



Calculs EF d'agrégats de cristaux HCP en élastoviscoplasticité et comparaison aux modèles de transition d'échelles

Antonio Castro Moreno, Dominique Poquillon, Simon Perusin, Serge Pascal,
Philippe Pilvin

► To cite this version:

Antonio Castro Moreno, Dominique Poquillon, Simon Perusin, Serge Pascal, Philippe Pilvin. Calculs EF d'agrégats de cristaux HCP en élastoviscoplasticité et comparaison aux modèles de transition d'échelles. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01717103

HAL Id: hal-01717103

<https://hal.science/hal-01717103>

Submitted on 25 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Calculs EF d'agrégats de cristaux HCP en élastoviscoplasticité et comparaison aux modèles de transition d'échelles

Antonio CASTRO MORENO^{1*}, Dominique POQUILLON², Simon PERUSIN³, Serge PASCAL⁴,
Philippe PILVIN⁵

1 LIMatB & AREVA, antonio.castro-moreno@univ-ubs.fr

2 CIRIMAT, dominique.poquillon@ensiacet.fr

3 AREVA, simon.perusin@areva.com

4 CEA, serge.pascal@cea.fr

5 LIMatB, philippe.pilvin@univ-ubs.fr

* Auteur correspondant

Résumé — L'objectif de cette étude est d'utiliser des calculs par éléments finis d'agrégats polycristallins pour analyser le degré d'approximation des lois de transition d'échelles utilisées classiquement dans les approches micromécaniques à champ moyen.

Les matériaux étudiés sont des alliages à structure hexagonale qui présentent une forte anisotropie à l'échelle des grains. A l'échelle du polycristal, cette anisotropie génère un comportement aussi anisotrope pour les produits texturés.

Dans un premier temps, la démarche statistique retenue [3] est appliquée en élasticité avec un produit sans texture pour vérifier sur des solutions de référence [1] la procédure mise en place, l'influence des conditions limites [2], du nombre de grains de l'agrégat et de la discrétisation EF. A posteriori, la même méthodologie s'appliquera sur un produit texturé dont la solution sera vérifiée par une approche auto-cohérente semi-analytique.

Dans un second temps, la démarche est mise en œuvre en élastoviscoplasticité. Dans ce cas, l'élasticité de la maille sera supposé isotrope et la déformation plastique aura comme origine la création et le mouvement des dislocations. Les agrégats représentatifs d'un produit texturé seront sollicités en fluage thermique multiaxial.

Dans un dernier temps, une comparaison entre ces calculs, un modèle à champ moyen et des données expérimentales sur un alliage de bas Zr permettront de quantifier les écarts et de justifier hypothèses simplificatrices de la loi de transition d'échelles.

Mots clés — alliages HCP, transition d'échelles, calculs EF d'agrégats, anisotropie macro et microscopique, fluage thermique

1. Introduction

De nombreux métaux et alliages cristallisent selon une maille hexagonale (HeX). Cette spécificité les distingue notamment des métaux à maille cubique (CuB) vis-à-vis de leur comportement thermomécanique. En élasticité linéaire, le tenseur de Hooke ne dépend que de 3 constantes (C_{11} , C_{12} et C_{44}) pour la symétrie cubique alors qu'il faut 5 paramètres pour définir celui associé à la symétrie hexagonale (C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} et C_{44}). A l'échelle du polycristal, ces comportements élastiques anisotropes génèrent une élasticité orthotrope pour certains produits texturés [5] d'autant plus marquée que l'écart à l'isotropie des cristaux est élevé. En l'absence de texture cristallographique le comportement macroscopique sera isotrope. Mais, sous sollicitation sphérique, une différence notable entre les alliages CuB et HeX apparaît à l'échelle des grains. Dans la Figure 1, on illustre les résultats de 2 calculs en élasticité d'un agrégat de cristaux en gardant les conditions aux limites, les orientations

cristallographiques des grains et le maillage identiques. La seule différence est le comportement élastique des grains (CuB ou HeX selon le cas). On représente sous forme d'isovaleurs la contrainte équivalente de von Mises normée par le tiers de la trace de la contrainte moyenne ($P = \text{tr}(\underline{\Sigma})/3$). Dans le cas de l'agrégat CuB sa valeur est de l'ordre de la précision de la machine, ce qui montre qu'une sollicitation sphérique imposée sur les bords ne génère pas de cisaillement, ce qui n'est pas le cas pour l'agrégat HeX.

