Approche énergétique du problème de fracturation hydraulique 1D: Décollement d'un film élastique soumis à l'injection d'un fluide

Rogers Bill Cordova Hinojosa, Kim Pham, Corinne Rouby

▶ **To cite this version:**

Rogers Bill Cordova Hinojosa, Kim Pham, Corinne Rouby. Approche énergétique du problème de fracturation hydraulique 1D: Décollement d'un film élastique soumis à l'injection d'un fluide. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01926317

HAL Id: hal-01926317
https://hal.science/hal-01926317

Submitted on 19 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Approche énergétique du problème de fracturation hydraulique 1D: Décollement d'un film élastique soumis à l'injection d'un fluide

R. B. Cordova Hinojosa, K. Pham, C. Rouby

IMSIA, ENSTA ParisTech, CNRS, CEA, EDF, Université Paris-Saclay, 848 boulevard des maréchaux, 91762 Palaiseau cedex, France
cordova@ensta.fr

Résumé — Cet article se place dans le cadre des recherches sur la propagation d'une fissure dans un milieu élastique, fragile et chargée par un fluide visqueux. Nous nous proposons de traiter ici un problème simplifié : le décollement d'un film élastique soumis à l'injection d'un fluide visqueux placé à l'interface entre un film élastique et le substrat rigide sur lequel il repose initialement. L'ensemble des équations modélisant le problème sont analysées par le biais de la méthode des développement asymptotiques en fonction d'un petit paramètre adimensionné. En allant jusqu'à l'ordre 1 dans le développement asymptotique, on montre qu'il existe un retard dans l'évolution de la longueur de fissuration qui dépend de la vitesse d'injection du débit et de la viscosité du fluide.
Mots clés — Rupture, approche énergétique, propagation, développement asymptotique.

1 Introduction

La propagation d'une fissure dans un milieu fragile sous l'action d'un écoulement de fluide visqueux se situant entre ses lèvres est un problème apparaissant dans différents domaines, en particulier en volcanologie [7, 11]. La compréhension de ce problème restant encore limitée, le présent travail entre dans le cadre du développement d'outils de modélisation capables de le décrire, afin de contribuer à une meilleure compréhension de la migration du magma à travers la croûte terrestre, c'est-à-dire la formation des dykes et sills.

Actuellement, les modèles considérés pour décrire la migration du magma sont développés dans le cadre d'une approximation bidimensionnelle : le dyke est supposé infiniment long dans la direction perpendiculaire à sa section, qui est supposée être uniforme [10]. Ils considèrent pour la plupart une propagation rectiligne, avec un trajet de fissuration connu à l'avance, et il est supposé que le fluide avance à la même vitesse que la fissure. Ces modèles ont déjà permis de mieux comprendre la migration du magma dans la croûte terrestre, en montrant par exemple que le contraste de propriétés physiques entre deux couches peut favoriser le stockage de magma à une profondeur donnée [8, 10]. Cependant, ils sont insuffisants pour prédire l'arrêt de la propagation, un trajet temporel saccadé dû au comportement transitoire du fluide, ou encore le passage d'une migration verticale à une migration horizontale. Ces cas de figure sont pourtant des mécanismes importants en volcanologie, et ont été observés dans le cadre d'essais expérimentaux [7, 11] et sur le terrain [1, 5].

Dans ce travail, nous considérons une géométrie très simplifiée afin de focaliser notre attention sur le caractère non quasi-statique du problème de propagation de fissure considéré associé à la viscosité du fluide. En effet, une fois un modèle simple établi dans le cas unidimensionnel, celui-ci pourra être étendu à des cas tridimensionnels plus réalistes afin de tirer tous les avantages du cadre variationnel. Nous nous intéressons ainsi à l'injection d'un fluide visqueux à l'interface entre un film inextensible, infini dans la direction transverse à la propagation et le substrat rigide sur lequel il est initialement collé. Le problème introduit un couplage fort entre le décollement du film (modélisant la propagation de la fissure dans cette géométrie simplifiée), l'écoulement de fluide visqueux et la réponse du film. Le décalage entre le front de fissure et le front d'avancée de l'écoulement n'est ici pas considéré, ceci pouvant être justifié par la différence d'ordre de grandeur entre ce décalage et la longueur de la fissure [3]. L'écoulement de fluide visqueux sera formulé dans le cadre de l'approximation de lubrification, valable pour de faibles ouvertures de fissures, et on considérera un modèle de comportement décrit par une loi puissance [2, 6]. Le décollement du film est abordé du point de vue de la théorie énergétique de Griffith [4] en se basant

sur le taux de restitution d'énergie, étendu ici à la présence d'un fluide visqueux.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, le problème étudié est décrit et l'ensemble des équations le modélisant sont établies. Dans la section 3, il est reformulé en passant d'un problème à frontière libre à un problème à frontière fixe, ce qui permet dans la section 4, à l'aide la méthode de développements asymptotiques, d'obtenir des solutions explicites du problème, et enfin de présenter les résultats obtenus pour différentes valeurs des paramètres décrivant le problème dans la section 5.

