



Amortisseur vibratoire magnétique pour les vibrations de plaque mince : étude expérimentale et numérique

Stefania Lo Feudo, Arnaud Malher, Cyril Touzé, Jean Boisson, Olivier Doaré

► To cite this version:

Stefania Lo Feudo, Arnaud Malher, Cyril Touzé, Jean Boisson, Olivier Doaré. Amortisseur vibratoire magnétique pour les vibrations de plaque mince : étude expérimentale et numérique. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01923674

HAL Id: hal-01923674

<https://hal.science/hal-01923674>

Submitted on 15 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Amortisseur vibratoire magnétique pour les vibrations de plaque mince : étude expérimentale et numérique

S. Lo Feudo¹, A. Malher², C. Touzé¹, J. Boisson¹, O. Doaré¹

¹ IMSIA, ENSTA ParisTech–CNRS–EDF–CEA, Université Paris–Saclay,
stefania.lo-feudo, cyril.touze, jean.boisson, olivier.doare@ensta-paristech.fr

² LadHyX, École Polytechnique CNRS, Université Paris–Saclay,
arnaud.malher@gmail.com

Résumé — Cette étude porte sur la caractérisation expérimentale et numérique d'un amortisseur de vibrations non linéaire magnétique avec raideurs linéaires et non linéaires ajustables. Le système primaire dont on souhaite réduire les oscillations est une plaque mince vibrant en grande amplitude. Le réglage des caractéristiques de l'amortisseur magnétique sont déduites de celles mesurées sur la plaque à l'aide d'une analyse modale. En particulier, les trois configurations d'amortisseur à masse accordée non linéaire, purement non linéaire et bi-stable sont prise en compte.

Mots clés — amortisseur non linéaire, forces magnétiques, transfert d'énergie.

1 Introduction

Dans le domaine du génie civil, la réalisation de systèmes de contrôle de vibrations capables de réduire les effets dus aux actions des forces dynamiques comme le vent ou les tremblements de terre est souvent requise. Dans ce contexte, les amortisseurs à masse accordée, autrement dit Tuned Mass Dampers (TMD), sont bien connus dans la littérature et utilisés sur plusieurs ouvrages. Toutefois, les principaux inconvénients de tels systèmes de contrôle passif, tiennent au fait qu'il est efficace dans une bande de fréquence réduite, c'est-à-dire à proximité d'une fréquence de résonance du système où le TMD est accordé. Par ailleurs un TMD est sensible au décalage des paramètres structuraux, et il est adapté au cas de systèmes linéaires. Afin d'adapter les potentialités du TMD aux structures avec comportement non linéaire, où la fréquence propre varie en fonction de l'amplitude du forçage, des études ont été menées au cours de ces dernières années sur les amortisseurs non linéaires. Parmi eux se trouvent des amortisseurs purement non linéaires, les Non-linear Energy Sinks (NES). Le NES, qui a une raideur linéaire nulle, ne possède pas de fréquence propre et peut s'adapter à celle de la structure principale. De cette manière, à partir d'un certain seuil d'énergie, un transfert d'énergie irréversible du système vers le NES est activé [13]. Récemment, des études ont montré que l'introduction d'une raideur linéaire négative, créant ainsi des amortisseurs bi-stables, le Nonlinear Bistable Tuned Vibration Absorber (NBTVA), permet de réduire l'énergie minimale vibratoire nécessaire afin de déclencher le mécanisme de transfert ciblé d'énergie [12]. Il est aussi possible de concevoir un amortisseur avec raideur linéaire positive, le Non-linear Tuned Vibration Absorber (NLTVA), et de généraliser le critère d'optimisation communément utilisé pour le TMD au cas non linéaire [6].

Du point de vue expérimental, des amortisseurs non linéaires peuvent être réalisés de différentes manières, par exemple à l'aide d'un fil sans tension [9], de poutres à section variable [4], ou par des électroaimants [7] et des aimants permanents [1, 14]. En particulier, l'utilisation de forces magnétiques permet d'obtenir un oscillateur non linéaire dont les raideurs sont ajustables à travers la distance entre les aimants. À cette fin, l'amortisseur de vibrations présenté dans ce travail est constitué d'une masse oscillante magnétique placée dans un champ créé par 6 aimants fixes. Les raideurs créées par les forces induites par ce champ magnétique varient selon la distance entre les aimants, en permettant d'obtenir une raideur linéaire positive, nulle ou négative. Les forces magnétiques, estimées grâce à un modèle de décomposition multipolaire, peuvent donc être adaptées selon plusieurs stratégies aux propriétés d'une structure principale caractérisée par un comportement non linéaire.