2. Création des agrégats :

La démarche suivie pour créer la géométrie et le maillage des agrégats est celle mise en place par Pascal et Di Paola [6]. Dans un premier temps, on génère un nuage de points dans un cube unitaire. Chaque point représente le germe d'un grain. Ce tirage n'est pas totalement aléatoire car on impose deux contraintes : i) il y aura un germe situé au centre du cube pour positionner le grain central, qui sera ainsi le plus éloigné des faces du cube, ii) la distance de répulsion entre les germes sera de l'ordre de grandeur de la taille de grain. Ainsi, si le tirage d'un germe tombe à une distance inférieure à deux fois la distance de répulsion, il est rejeté et on tire un autre. Cette procédure nous permet de construire des grains équiaxes (sauf pour ceux tronqués par les faces du cube) [7]. Cet aspect a été vérifié par Priser [1] par une analyse statistique sur plusieurs milliers de maillage, qui retrouve bien que la forme moyenne des grains converge vers une sphère.

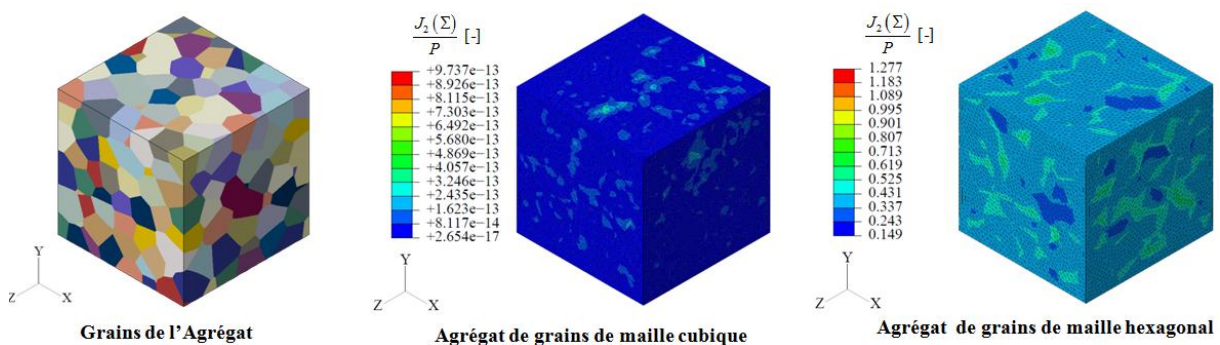


Fig. 1 : Comparaison de la réponse mécanique d'un agrégat soumis une condition limite en déformation homogène, CLDH, de dilatation isotrope avec une déformation moyenne de $0,5 \cdot 10^{-3}$

Le nuage de germes établi, on utilise ces points pour diviser le cube en cellules 3D de Voronoï. Cette procédure va générer des grains polyédriques. Ces polyèdres sont des entités convexes et donc proches de la géométrie de grains des alliages de zirconium recristallisé. Ces grains polyédriques sont ensuite maillés avec des tétraèdres à interpolation linéaire ou quadratique. La densité du maillage nécessaire pour estimer la moyenne des champs mécaniques par grain est d'environ 1200 éléments selon les calculs réalisés par Priser [1]. Ces étapes de création des agrégats ont été réalisées grâce au code CAST3M [<http://www-cas3m.cea.fr>].

