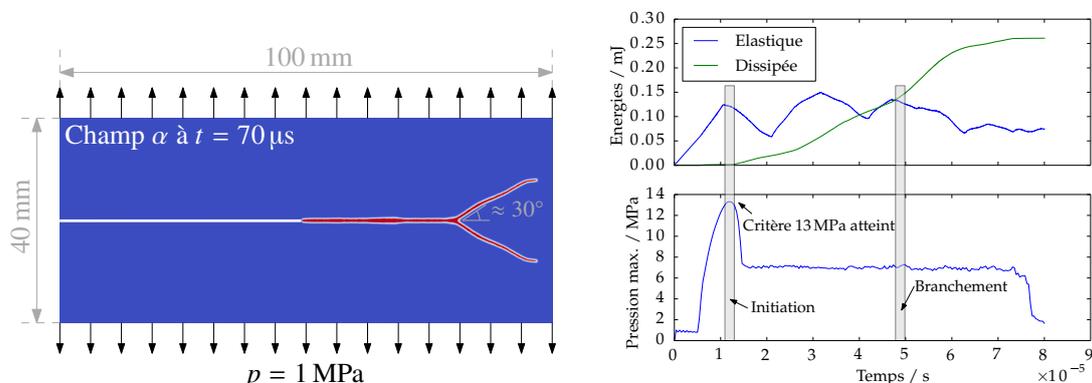


FIGURE 4 – Plaque sous traction constante sur ses bords supérieur et inférieur.

## 4 Conclusion

Nous avons étendu la formulation variationnelle des modèles d'endommagement à gradient en dynamique toujours à l'aide des trois principes d'irréversibilité, de stabilité (d'ordre un) et de bilan d'énergie. Le problème couplé en deux champs  $(\mathbf{u}, \alpha)$  est discrétisé en espace par des éléments finis linéaires et en temps par le schéma de Newmark explicite. Au déplacement  $\mathbf{u}_t$  fixé, la minimisation d'énergie sous contraintes d'irréversibilité (3) est résolue à l'échelle de la structure par des méthodes d'optimisation dédiées. Ce modèle dynamique se comporte comme la théorie de Griffith  $G(\dot{l}) = G_c$  lorsque la longueur interne est petite devant la taille de la structure et que le trajet est présupposé interdisant notamment le (micro-)branchement, mais toute sa puissance réside dans la prédiction du trajet spatio-temporel de fissures illustrée à travers des exemples numériques.

## Références

- [1] Kim Pham and Jean-Jacques Marigo. Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :199–206, 2010.
- [2] Kim Pham, Hanen Amor, Jean-Jacques Marigo, and Corrado Maurini. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4) :618–652, 2011.
- [3] Blaise Bourdin, Gilles A. Francfort, and Jean-Jacques Marigo. The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1-3) :5–148, 2008.
- [4] J. Moré and G. Toraldo. On the Solution of Large Quadratic Programming Problems with Bound Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1) :93–113, 1991.
- [5] B. Bourdin, C. J. Larsen, and C. L. Richardson. A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization. *International Journal of Fracture*, 168(2) :133–143, 2011.
- [6] P.-E. Dumouchel, J.-J. Marigo, and M. Charlotte. Dynamic fracture : an example of convergence towards a discontinuous quasistatic solution. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(1) :1–19, 2008.
- [7] L. B. Freund. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] Jeong-Hoon Song, Hongwu Wang, and Ted Belytschko. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Computational Mechanics*, 42(2) :239–250, 2008.