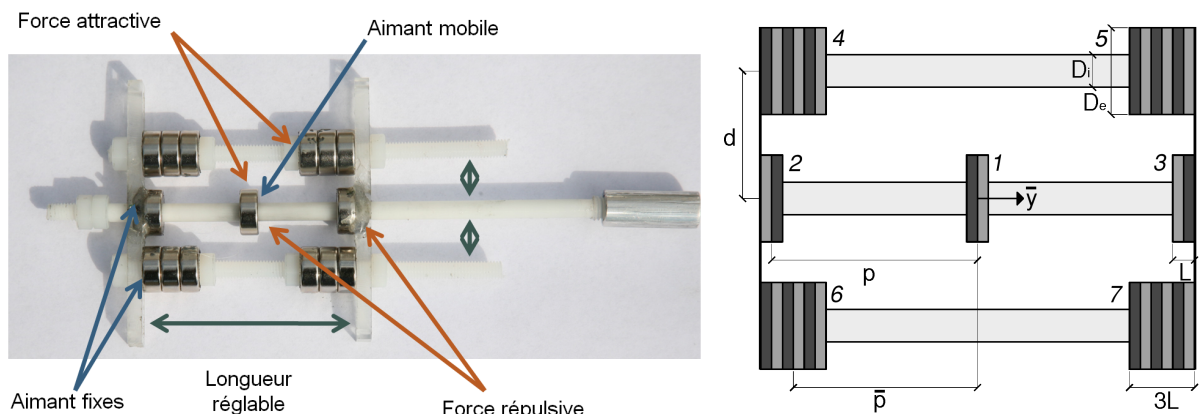


FIGURE 1 – (Gauche) Amortisseur de vibrations magnétique, ou Magnetic Vibration Absorber (MVA) et (Droite) représentation schématique du MVA.

2 Montages expérimentaux

Le système expérimental mis en place est composé par l'amortisseur de vibrations magnétique, ou Magnetic Vibration Absorber (MVA), conçu par Benacchio et al. [2], appliqué sur une plaque rectangulaire mince encastrée sur deux bords opposés (libres selon les deux autres). Le MVA utilisé, Fig. 1, est composé par des aimants de forme cylindrique annulaire traversés par des tiges. L'aimant central est libre d'osciller et représente la masse mobile de l'amortisseur, en revanche les autres aimants sont fixés aux barres connectées aux tiges ayant pour rôle de fournir la non linéarité à l'oscillateur. Notamment les aimants coaxiaux à l'aimant mobile possèdent une polarisation inverse à celle de l'aimant mobile et la force qu'ils exercent est donc répulsive, alors que les autres (ci-après dénommés aimants correctifs) exercent une force attractive. La distance entre les aimants dans les directions longitudinale et transversale peut être réglée indépendamment l'une de l'autre, permettant donc d'obtenir différentes configurations géométriques. Pour mesurer la réponse dynamique du MVA, l'oscillateur est excité dans la direction de mouvement de l'aimant mobile par un pot vibrant LDS V455, dont l'accélération est mesurée à l'aide d'un accéléromètre Brüel & Kjaer Type 4517, et le déplacement de l'aimant mobile est mesuré avec un capteur optique Keyence LS-7070M, Fig. 2.

La structure principale dont on veut réduire les vibrations est une plaque rectangulaire en aluminium ayant pour dimensions de $600 \times 200 \times 2 \text{ mm}$. Le choix de ce type de structure est motivée par la non linéarité