Pour les analyses mécaniques, on affecte à chaque grain une orientation cristallographique différente. Si ces orientations sont générées de façon aléatoire et que l'on réalise un nombre de calculs indépendants suffisant, l'estimation du comportement du milieu homogène équivalent (MHE) obtenue par une moyenne statistique de la réponse des agrégats sera isotrope. Si par contre ces orientations cristallines suivent une autre distribution de probabilités, le comportement du MHE sera anisotrope.

3. Calculs en élasticité linéaire :

3.1. Agrégat non-texturé (macroscopiquement isotrope) :

Pour l'ensemble des calculs EF de ce texte, le tirage des orientations cristallines des grains sera aléatoire. On peut penser tendre vers un comportement élastique isotrope à l'échelle du polycristal avec un nombre de réalisations indépendantes élevé (NbR) (on note K^h le module de compressibilité élastique et μ^h , le module de Coulomb de ce milieu isotrope). Les agrégats seront sollicités par un chargement sphérique (dilatation isotrope) et un cisaillement pur afin d'estimer les deux coefficients d'élasticité du MHE. Ces sollicitations sont appliquées avec trois types de conditions limites (Tableau 1) sur des agrégats composés de 343 grains (environ 7 grains par arête) ou de 512 grains (environ 8 grains par arête). Ces calculs sont mis en œuvre pour deux métaux HeX : le zinc à température ambiante et le zirconium à 400 °C dont les constantes élastiques en notation de Voigt, en GPa, sont (*Zn en italique*, Zr entre parenthèse) : $\{C_{11}=161.0(125.7), C_{12}=34.2(79.9), C_{13}=50.1(65.9), C_{33}=66.0(152.6) \text{ et } C_{44}=40.0(27.0)\}$.

Pour une réalisation, la réponse mécanique est affectée par les conditions limites car le domaine de calcul n'est pas un volume élémentaire représentatif (VER). Mais pour un nombre important de réalisations indépendantes, les moyennes d'ensemble nous permettront d'analyser l'influence des conditions aux limites. De plus, on pourra comparer ces estimations statistiques par EF à la solution analytique obtenue par une approche auto-cohérente [8] ainsi que les champs mécaniques dans le grain central (GC). La dispersion de ces champs par rapport aux champs moyens dans le grain central permet d'étudier l'influence du voisinage et les valeurs moyennes peuvent être confrontées à une solution analytique [2].

Chaque réalisation utilise un maillage et un tirage des orientations des grains différents et une des trois types de conditions aux limites décrites dans le Tableau 1. En sortie du calcul, on exploite les efforts résultants exercés sur les faces du cube (pour estimer, en élasticité, K^h et μ^h) et les champs moyens de la déformation et de la contrainte dans le GC ainsi que les écarts-types. En élasticité, les valeurs moyennes ont été calculées pour NbR=2000, car la durée d'un calcul est faible (environ 1 à 2 minutes pour une station de travail standard).