2 Formulation du problème

On considère une injection de débit ponctuel $Q(T)$ au temps $T > 0$ placé à l'origine des coordonnées, et en utilisant la symétrie du problème, on choisit comme géométrie de domaine la région $\Omega = [0, L(T)] \subset \mathbb{R}^+$ avec $L(T)$ la longueur de fissure et T le temps physique. S'agissant d'un modèle unidimensionnel on peut représenter le problème et ces conditions initiales sur la figure 1.

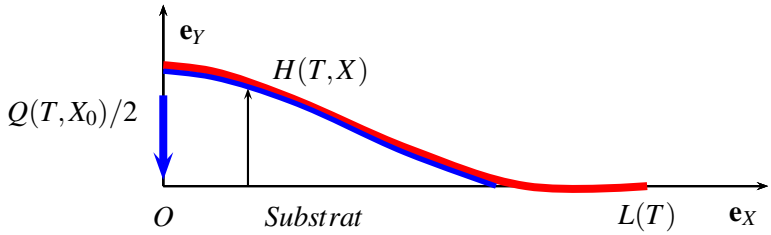

FIGURE 1 – Représentation du problème. En **Rouge** la forme du film et en **Bleu** la forme de la surface du fluide.

En tenant compte des résultats de Detournay [9], on suppose que le fluide est solidaire du film à chaque instant et on peut donc décrire la géométrie à l'aide d'une unique fonction $H(T,X)$ représentant la hauteur du film et du fluide au temps T et au point X. On introduit par ailleurs la pression $P(T,X)$ dans le fluide. Le problème consiste alors à trouver $\{H(T,X), P(T,X), L(T)\}$ décrivant l'état du système à l'instant T soumis à l'action du chargement $Q(T)$, en considérant les conditions initiales décrites par $\{L_0 = L(0), V_0 = \int_\Omega H_{ini}(X)dX\}$. L'ensemble d'équations décrivant l'état du système à l'instant T sont décrites dans la suite.

2.1 Domaine solide

Le domaine solide est constitué d'un film infini dans la direction transverse à la propagation du fluide, modélisé comme un fil parfaitement flexible. Le déplacement du solide est donc décrit par l'équation d'équilibre

$$N\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + P = 0, \ \forall \ X \in \Omega =]0, L[, \tag{1}$$

où N est la tension du fil, supposée *connue* et *fixe*. Les conditions aux limites sont :

— déplacement nul au point de fissuration : $H(T,L) = 0$,

— continuité de la pente à l'origine, s'écrivant en raison de la symétrie du problème : $\dfrac{\partial H}{\partial X}(T,0) = 0$.

2.2 Domaine fluide

En considérant valable l'hypothèse de lubrification, le flux développé par le fluide suit la loi de Poiseuille. Dans ce cas, l'équation liant l'évolution de la forme du film et le champ de vitesse du fluide est le bilan de conservation de masse, donné par

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0, \ \forall \ X \in \Omega, \ \forall \ T \geq 0, \tag{2}$$

où $\Phi(T,X)$ est le flux traversant une section au point $X \in \Omega$. On munit cette équation d'une condition aux limites pour le flux et d'une condition initiale pour $H(T,X)$:

— débit injecté à l'origine : $\Phi(T,0) = Q(T)/2$,

— forme initiale du fil : $H(0,X) = H_{ini}(X)$.

La loi de Poiseuille donne Φ en fonction des inconnues globales $H(T,X)$, $P(T,X)$ et $L(T)$. Il est également nécessaire de se donner une loi décrivant le comportement visqueux du fluide. On considère un modèle de loi de puissance [2, 6] :

$$\tau = M\dot{\gamma}^n, \tag{3}$$

où τ est la contrainte de cisaillement, $\dot{\gamma}$ le taux de glissement, M la consistance du fluide et $n \in [0,1]$ l'indice d'écoulement (un fluide newtonien est représenté par $n = 1$ et un fluide parfaitement plastique par $n = 0$). En considérant la distribution parabolique de la vitesse donnée par la loi de Poiseuille, le calcul du flux, obtenu en intégrant la vitesse du fluide sur la section, conduit alors l'équation de Reynolds

$$\Phi(T,X) = \left(-\frac{1}{\mu'}H^{2n+1}\frac{\partial P}{\partial X}\right)^{1/n}, \tag{4}$$

où μ' est la viscosité apparente du fluide, reliée aux paramètres du modèle de loi puissance par

$$\mu' = 2M\left(\frac{2(2n+1)}{n}\right)^n.$$

Le choix du modèle de loi puissance se justifie par une bonne description des fluides visqueux couramment utilisés dans la fracturation hydraulique (thinning fluids). De plus, d'un point de vue mathématiques, l'indice $n \in]0,1[$ nous permet d'assurer la convergence de certaines intégrales qui divergeraient dans le cas d'un fluide newtonien dans le cas de notre géométrie simplifiée($n = 1$).