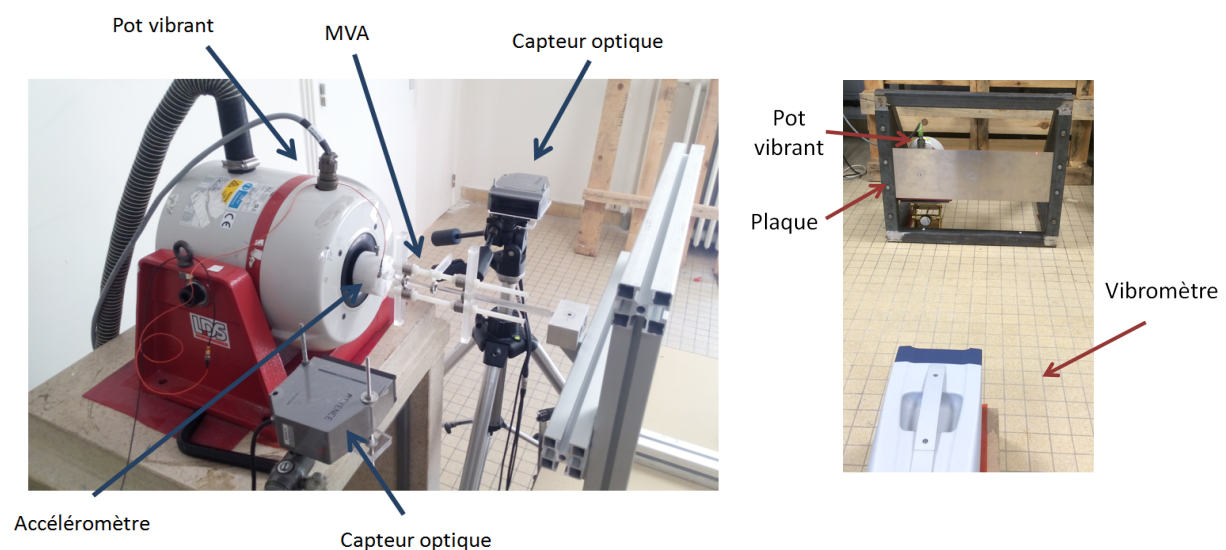


FIGURE 2 – (Gauche) Montage expérimental pour les essais dynamiques effectués sur le MVA et (Droite) plaque mince rectangulaire encastrée sur deux bords.

de la réponse qui apparaît pour des grandes amplitudes de vibration (non linéarité géométrique, apparaissant pour des vibrations de l'ordre de grandeur de l'épaisseur). En particulier, la plaque est configurée de telle sorte que l'on puisse placer le MVA en son centre, point où le déplacement sera maximal, puisque l'on s'intéresse au premier mode de vibration. Afin d'évaluer ses fréquences propres et les déformées modales, la plaque est excitée par le pot vibrant à travers d'une longue tige, utilisée pour obtenir une force la plus monodirectionnelle possible. Un transducteur de force Brüel & Kjaer Type 8230-002 est placé à l'extrémité de la tige près de la plaque, alors que la réponse de la plaque est mesurée par le vibromètre laser Polytec PSV500, cf. Figure 2. Enfin, le MVA est installé sur la plaque et les mesures dynamiques sont effectuées d'abord en bloquant la masse mobile pour évaluer l'influence de la masse ajoutée sur les propriétés de la plaque, et ensuite en laissant l'aimant libre d'osciller. Pour ce qui concerne le montage expérimental, en complément des instruments mentionnés précédemment, le déplacement à proximité du centre de la plaque est mesuré par le capteur laser Keyence LK-G37 et le déplacement de l'aimant mobile par le capteur optique Keyence LS-7070M.

Avant de détailler les résultats obtenus sur l'amortissement de vibration, nous allons présenter le modèle multipolaire développé pour calculer les forces magnétiques qui s'appliquent sur la masse mobile.

3 Amortisseur de vibrations magnétique

Le champ magnétique induit par les aimants qui composent l'amortisseur magnétique, peut être évalué à l'aide d'une décomposition multipolaire, qui permet d'obtenir une meilleure approximation par rapport au modèle dipolaire classique. L'énergie d'interaction entre deux aimants similaires est donnée par

$$E(p) = - \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} dV \quad (1)$$

avec V le volume de l'aimant, $\mathbf{M}$ l'aimantation et $\mathbf{B}$ le champ magnétique. En exprimant $\mathbf{M}$ en fonction du moment magnétique $\mathbf{m}$ selon $\mathbf{M} = \mathbf{m}/V$, la force exercée est donnée par

$$\mathbf{F}(p) = \nabla(E(p)) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(p)) \quad (2)$$

avec p la distance entre les aimants. Les termes de la décomposition multipolaire correspondants aux champs rayonnés par un dipôle [5], un quadrupole et un hexapole évalués par [11] et valables pour un aimant cylindrique, sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{dip}(p) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^3} (3\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T - \mathbf{I})\mathbf{m}, \\ \mathbf{B}_{quad}(p) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^5} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \left(\frac{4-3\beta^2}{8}\right) \{ [35(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 - 15]\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T - [15(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 - 3]\mathbf{I} \} \mathbf{m}, \\ \mathbf{B}_{hex}(p) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^7} \left(\frac{L}{2}\right)^4 \left(\frac{15\beta^4 - 60\beta^2 + 24}{64}\right) \{ [231(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 - 210(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 + 35]\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T + \\ &\quad - [105(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 - 70(\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 + 5]\mathbf{I} \} \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (3)$$

avec μ_0 la perméabilité du vide, $\beta = D/L$ avec D et L respectivement le diamètre et l'épaisseur de l'aimant, $\mathbf{I}$ la matrice unité et T le symbole utilisé pour la transposée. Dans le cas actuel des aimants de forme annulaire, le champ magnétique peut être évalué comme la différence entre le champ induit par un aimant cylindrique de diamètre D_{ext} et possédant une aimantation positive $\mathbf{M}$, et le champ induit par un aimant cylindrique de diamètre D_{int} et possédant une aimantation négative $-\mathbf{M}$ [11].