Type de CL	Conditions aux bords ($\underline{n}$: normale unitaire sortante)	Chargement associé	
		« Sphérique »	« Cisaillement »
CLMCT0	$\underline{U} \cdot \underline{n} = \delta_k ; \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{t} = 0 \quad \forall \underline{t} \perp \underline{n} \quad (1)$	$\delta_k = 1/2 \varepsilon^0 \quad \forall k \quad (2)$	$\delta_1 = 1/2 \varepsilon^0 ; \delta_2 = 0 ; \delta_3 = -1/2 \varepsilon^0 \quad (3)$
CLMN $\underline{A}^k$ représente la position du coin du cube distinct de 0 coïncidant avec l'axe k	$\begin{cases} \underline{U}(\underline{A}^1) \cdot \underline{e}_2 = \underline{U}(\underline{A}^1) \cdot \underline{e}_3 = 0 \\ \underline{U}(0) = 0 ; \underline{U}(\underline{A}^2) \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{cases}$ $\underline{U} = \left[\left(\sum_{k=1}^3 \frac{X_k}{X_k^{A^k}} \cdot \underline{U}(\underline{A}^k) \right) \cdot \underline{n} \right] \cdot \underline{n} \quad (4)$ $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{t} \perp \underline{n}$	$\begin{aligned} \underline{U}(\underline{A}^1) &= \varepsilon^0 \underline{e}_1 \\ \underline{U}(\underline{A}^2) &= \varepsilon^0 \underline{e}_2 \\ \underline{U}(\underline{A}^3) &= \varepsilon^0 \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (5)$	$\begin{aligned} \underline{U}(\underline{A}^1) \cdot \underline{e}_1 &= \varepsilon^0 \\ \underline{U}(\underline{A}^2) \cdot \underline{e}_2 &= 0 \\ \underline{U}(\underline{A}^3) \cdot \underline{e}_3 &= -\varepsilon^0 \end{aligned} \quad (6)$
CLDH	$\underline{U} = \underline{E} \underline{X} \quad (7)$	$\underline{E} = \varepsilon^0 \underline{I} \quad (8)$	$\underline{E} = \varepsilon^0 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (9)$

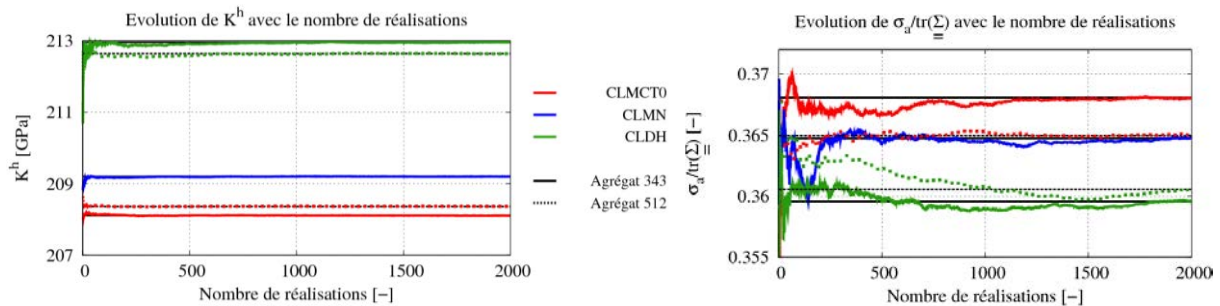
Tableau 1 : Jeux de conditions aux limites et chargements imposés (dans notre étude : $\varepsilon^0 = 0.0005$)

L'ensemble des résultats est consigné dans le Tableau 2. On constate que le passage de 343 à 512 grains apporte peu d'améliorations et que, classiquement, les conditions aux bords CLDH donnent des modules d'élasticité macroscopiques plus élevés que la solution autocohérente. Les conditions aux limites mixtes CLMN et CLMCT0 fournissent les meilleurs résultats par rapport à la solution autocohérente qui semble la plus pertinente pour les agrégats étudiés dans ce texte, surtout pour le cas du zinc où l'anisotropie élastique est marquée.

Matériau	Nombre de Grains	CL	K^h (GPa)	μ^h (GPa)	$\sigma_a/tr(\underline{\Sigma})$ (-)	$\sigma_c/tr(\underline{\Sigma})$ (-)
Zn	343	CLMCT0	208.1±5.7	41.8±1.1	0.368±0.020	0.276±0.015
		CLMN	209.2±3.1	42.2±1.0	0.365±0.019	0.274±0.015
		CLDH	213.0±3.6	43.2±1.1	0.359±0.019	0.270±0.015
	512	CLMCT0	208.2±4.6	42.1±1.0	0.364±0.021	0.274±0.015
		CLDH	212.6±3.0	43.2±0.9	0.360±0.019	0.271±0.015
	-	Solution AC	208.21	41.87	0.362	0.276
Zr	343	CLMCT0	275.4±1.0	27.6±0.3	0.331±0.002	0.338±0.002
		CLMN	275.6±0.7	27.7±0.2	0.331±0.002	0.338±0.002
		CLDH	275.6±0.9	27.9±0.3	0.331±0.002	0.338±0.002
	-	Solution AC	275.56	27.53	0.331	0.338