2.3 Évolution de la fissuration

On se base sur l'approche énergétique de Griffith [4] pour traiter l'évolution de la fissuration. Étendue au couplage avec un écoulement visqueux, celle-ci repose sur le calcul du taux de restitution de l'énergie potentielle du système. Cette énergie peut s'exprimer comme suit :

$$E = \int_\Omega \frac{N}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 dX - \int_0^T \int_\Omega \Phi\frac{\partial P}{\partial X}dX d\tau - \int_0^T \frac{Q}{2}P(\tau,0)d\tau,$$

où le premier terme est l'énergie potentielle associée au comportement du film, le deuxième terme à l'énergie dissipée par viscosité par le fluide et le troisième terme au travail extérieur dû à l'injection du fluide à l'origine. La loi consiste en trois principes :

— irréversibilité :

$$\frac{\partial L}{\partial T} \geq 0, \tag{5}$$

— critère de Griffith :

$$-\frac{\partial E}{\partial L} \leq G_c, \tag{6}$$

— bilan de l'énergie :

$$\left(\frac{\partial E}{\partial L} + G_c\right)\frac{\partial L}{\partial T} = 0, \tag{7}$$

avec G_c la ténacité de la colle entre le film et le substrat.

3 Adimensionnement

Le problème est alors décrit en fonction des paramètres dimensionnés suivants ;

— **Paramètres matériaux :** N (précontrainte dans le film), G_c (ténacité de la colle), μ', n (viscosité apparente et indice d'écoulement du fluide).

— **Paramètres de géométrie initiale :** L_0 (longueur de fissuration initiale), V_0 (volume initial du fluide).

— **Paramètres de chargement :** Q_0 (amplitude du débit injecté).

Dans le cadre d'une approche asymptotique de ce problème, on choisit de travailler avec une version adimensionnée de l'ensemble d'équations du problème. On fait alors les changements de variables suivants :

$$X = L_0 x,\ \ T = \frac{V_0}{Q_0} t,\ \ L(T) = L_0 \ell(t),\ \ H(T,X) = \frac{V_0}{L_0} h(t,x),\ \ Q(T) = Q_0 q(t),\ \ P(T,X) = \frac{NV_0}{L_0^3} p(t,x),$$

ainsi que

$$\Phi(T,X) = Q_0 \phi(t,x), \quad E(T,L) = \frac{NV_0^2}{L_0^3} \mathcal{E}(t,\ell(t)).$$

Le problème ne dépend après adimensionnement que des deux paramètres adimensionnés suivants :

$$K_f = \frac{N}{\mu'} \left(\frac{V_0^{2n+2}}{L_0^{2n+5} Q_0^n} \right), \qquad \Gamma_c = \frac{G_c L_0^4}{NV_0^2}.$$

Ce problème étant à frontière libre (en raison de la longueur de décollement inconnue), on normalise la variable x de sorte que $y = x/\ell(t)$ et donc, l'ensemble d'équations peut s'écrire en fonction des fonctions normalisées $w(t,y) = h(t, y\ell(t))$ et $\mathsf{p}(t,y) = p(t, y\ell(t))$.

3.1 Domaine solide

En tenant compte du changement de variable et de l'adimensionnement, les équations de la section 2.1 peuvent s'écrire

$$\begin{cases} w'' + \ell^2 \mathsf{p} = 0 \ \ \forall \ \ y \in]0,1[, \\ w'(t,0) = w(t,1) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

3.2 Domaine fluide

De même, les équations de la section 2.2 peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \ell \dot{w} - w' y \dot{\ell} + \phi' = 0 \ \ \forall \ \ y \in]0,1[, \\ \phi(t,0) = \frac{q}{2}, \\ w(0,y) = h_{ini}(y), \end{cases} \tag{9}$$

où $\phi(t,y)$ est la forme adimensionnée de $\Phi(t,x)$, qui peut s'exprimer, en supposant que $\mathsf{p}' < 0 \, \forall \, x \in [0,1]$, par

$$\phi(t,y) = (-K_f \ell^{-1} w^{2n+1} \mathsf{p}')^{1/n}. \tag{10}$$

3.3 Loi d'évolution de la fissuration

Finalement les trois conditions d'évolution de fissuration s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\ell} \geq 0, \\ G \leq \Gamma_c, \\ (G - \Gamma_c)\, \dot{\ell} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

où $G = -\partial \mathcal{E} / \partial \ell$ est le taux de restitution d'énergie, avec