Dans cette étude, les moments magnétiques ont été évalués à partir des mesures du champ magnétique induit par des aimants annulaires à l'aide d'une procédure d'ajustement, dont le but est d'ajuster les résultats expérimentaux obtenus par [2] au modèle développé. Dans le Tableau 1 sont donc présentés les propriétés des aimants utilisés pour réaliser le prototype du MVA, où la valeur m^c est celui d'un aimant d'épaisseur $3L$. Il faut aussi préciser que, afin d'améliorer la correspondance entre résultats numériques et expérimentaux, un décalage Δd de la distance transversale d , Fig. 1, a été pris en compte.

Dans le cas de l'oscillateur présenté sur la Fig. 1, l'aimant mobile (1) subit les forces résultantes dues aux aimants l'entourant. Le développement en série de Taylor limité à l'ordre 5 de la force totale autour

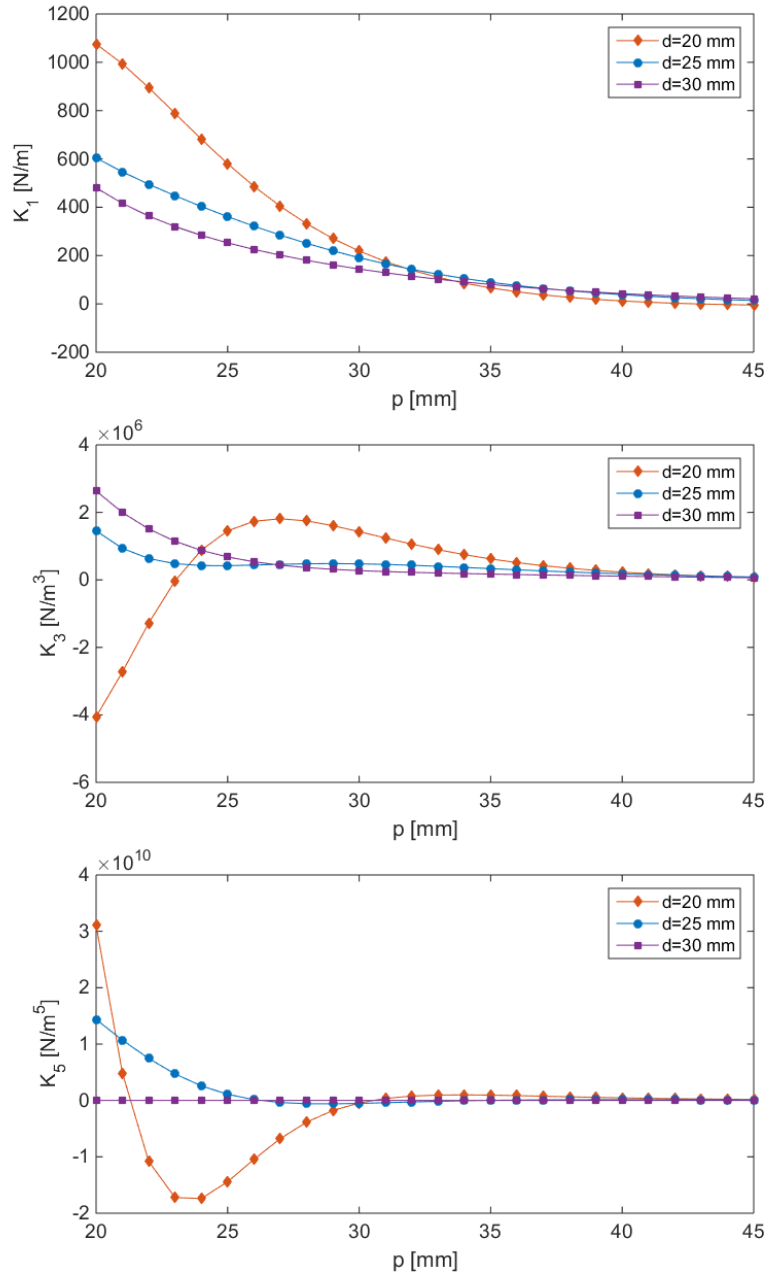


FIGURE 3 – Évolution théorique des coefficients de raideur du MVA en fonction de p lorsque d est fixé et $\bar{p} = p - L$.

de $\bar{y} = 0$ conduit à

$$\begin{aligned}
 F_{Tot} &\approx -(K_1^r(p) - K_1^c(\bar{p}, d))\bar{y} - (K_3^r(p) - K_3^c(\bar{p}, d))\bar{y}^3 - (K_5^r(p) - K_5^c(\bar{p}, d))\bar{y}^5 \\
 &\approx -K_1\bar{y} - K_3\bar{y}^3 - K_5\bar{y}^5
 \end{aligned} \tag{4}$$

ce qui permet de définir des coefficients de raideur linéaire, cubique et quintique.