Tableau 2 : Résultats des calculs EF en élasticité d'agrégats HeX après 2000 réalisations

Concernant la vitesse de convergence de la solution, la Figure 2 montre que les magnitudes macroscopiques convergent d'une façon très rapide et avec quelques dizaines des calculs sont suffisants. Cependant, les champs internes le font beaucoup plus lentement. Cette vitesse de convergence sera principalement dépendante de l'anisotropie de la maille, le plus anisotrope le plus basse la vitesse.

Fig. 2 : Convergence de la solution en fonction du nombre de réalisations pour un agrégat de Zn non-texturé avec une déformation moyenne de $0,5 \cdot 10^{-3}$

3.2. Agrégat texturé (macroscopiquement orthotrope) :

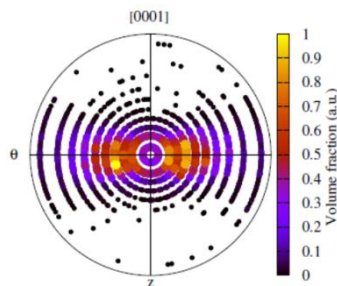


Fig 3 : Figure de pôles

La même procédure a été ensuite testée avec une seule différence : le tirage d'orientations était réalisé de façon que, statistiquement parlant, on reproduise une FDOC. En conséquence, le comportement macroscopique élastique sera orthotrope. Pour la représentation de la texture et pour son utilisation postérieure dans des méthodes analytiques, elle a été discrétisée dans un ensemble de 1294 orientations affectées d'une fraction volumique (magnitude lié à la probabilité de trouver cette orientation dans l'ensemble de la texture). La projection des axes c de dite texture est représenté en forme de figure de pôles dans la Figure 3.

Neuf paramètres sont à déterminer (tenseur de raideur C orthotrope). En conséquence six chargements sont nécessaires. Le choix fait a été d'appliquer des déformations découplées sur le cube, c'est-à-dire, trois déformations uniaxiales et trois cisaillements. En vis des résultats obtenus sur les agrégats non-texturés (presque indépendance par rapport aux CLs et nombre de grains), on a retenu les CLDH sur un agrégat de 314 grains à cause de son simplicité au niveau de l'implémentation.

Pour valider les résultats une démarche auto-cohérente semi-analytique a été développée. Elle est basée dans la solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby [12]. Etant donné que ce problème ne connaît pas une solution analytique pour le cas d'une élasticité orthotrope, une approche numérique a été faite grâce au logiciel MAPLE. Sur ce même logiciel a été codée la méthode auto-cohérente, inspiré de [13], permettant d'obtenir les propriétés macroscopiques de l'agrégat en fonction du comportement élastique de la maille et d'une FDOC.

Le Tableau 3 compare les résultats obtenus par les deux méthodes montrant que les calculs d'EF d'agrégats permettent aussi de prendre en compte d'une façon très précise les anisotropies de comportement (que pour les alliages HeX vont surtout être remarquables lors du comportement plastique).

	C_{11} [GPa]	C_{22} [GPa]	C_{33} [GPa]	C_{12} [GPa]	C_{13} [GPa]	C_{23} [GPa]	C_{44} [GPa]	C_{55} [GPa]	C_{66} [GPa]
Reuss	82.6	115.9	155.2	43.2	46.4	35.6	49.9	40.8	28.3
EF	98.73 ± 1.78	131.4 ± 1.83	157.6 ± 0.34	42.7 ± 0.79	45.2 ± 0.44	40.5 ± 0.4	53.7 ± 0.49	45.3 ± 0.48	34.3 ± 0.47
Méthode AC	97.4	131.8	157.6	43.1	45.4	40.4	54.3	45.8	34.8
Hill	93.8	126.2	156.6	41.3	45.3	40.2	52.3	43.5	32.5
Voigt	104.9	136.5	158.0	39.4	44.3	45.1	54.7	46.3	36.8