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\ell} \int_0^1 \frac{(w')^2}{2} dy - \int_0^t \int_0^1 \phi \mathsf{p}' dy d\tau - \int_0^t \frac{q}{2} \mathsf{p}(t,0) d\tau.$$

À l'aide des conditions aux limites des sections 3.1 et 3.2, un calcul (long et non détaillé ici) montre que

$$G = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \ell} = \int_0^1 w \left(\frac{3}{2} \mathsf{p} + y \mathsf{p}' \right) dy.$$

4 Solution asymptotique

On analyse le cas particulier d'une grande ténacité (large-toughness), largement traité dans la littérature [9, 3]. Dans ce cas, on peut écrire $K_f = 1/\varepsilon$ avec ε un petit paramètre i.e. $\varepsilon \ll 1$. En supposant un développement régulier par rapport au petit paramètre des inconnues du problèmes, on cherche une solution asympotique du type

$$\begin{aligned} w(t,y) &= w_0(t,y) + \varepsilon w_1(t,y) + O(\varepsilon^2), \\ \mathsf{p}(t,y) &= \mathsf{p}_0(t,y) + \varepsilon \mathsf{p}_1(t,y) + O(\varepsilon^2), \\ \ell(t) &= \ell_0(t) + \varepsilon \ell_1(t) + O(\varepsilon^2), \\ \phi &= \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + O(\varepsilon^2), \\ G &= G_0 + \varepsilon G_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En remplaçant formellement les développements précédents dans l'ensemble d'équations (8) - (11) on peut obtenir des équations à différents ordres ε^i. En considérant uniquement les deux premiers ordres, on obtient :

Équations à l'ordre 0 :

$$\text{Solide :} \quad \begin{cases} w_0'' + \ell_0^2 \mathsf{p}_0 = 0, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ w_0(t,1) = w_0'(t,0) = 0, \end{cases}$$

$$\text{Fluide :} \quad \begin{cases} \ell_0 \dot{w}_0 - y w_0' \dot{l}_0 + \phi_0' = 0, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ \ell_0^{-1} \mathsf{p}_0' w_0^{2n+1} = 0, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ \phi_0(t,0) = \dfrac{q}{2}, \\ w_0(0,y) = h_{ini}(y), \end{cases}$$

$$\text{Fissure} \quad \begin{cases} (G_0 - \Gamma_c)\dot{\ell}_0 = 0, \\ \ell_0(0) = 1. \end{cases}$$

Équations à l'ordre 1 :

$$\text{Solide :} \quad \begin{cases} w_1'' + \ell_0^2 \mathsf{p}_1 + 2\ell_0 \ell_1 \mathsf{p}_0 = 0, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ w_1(t,1) = w_1'(t,0) = 0, \end{cases}$$

$$\text{Fluide :} \quad \begin{cases} \ell_0 \dot{w}_1 + \ell_1 \dot{w}_0 - y w_0' \dot{\ell}_1 + y w_1' \dot{\ell}_0) + \phi_1' = 0, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ \ell_0^{-1} \mathsf{p}_0' w_0^{2n} w_1 + \ell_0^{-1} \mathsf{p}_1' w_0^{2n+1} - \ell_0^{-2} \ell_1 \mathsf{p}_0' w_0^{2n+1} = -\phi_0^n, \quad \forall\, y \in]0,1[, \\ \phi_1(t,0) = 0, \\ w_1(0,y) = 0, \end{cases}$$

$$\text{Fissure} \quad \begin{cases} (G_0 - \Gamma_c)\dot{\ell}_1 + G_1 \dot{\ell}_0 = 0, \\ \ell_1(0) = 0. \end{cases}$$

En considérant $V(t) := 1 + \int_0^t q(\tau) d\tau$ et en introduisant $V_c = \sqrt{8\Gamma_c/9}$, la résolution des équations à l'ordre dominant donne une évolution à seuil :

si $V \leq V_c$:

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell_0(t) &= 1, \\ \mathsf{p}_0(t) &= \frac{3}{2} V, \\ w_0(t,y) &= \frac{3V}{4}(1 - y^2), \end{aligned}$$

si $V > V_c$:

$$\ell_0(t) = \sqrt[4]{\frac{9V^2}{8\Gamma_c}},$$
$$\mathsf{p}_0(t) = \frac{3V}{2\ell_0^3},$$
$$w_0(t,y) = \frac{3V}{4\ell_0}(1-y^2),$$

où V_c s'interprète comme le volume critique pour lequel il y a décollement. Cette évolution à l'ordre dominant correspond exactement à celle d'un décollement quasi-statique par un fluide à l'équilibre à volume controlé. De ce fait, à l'ordre dominant, l'évolution ne dépend que du *volume injecté* et pas de la vitesse de chargement (débit injecté) ni de la viscosité du fluide. Cette évolution est présentée dans la figure 2 pour $\Gamma_c = 4.5$.