L'évolution des coefficients de raideur en fonction de d et p , lorsque $\bar{p} = p - L$, sont présentés sur la Fig. 3. À l'aide de ces courbes, qui peuvent être obtenues pour plusieurs valeurs de d , on peut choisir la configuration du MVA qui donne une raideur linéaire positive, afin de le régler comme NLTVA, ou bien nulle, afin de régler le MVA comme un NES, ou bien encore négative, afin d'obtenir un NBTVA.

TABLE 1 – Propriétés des aimants du MVA

	D_e/D_i [mm]	$L^c/L^r/L^m$ [mm]	m^c [Am ²]	m^r [Am ²]	m^r [Am ²]	Δd [mm]
MVA	15/6	18/6/6	2.16	0.55	0.69	-1.6

4 Vibrations d'une plaque mince

Notre premier choix de structure primaire, dont nous souhaitons réduire les vibrations, s'est porté sur une plaque mince en aluminium, sujette à des excitations harmoniques. La plaque est encastree aux deux bords opposés et, pour des valeurs croissantes de force, montre un comportement non linéaire. Durant la première phase de l'étude, la plaque a été caractérisée à l'aide du vibromètre laser Polytec PSV500, qui permet de connaître les fréquences naturelles et les déformées modales, comme le montre la Fig. 4. Le premier mode de vibration en flexion montre un déplacement maximal au centre de la plaque. Le MVA est donc placé dans cette position, afin de pouvoir réduire au mieux les vibrations de ce mode. Le pot vibrant (excitateur) est quant à lui fixé à 10 cm de l'encastrement, où les déplacements sont plus faibles.

Considérons un oscillateur non linéaire à un degré de liberté (ddl) avec non linéarité cubique. L'équation du mouvement est donnée par :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \alpha x(t)^3 = F \sin(\Omega t)/m \quad (5)$$

avec $\alpha = \frac{k_{nl}}{k}\omega_n^2$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$, et m , c , k , k_{nl} respectivement la masse, le coefficient d'amortissement, la raideur linéaire et cubique. F et Ω sont l'amplitude et la fréquence du forçage, $x(t)$ est le déplacement de la masse et le point désigne la dérivée par rapport au temps t . L'introduction d'un paramètre de désaccord ε , donne

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\varepsilon\bar{\xi}\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \varepsilon\bar{\alpha}x(t)^3 &= \varepsilon\bar{F} \sin(\Omega t)/m, \\ \Omega &= \omega_n + \sigma\varepsilon, \quad \alpha = \varepsilon\bar{\alpha}, \quad \xi = \varepsilon\bar{\xi}, \quad F = \varepsilon\bar{F} \end{aligned} \quad (6)$$

La méthode des échelles multiples permet donc d'obtenir analytiquement la réponse en fréquence en fonction des paramètres du problème selon [10] :

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\bar{\alpha}}{\omega_n} a^2 \pm \left(\frac{\bar{F}^2}{4\omega_n^2 a^2} - (\bar{\xi}\omega_n)^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

avec a l'amplitude du déplacement. Cette formule est issue d'un calcul perturbatif au premier ordre, il donne donc une première idée de la courbe de réponse en fréquence. Cependant, pour des amplitudes de réponses grandes, l'approximation devient erronée et il faut recourir à une méthode numérique si l'on souhaite estimer précisément les amplitudes des branches de solution.

Considérons maintenant le système composé du premier mode de vibration de la plaque (en régime non linéaire), auquel est ajouté l'amortisseur vibratoire MVA. Comme indiqué dans la section précédente, le MVA possède, en plus de la non linéarité cubique, un coefficient de raideur quintique et un terme lié au frottement sec, dû au montage expérimental. Les équations du mouvement de notre système couplé sont donc données par :

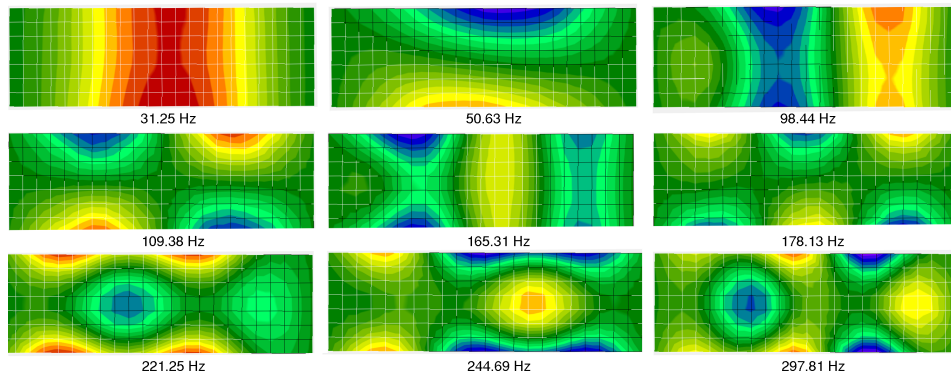


FIGURE 4 – Déformées opérationnelles mesurées sur la plaque d'aluminium encastree sur les 2 bords verticaux et libre sur les 2 bords horizontaux.