Tableau 3 : Résultats des calculs EF en élasticité d'agrégats texturés de Zn à 20°C après 2000 réalisations et comparaison aux estimations analytiques

4. Calculs sous sollicitations de fluage :

Les calculs EF présentés dans cette partie ont pour objectif d'apporter des éléments sur le problème ouvert du changement d'échelle dans les polycristaux avec des phases ayant un comportement élastoviscoplastique (EVP). Afin de séparer les difficultés et de comparer les résultats de la démarche statistique retenue à des résultats antérieurs [4], on suppose dans cette partie que l'élasticité des phases est isotrope ($E=100$ GPa, $\nu=0,3$) et l'on adopte une loi viscoplastique de type Norton (loi puissance avec un exposant n égal à 5) sans seuil. Cette loi d'écoulement sans écrouissage, étudiée dans [4] et définie dans le Tableau 4 (éq. 11), introduit trois familles de systèmes de glissement (Basal : $B_{<a>}$, Prismatique : $P_{<a>}$ et Pyramidal de 1^{ère} espèce : $\pi_{<a+c>}$). L'anisotropie viscoplastique entre ces trois familles est introduite via la différence entre la valeur du paramètre τ_0 ($P_{<a>}=50$ MPa, du système principal pour le zirconium à 300K ($c/a=1.593$) et celles des systèmes secondaires $\tau_0(B_{<a>})=\tau_0(\pi_{<a+c>})=300$ MPa. Dans les équations du Tableau 4, l'indice « s » fait référence aux systèmes de glissement et l'indice « φ » aux phases du polycristal définies comme l'ensemble des grains de même orientation cristalline ($\underline{\mu}^s$ est le tenseur d'orientation du système s pour la phase φ).

$\underline{\tau}^s = \underline{\underline{\sigma}}_\phi : \underline{\underline{\mu}}^s \quad (10)$	$\dot{\gamma}^s = D \left(\left \tau^s \right / \tau_0^s \right)^n \text{sign}(\tau^s) \quad (11)$	$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\phi^{vp} = \sum_{s \in S} \dot{\gamma}^s \underline{\underline{\mu}}^s \quad (12)$
---	---	---

Tableau 4 : définition de la loi d'écoulement viscoplastique pour les grains ($D = 1 \text{ s}^{-1}$) [4]

Les calculs EF ont été réalisés avec le code EF ABAQUS en utilisant les maillages générés pour des agrégats de 343 grains par le code CAST3M. La loi de comportement spécifique pour décrire la réponse EF de ces agrégats a été introduite via un sous-programme « utilisateur » (UMAT) grâce à la passerelle SiDoLo-ABAQUS [11]. Dans ces calculs, l'objectif principal est d'estimer les champs moyens de la déformation et de la contrainte dans le grain central (GC) et de leurs variances pour comparer cette estimation avec les nombreux modèles de transition d'échelle disponibles. Les sollicitations macroscopiques étudiées sont principalement du fluage uniaxial avec un niveau de contrainte compris entre 50 et 100 MPa [4] mais d'autres sollicitations ont également été étudiées (traction uniaxiale ou biaxiale, relaxation, ...). On présente ici les résultats obtenus en fluage sous 50 MPa ($\Sigma_{33} = \tau_0 (P_{<a>})$) pour une durée de fluage normalisée : $d = D(t - t_0)$ et sous 100 MPa pour $d = 10$. Pour ces calculs EF non linéaires, la durée d'un calcul est assez élevée (environ 1 à 2 jours pour une station de travail standard). La Figure 4 illustre les réponses de 300 réalisations indépendantes pour les composantes $\langle \underline{\underline{\epsilon}}_{33} \rangle_{GC\#0}$ et $\langle \underline{\underline{\sigma}}_{33} \rangle_{GC\#0}$ moyennée pour un grain central dont les axes cristallographiques coïncident avec les axes du cube (fluage à $\Sigma_{33} = 50 \text{ MPa}$). On peut ainsi visualiser la dispersion importante de l'évolution de ces composantes du champ moyen de la déformation et de la contrainte dans le GC pour chaque réalisation pour une orientation cristalline dont le glissement facile est la famille pyramidale. En effet, même si l'orientation du GC est figée pour les 300 réalisations, les orientations des grains de son voisinage sont aléatoires et génèrent ainsi cette forte hétérogénéité d'une réalisation à l'autre. Avec en moyenne 8 premiers voisins par réalisation, le GC moyen, dont la forme polyédrique est différente à chaque réalisation, subit l'influence d'environ 2400 orientations différentes après 300 calculs. Il semble donc légitime de comparer les moyennes d'ensemble de ces champs moyens ($\langle \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{GC\#k} \rangle_{Nbr}$ et $\langle \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{GC\#k} \rangle_{Nbr}$) aux prévisions obtenues par des modèles auto-cohérents.