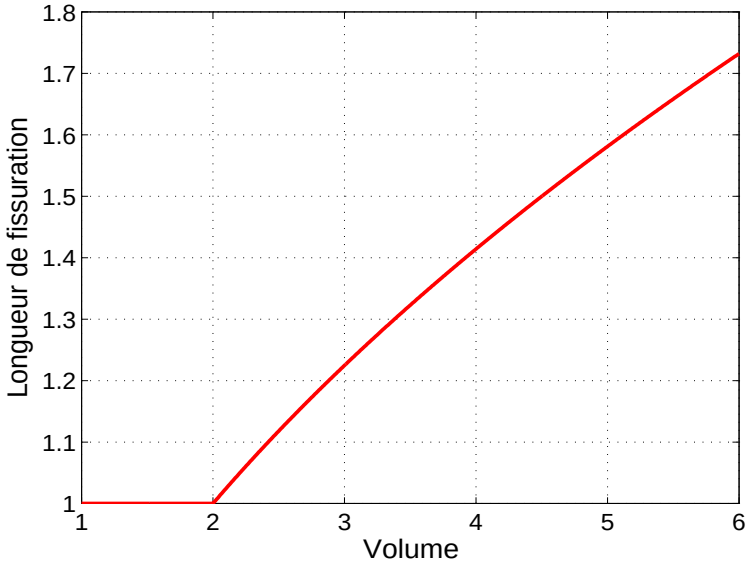

FIGURE 2 – Évolution de la longueur de décollement ℓ_0 à l'ordre dominant en fonction du volume de fluide injecté, pour $\Gamma_c = 4.5$.

À partir de la connaissance de la solution à l'ordre dominant, la résolution à l'ordre suivant peut aussi être obtenue de façon explicite. Les termes de correction apparaissant à cet ordre dépendent explicitement du débit injecté $q(t)$, de l'indice d'écoulement n ainsi que de la vitesse de propagation de la fissure $\dot{\ell}_0$ de l'ordre dominant. Les expressions de la solution à l'ordre 1 ne sont pas données ici afin d'alléger la présentation.

5 Résultats et discussion

Sur la figure 3 est représentée l'évolution de la longueur de fissure en considérant un chargement défini par

$$q(t) = \begin{cases} 1+\cos(\pi(t-1)), & \text{pour} \quad t < 2, \\ 0, & \text{pour} \quad t \geq 2, \end{cases} \tag{12}$$

pour $\varepsilon = 0.1$, $\Gamma_c = 1.125$ et pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n du fluide, Dans cette ensemble de courbes, on peut remarquer l'existence d'un retard dans l'évolution de la fissuration, dont l'amplitude dépend fortement de n. En particulier, lorsque n tend vers 0 (cas d'un fluide parfaitement plastique), le terme correctif est négligeable et l'évolution tend vers la solution donnée uniquement par l'ordre dominant. Mais par contre lorsque n tend vers 1, la prise en compte des termes de correction est

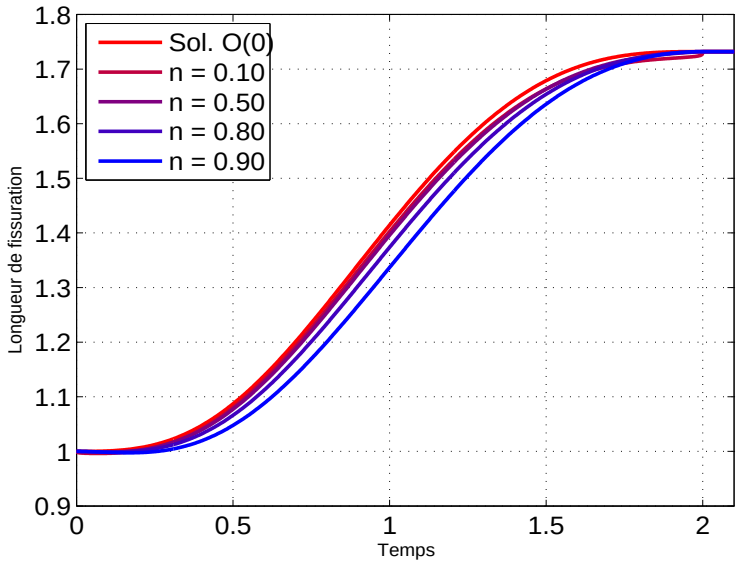

FIGURE 3 – Évolution de la longueur de fissuration $\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$ pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n, pour $\Gamma_c = 1.125$.

nécessaire ; en particulier ceux-ci rendent compte d'un retard dans le décollement du film comparée à la solution purement quasi-statique.