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1(t) - 2\xi_2\omega_2\mu\dot{r}(t) - \bar{\mu}g\mu\text{sign}(\dot{r}(t)) + \omega_1^2x_1(t) - \omega_2^2\mu r(t) + \\
&\quad \alpha_1x_1(t)^3 - \alpha_2\mu r(t)^3 - \beta_2\mu r(t)^5 = F\sin(\Omega t)/m_1, \\
&\ddot{x}_2(t) + 2\xi_2\omega_2\dot{r}(t) + \bar{\mu}g\text{sign}(\dot{r}(t)) + \omega_2^2r(t) + \alpha_2r(t)^3 + \beta_2r(t)^5 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

avec $r(t) = x_2(t) - x_1(t)$, $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, $\omega_i = \left(\frac{k_i}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_i = \frac{k_{i,3}}{m_i}$ ($i = 1, 2$), $\beta_2 = \frac{k_{2,5}}{m_2}$, $\bar{\mu}$ est le coefficient de frottement sec et g la gravité. La masse de l'amortisseur magnétique ($m_2 = 6.6$ g) et le coefficient de frottement ($\bar{\mu} = 0.2$) sont fixés pour des raisons pratiques, par conséquent les paramètres de conception du MVA sont le coefficient d'amortissement (ξ_2) et les coefficients de raideur linéaire (k_2), cubique ($k_{2,3}$) et quintique ($k_{2,5}$). Le choix de ces paramètres est lié aux propriétés de la structure primaire et, pour cette raison, l'identification des propriétés mécaniques de la plaque à partir des mesures expérimentales joue un rôle important. En modélisant la plaque comme un oscillateur à un ddl, ses propriétés estimées à partir des expériences sont : $m_1 = 0.45$ kg, $k_1 = 9.3 \cdot 10^3$ N/m, $k_{1,3} = 3.6 \cdot 10^7$ N/m³, $\xi_1 = 7.1$ %, $c_1 = 9.1$ Ns/m et $f_1 = 23$ Hz. La Figure 5 donne le déplacement maximal de la plaque mesuré à proximité du centre avec la courbe correspondante à l'équation (7). Par ailleurs une solution numérique a aussi été calculée afin de ne pas se satisfaire de la solution analytique approchée, à l'aide d'une méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc implémentée dans le logiciel AUTO [3]. Les Figures montrent le comportement non linéaire de la plaque et aussi que les courbes numériques approchent mieux les résultats expérimentaux.

5 Vibrations non linéaires du système couplé

Dans cette phase de l'étude, la réponse de la plaque avec la masse mobile du MVA bloquée, puis laissée libre d'osciller, est comparée lorsque la plaque est excitée par une force sinusoïdale autour de la première fréquence naturelle et en cas de choc. Le MVA est réglé afin d'obtenir des amortisseurs de type NLTVA (raideur linéaire positive), NES (raideur linéaire nulle) et NBTVA (raideur linéaire négative).

Tout d'abord l'amortisseur est réglé comme un NES et son efficacité est montrée expérimentalement sur la Figure 6. Les résultats montrent la réduction de l'intensité du courant au voisinage de la résonance du système, phénomène qui est désigné dans la littérature par le vocable de *force drop off*. En dépit de ce problème connu, on peut tout de même constater une légère réduction du pic de vibration d'amplitude maximale en régime de vibration forcée. Ce premier résultat expérimental est en cours de consolidation via de nouvelles expériences, où l'on devrait obtenir des réductions plus importantes en réglant de manière plus approprié les amortissements internes, dans la structure primaire, ainsi que dans le MVA.