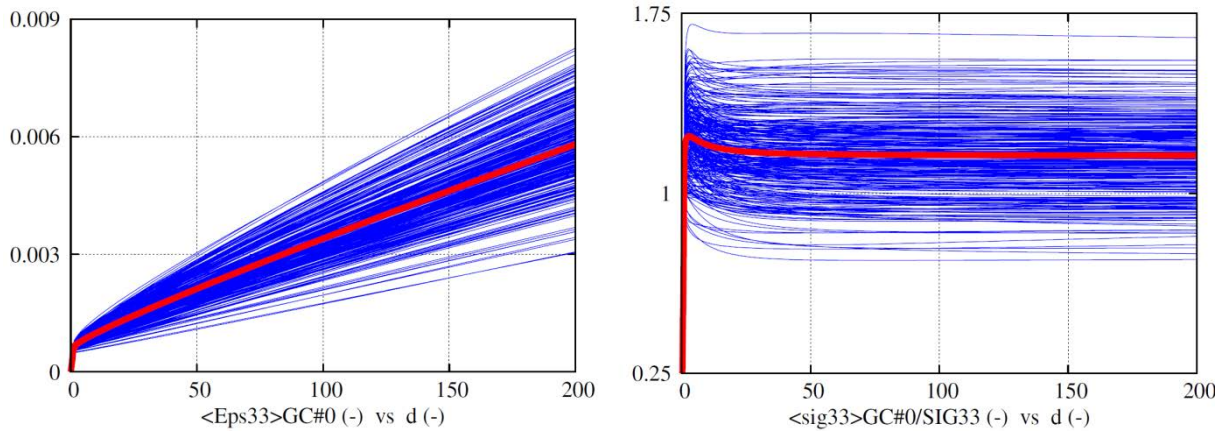


Fig. 4 : évolutions temporelles des composantes axiales de la déformation et de la contrainte moyenne pour le grain central pour 300 réalisations indépendantes. La moyenne d'ensemble est tracée en rouge.

Cette démarche a été mise en œuvre sur 50 réalisations indépendantes avec, pour le grain central, les quatre orientations retenues par Brenner dans son benchmark [4]. Les angles entre les axes c de ces orientations avec l'axe de la sollicitation de fluage valent : 21.5° pour l'orientation GC#1, 47.9° pour GC#2, 70.7° pour GC#3 et 86.0° pour GC#4. Les deux dernières orientations sont en position favorable pour glisser selon les systèmes prismatiques. Comme illustré sur la Figure 5 (fluage à $\Sigma_{33} = 100 \text{ MPa}$), les phases cristallines associées à ces deux orientations se déforment plus pour une sollicitation de fluage avec $\Sigma_{33} = 100 \text{ MPa}$. Les résultats des calculs d'agrégats par EF donnent des