Pour rendre compte de l'influence de l'amplitude du débit sur le retard, on définit un chargement du type

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \sin^2\left(\pi \frac{t}{T_c}\right), & \text{pour} \quad t < T_c, \\ 0, & \text{pour} \quad t \geq T_c, \end{cases} \tag{13}$$

où $T_c = 2V_i/q_0$ est le temps nécessaire pour injecter un volume de fluide V_i à débit q_0. Ainsi on injecte le même volume total de fluide mais pour différentes amplitudes (et donc différents temps d'injection). On se donne le jeu de paramètres suivant : $n = 0.9, \varepsilon = 0.05$ et $\Gamma_c = 1.125$. On trace l'évolution de la longueur de fissuration et du déplacement du film pour différents valeurs de q_0, voir figures 4 et 5.

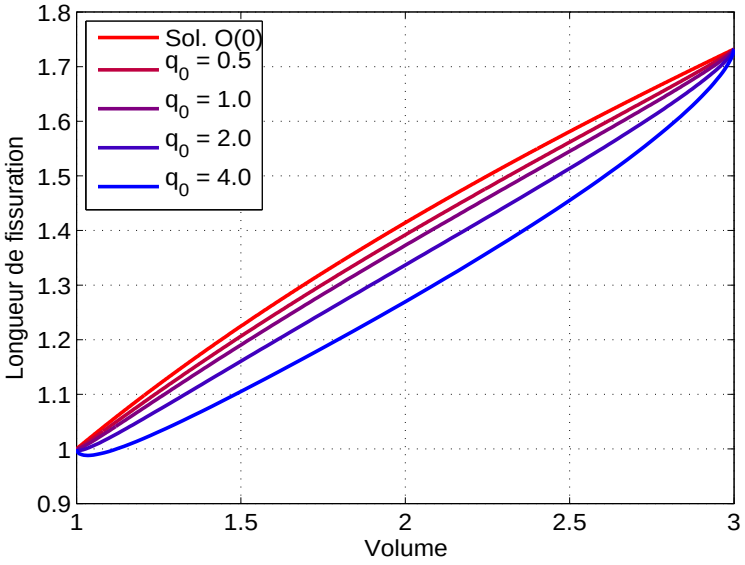

FIGURE 4 – Évolution de la longueur de fissuration $\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$ en fonction du volume V_i pour différentes valeurs de q_0, pour $\Gamma_c = 1.125$.

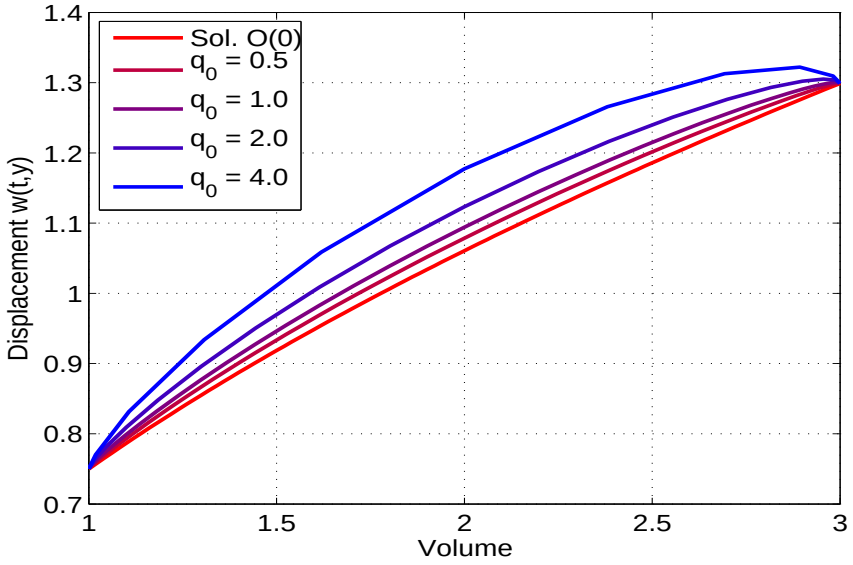

FIGURE 5 – Évolution de la hauteur du point central $w = w_0 + \varepsilon w_1$ en fonction du volume V_t pour différentes valeurs de q_0, pour $\Gamma_c = 1.125$.

On observe alors que si le débit d'injection du fluide est assez faible, la solution à l'ordre dominant est une représentation assez bonne pour l'évolution de la fissuration. Mais dès qu'on considère des amplitudes de débit importantes, la correction apporté à l'ordre suivant et qui tient compte de la viscosité du fluide ne peut plus être négligée.

D'après les figures 4 et 5, on peut conclure que à mesure que l'amplitude du débit injecté croît, le système a tendance à préférer déformer le film plutôt que de le décoller. En effet, la longueur de décollement étant plus petite à mesure que le débit augmente, le déplacement vertical du film au point d'injection est nécessairement plus grand afin de conserver un même volume de fluide. Enfin, en stoppant l'injection du fluide, les solutions aux différentes amplitudes convergent toutes vers la même solution à l'équilibre i.e. la solution *quasi-statique*.