Les cas du NBTVA et du NLTVA est ensuite pris en compte numériquement et pour le cas d'oscillations libres. La fréquence de l'amortisseur est réglée sur celle de la plaque selon $\omega_2 = -\omega_1/2$ (NBTVA) et $\omega_2 = \omega_1$ (NLTVA), alors que $k_{23} = 10^4$ N/m³, $k_{25} = 10^6$ N/m⁵ et $c_2 = 0.079$ Ns/m. La réponse libre du système évaluée numériquement est représentée dans la Figure 7 et montre la réduction du niveau vibratoire atteint lorsque l'oscillateur primaire est faiblement amorti. En particulier, on observe un meilleur comportement du NLTVA qui permet de réduire plus rapidement les oscillations libres de la plaque. On

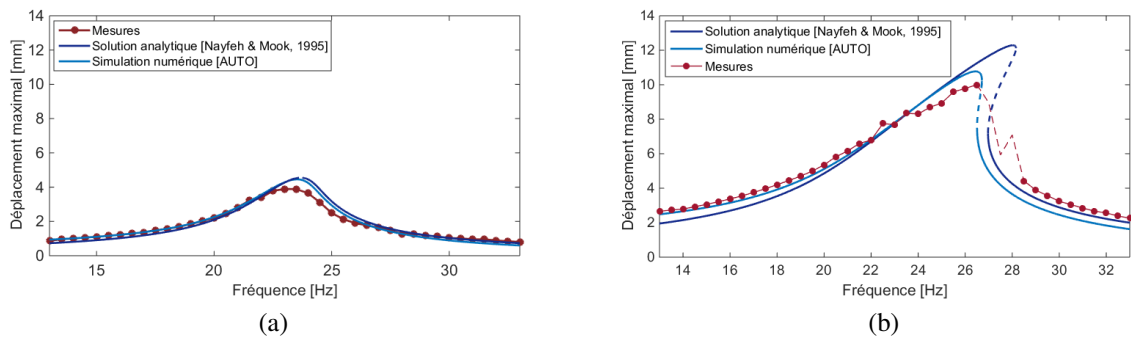


FIGURE 5 – Déplacement maximal de la plaque d'aluminium avec le MVA bloqué pour (a) $\bar{F} = 5.98$ N et (b) $\bar{F} = 16.16$ N

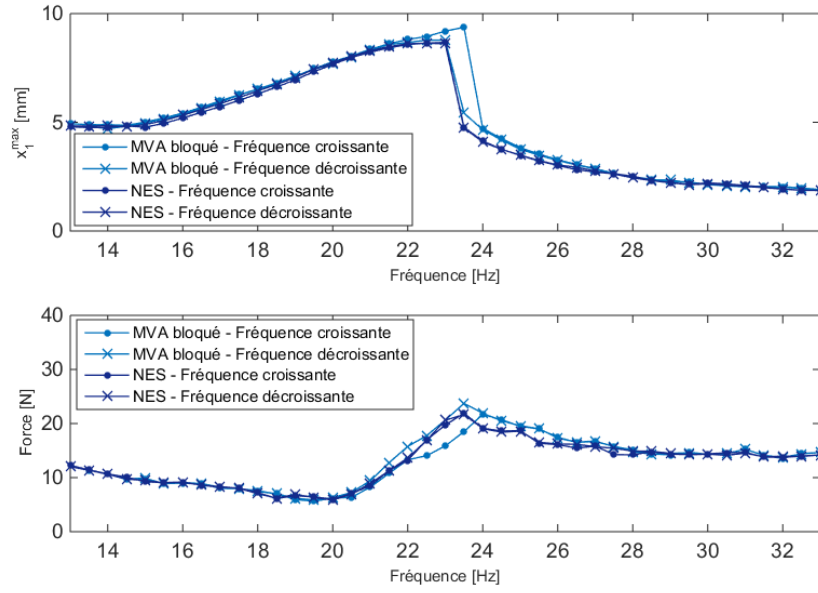


FIGURE 6 – Déplacement maximal de la plaque et forçage extérieur lorsque les propriétés du NES sont : $k_2 = 12.01 \text{ N/m}$, $k_{23} = 1.53 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$, $k_{25} = 9.59 \cdot 10^6 \text{ N/m}^5$ et $c_2 = 0.058 \text{ Ns/m}$.