évolutions voisines, en termes de déformation équivalente au sens de von Mises, avec celles prévues par le modèle à champ moyen proposé par Brenner. Pour poursuivre cette comparaison, il serait nécessaire d'augmenter le nombre de réalisations indépendantes (une centaine environ) mais également de comparer les variances de ces champs moyens avec celles des techniques d'homogénéisation du second ordre. A plus long terme, cette démarche pourrait servir de référence pour étalonner les différentes règles de changement d'échelle pour les polycristaux en élastoviscoplasticité.

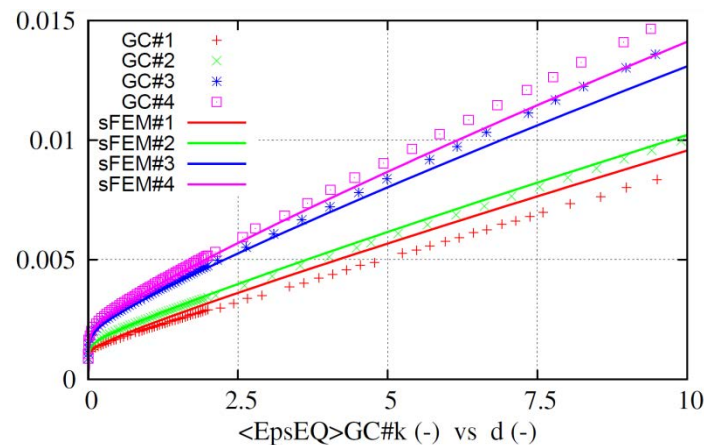


Fig. 5 : Comparaison en termes de déformation équivalente pour 4 phases cristallines entre les résultats du modèle de Brenner [4] et les calculs d'agrégats par EF pour 50 réalisations indépendantes.

Références

- [1] Priser M., Analyses multi-échelles du comportement en fluage d'alliages de zirconium, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne-Sud, 2011
- [2] Berveiller M., Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformation des polycristaux métalliques, Thèse de Doctorat d'état, Université de Paris-Nord, 1978
- [3] Gélébart L., Château C. et Bornert M., Conditions aux limites mixtes normales, 19^{ème} Congrès Français de Mécanique, Marseille, 24-28 août 2009
- [4] Brenner R., Influence de la microstructure sur le comportement en fluage thermique d'alliages de zirconium : analyse expérimentale et mise en oeuvre de méthodes d'homogénéisation, Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, 2001
- [5] Nakatsuka N., Elastic anisotropy of zirconium alloy fuel cladding, Nuclear Engineering and Design, 65, 103-112, 1981
- [6] Di Paola F., Modélisation multi-échelles du comportement thermo-mécanique de composites à particules sphériques, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures Paris, 2010
- [7] Barbe F., Decker L., Jeulin D. et Cailletaud G., Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part 1 : F. E. model, International Journal of Plasticity, 17, 513-536, 2001
- [8] Qiu Y.P. et Weng G.J., Elastic constants of a polycrystal with transversely isotropic grains, and the influence of precipitates, Mechanics of Materials, 12, 1-15, 1991

- [9] Kneer G., Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur, *Physica Status Solidi (b)*, 9, 825-838, 1965
- [10] Fisher E.S. et Renken J., Single-Crystal Elastic Moduli and the hcp $\rightarrow$ bcc Transformation in Ti, Zr and Hf, *Physical Review*, 135, A482-A494, 1964
- [11] Pilvin P., Conférence des utilisateurs ABAQUS, Versailles, 1999
- [12] Mura T., *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff Publishers, 1987
- [13] Yaguchi M. et Busso E. P., On the accuracy of Self-Consistent Elasticity Formulations for Directionally Solidified Polycrystal Aggregates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, Issue 3-4, p. 1073-1089, 2005