Par ailleurs, le comportement du modèle autour du volume critique V_c mérite quelques remarques. Pour cela, on donne (sans le détail des calculs) l'expression analytique du terme de décollement correcteur $\ell_1(t)$:

$$\ell_1(t) = -\frac{\ell_0^4}{6V}\int_0^1 \frac{y}{(1-y^2)^n}\left(\alpha\frac{(2+y)(1-y)}{(1+y)} + \beta y\right)^n dy,$$

qui dépend explicitement des fonctions du temps

$$\alpha(t) = \frac{4q\ell_0^2}{9V^2}\left(\frac{4\ell_0^2}{3V}\right)^{1/n}, \qquad \beta(t) = \frac{4\ell_0\dot{\ell}_0}{3V}\left(\frac{4\ell_0^2}{3V}\right)^{1/n}.$$

Une remarque importante porte sur la continuité de $\beta(t)$ lorsque $V(t) = V_c$. D'après l'analyse à l'ordre dominant, $\beta(t) = 0$ si $V(t) \leq V_c$ et $\beta(t) = \frac{3q(t)}{4\ell_0^2\Gamma_c}\left(\frac{4\ell_0^2}{3V}\right)^{1/n}$ si $V(t) > V_c$. Si la valeur du débit injecté à l'instant où le volume atteint le volume critique est non nulle, la fonction $\beta(t)$ est ainsi discontinue à cet instant. Cela se traduit alors par une discontinuité de $\ell_1(t)$ au point critique en raison de la dépendance de ℓ_1 par rapport β. On remarque par ailleurs qu'en général $\ell_1(t) \leq 0$, ce qui empêche la *condition d'irréversibilité* de la longueur de fissuration d'être satisfaite près du volume critique. Ce comportement est représenté sur la figure 6. Il correspond à une limitation du *modèle à grande ténacité*, qui néglige l'existence d'un décalage entre le front de fissure et le front d'avancée de l'écoulement.

Après avoir déterminé les termes correctifs pour la longueur de fissuration, on calcule la forme corrigée du film et la pression corrigée au sein du fluide. Par exemple, si l'on fixe $\Gamma_c = 4.5, \varepsilon = 0.1$ et $n = 0.95$, on peut observer l'influence de la vitesse de chargement q sur la forme du film w et la pression du fluide p sur la figure 7.

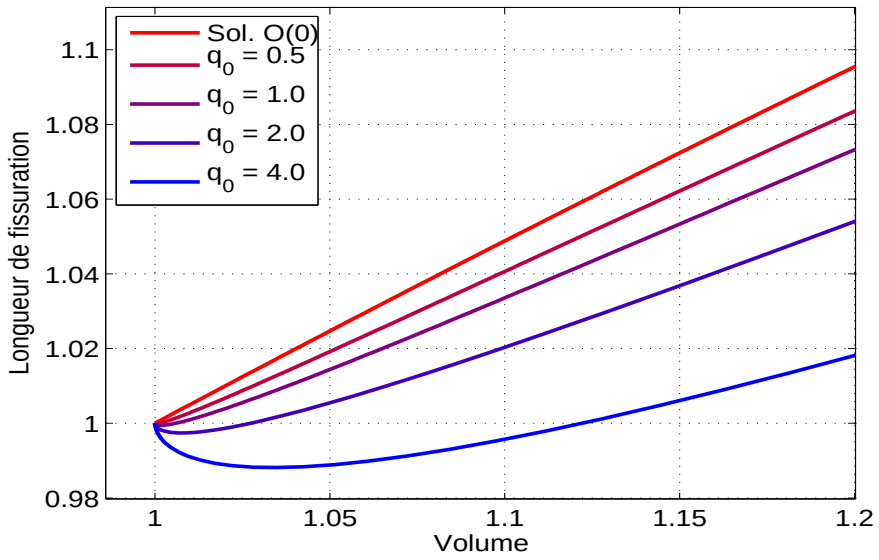

FIGURE 6 – Évolution de la longueur de fissuration $l = l_0 + \varepsilon l_1$ en fonction du volume V_t pour différentes valeurs de q_0, pour $\Gamma_c = 1.125$.