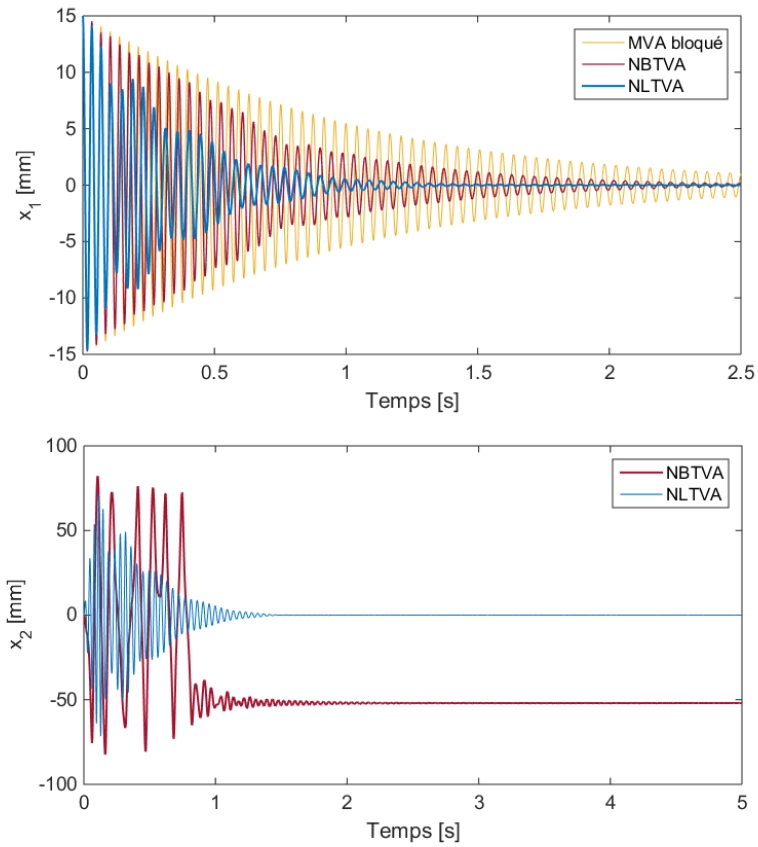


FIGURE 7 – Réponse libre numérique pour $x_1(0) = 15 \text{ mm}$ and $c_1 = 1 \text{ Ns/m}$

peut aussi remarquer que, dans le cas du NLTVA, l'aimant central de l'amortisseur termine sa course en position $x_2 = 0$, tandis que dans le cas du NBTVA, deux positions d'équilibres existent et le système termine dans l'un ou l'autre des deux puits de potentiel.

6 Conclusions et perspectives

En conclusion, les points saillants que l'on peut relever sont :

- la mise en œuvre de la modélisation multipolaire permet de caractériser de manière satisfaisante les forces magnétiques exercées entre les aimants, et donc les raideurs linéaires et non linéaires de l'amortisseur ;
- les 3 paramètres géométriques du MVA, et la possibilité de changer la dimension et l'aimantation des aimants, permettent d'atteindre de nombreuses configurations de l'amortisseur ;
- les résultats préliminaires montrent l'efficacité de l'amortisseur lorsque la structure principale est faiblement amortie. À cette fin, dans les prochaines étapes de l'étude la réalisation expérimentale des autres structures primaires, telles que plaques ou poutres avec différentes conditions au bord afin d'en réduire le coefficient d'amortissement, sera mise en place.

Références

- [1] M.A. Al-Shudeifat, *Asymmetric magnet-based nonlinear energy sink*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 10(1), 2014.
- [2] S. Benacchio, A. Malher, J. Boisson, C. Touzé, *Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses*, Nonlinear Dynamics, 85, 893-911, 2016.
- [3] E.J. Doedel, R. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, X. Wang : *AUTO 2000 : continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*, Technical report, Concordia University, 2002.
- [4] C. Grappasonni, G. Habib, T. Detroux, F. Wang, G. Kerschen, K.S. Jensen, *Practical design of a nonlinear tuned vibration absorber*, Proceedings of the ISMA 2014 Conference, September 2014.
- [5] D. J. Griffith, *Introduction to electrodynamics*, Pearson, 4th edition, 2012.
- [6] G. Habib, T. Detroux, R. Viguié, G. Kerschen, *Nonlinear generalization of Den Hartog's equal-peak method*, Mechanical Systems and Signal Processing, 52-53, 17-28, 2015.
- [7] J. Liu, K. Liu, *A tunable electromagnetic vibration absorber : characterization and application*, Journal of Sound and Vibration, 295, 708-724, 2006.
- [8] L.I. Manevitch, G. Sigalov, F. Romeo, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, *Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment : analytical study*, Journal of Applied Mechanics, 81(4), 041011, 2013.
- [9] D.M. McFarland, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, *Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency*, Int. Journal of Non-linear Mechanics, 40, 891-899, 2005.
- [10] A. H. Nayfeh , D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*, Wiley Classics Library, 1995.
- [11] A.J. Petruska, J.J. Abbott, *Optimal permanent-magnet geometries for dipole field approximation*, IEEE transactions on magnetics, 49(2), 811-819, February 2013.
- [12] F. Romeo, G. Sigalov, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, *Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment : numerical study*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 10(1), 011007, 2014.
- [13] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, L.A. Bergman, D.M. McFarland, G. Kerschen, Y.S. Lee, *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, Springer series : Solid Mechanics and its Applications, 2009.
- [14] I. Yamakawa, S. Takeda, H. Kojima *Behaviour of a new type dynamic vibration absorber consisting of three permanent magnets*, Bulletin of JSME, 20, 146, 947-954, 1977.