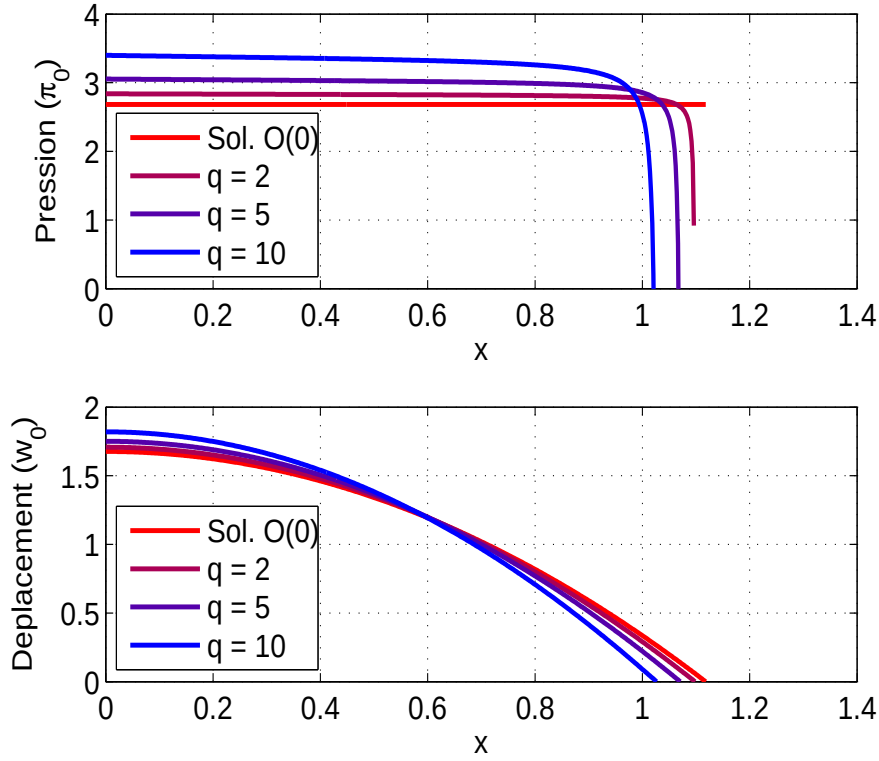

FIGURE 7 – Pression du fluide p et forme du film w pour $V = 2.5$, $q = \{2,5,10\}$ et $\Gamma_c = 4.5$.

Un résultat intéressant est la singularité de la pression $\mathrm{p}(t,x) = O(log(1-x))$ près du front de propagation de la fissure ($x \to 1$) qui n'est pas retrouvé à l'ordre $O(1)$ mais à l'ordre $O(\varepsilon)$ et qui dépend fortement du débit $q(t)$. Cette singularité a déjà été décrite par Detournay [9] dans un contexte diffèrent. Liée à l'hypothèse de solidarité entre le film et le fluide, elle montre encore une fois la limitation du modèle.

Un autre cas intéressant à analyser est le cas $n = 1$ (fluide newtonien). Dans ce cas, l'ensemble des

équations décrivant le problème unidimensionnel n'a pas de solution analytique car le taux de restitution d'énergie G devient infini, ce qui rend la valeur de ℓ_1 indéterminée. Ce problème disparaît lorsqu'on s'intéresse à des géométries bidimensionnelles ou tridimensionnelles [9]. Les équations gouvernant l'élasticité du solide ne nécessitent alors en effet pas l'introduction de la puissance n pour assurer la convergence de G et P.

Références

[1] Y. Aoki, M. Taeko, T. Ohminato, Y. Nagaoka, K. Nishida. *Magma pathway and its structural controls of Asama Volcano, Japan*. Geological Society, London, Special Publications, 380, 67–84, 2013.

[2] R. Chhabra, J. Richardson. *Non-Newtonian flow in the process industries*. Butterworth-Heinemann. 1999.

[3] D. Garagash, E. Detournay. *The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium*. Journal of applied mechanics 67, ASME, 183-192, 2000.

[4] A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical transactions of the royal society of london, series A, containing papers of a mathematical or physical character Vol 221. The royal society, 163-198. 1921.

[5] Y. Hayashi, Y. Morita. *An image of magma intrusion process inferred from precise hypocentral migration of the earthquake swarm east of the Izu Peninsula*. Geophysical Journal International, 153, 159–174, 2003.

[6] A.M. Linkov. *Analytical solution of hydraulic fracture problem for a non-Newtonian fluid*. Journal of Mining Science 49, Pleiades Publishing Ltd, 8-18, 2013.

[7] B. Lister, R. Kerr. *Fluid-Mechanical Models of Crack Propagation and their Application to Magma Transport in Dykes*. Journal of Geophysical Research 96, 10049-10077. 1991.

[8] F. Maccaferri, M. Bonafede, E. Rivalta. *A quantitative study of the mechanicms governing dike propagation, dike arrest and sill formation*. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 2008, 39–50. 2011.

[9] A. Savitski, E. Detournay. *Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock : asymptotic solutions*. International Journal of Solids and Structures 39, 6311-6337, 2002.

[10] B. Taisne, C. Jaupart. *Dike propagation through layered rocks*. Journal of Geophysical Research, 114, 2009.

[11] B. Taisne, S. Tait, C. Jaupart. *Conditions for the arrest of a vertical propagating dyke*. Bulletin of Volcanology, 73, 191-204. 2011.