

***Modèles asymptotiques pour la propagation des
ondes
dans des milieux comportant des fentes***

Patrick Joly — Sébastien Tordeux

N° 5568

Mai 2005

THÈME 4



***apport
de recherche***

Asymptotic models for wave propagation in media including slots

Patrick Joly, Sébastien Tordeux

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projets Ondes

Rapport de recherche n° 5568 — Mai 2005 — 54 pages

Abstract: In this report, we consider the propagation of acoustic waves in a media including a thin slot. We propose an approximate model, which permits us to reduce the slot to its mean surface. We perform a detailed mathematical analysis (stability, error estimates) in a particular academic case.

Key-words: acoustic waves, thin slot, asymptotic analysis, effective model

Modèles asymptotiques pour la propagation des ondes dans des milieux comportant des fentes

Résumé : Dans ce rapport, nous nous intéressons à la propagation d'ondes acoustiques dans des milieux comportant des fentes minces. Nous proposons un modèle approché permettant de ramener la fente mince à sa surface moyenne et nous menons une analyse détaillée de ce modèle approché (stabilité et estimation d'erreur), dans un cas académique particulier.

Mots-clés : ondes acoustiques, fente mince, analyse asymptotique, modèle équivalent

Table des matières

1	Introduction et position du problème	4
2	Construction des problèmes approchés	8
2.1	Le cas de la fente droite finie	8
2.2	Le cas d'une fente courbe finie à section constante	10
2.3	Un problème modèle pour l'analyse asymptotique : la fente droite semi-infinie. . .	13
3	Convergence vers le problème limite et estimation de l'erreur	17
3.1	Reformulation du problème exact dans Ω	17
3.2	Un résultat de stabilité	20
3.3	Analyse de consistance et estimation d'erreur	23
3.3.1	Résultats préliminaires sur B_0^ε	24
3.3.2	Résultats préliminaires sur R^ε	27
3.3.3	Preuves des estimations de consistance	29
4	Analyse de l'erreur d'approximation du modèle	31
4.1	Reformulation du problème approché dans Ω	31
4.2	Etude de la convergence de $\tilde{u}^\varepsilon$ vers u^0	31
4.2.1	Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ en norme $H^1(\Omega)$	32
4.2.2	Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ en norme $H^{1+s}(\Omega)$	33
4.2.3	Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ dans $L^2(\Omega)$	34
4.2.4	Caractère optimal des estimations	34
4.3	Etude de l'approximation de u^ε par $\tilde{u}^\varepsilon$	38
4.3.1	Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ en norme $H^1(\Omega)$	38
4.3.2	Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ en norme $L^2(\Omega)$	39
4.3.3	Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ dans des domaines évitant la fente	40
4.3.4	Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ dans la fente	42
4.4	Récapitulatif	45
A	Ansatz du problème de la fente courbe à section constante	47
B	Régularité de u^0	49
C	Estimation locale optimale dans le cas d'une condition transparente	52
	Bibliographie	54

1 Introduction et position du problème

Un des enjeux de l'analyse numérique actuelle, est la résolution, au sein d'un même problème, de phénomènes de nature différente. Nous pouvons citer par exemple :

- l'étude du couplage de deux phénomènes physiques, dû à la présence de deux milieux différents comme le couplage fluide-structure, ou à deux phénomènes au sein d'un même milieu comme les équations d'advection-convection ;
- l'étude du couplage de deux méthodes différentes, par exemple le couplage entre une méthode d'éléments finis et une méthode spectrale ou plus simplement entre des éléments finis de nature différente ;
- l'étude d'un problème physique mettant en jeu des domaines de longueurs caractéristiques totalement différentes.

C'est à cette troisième perspective que nous allons nous intéresser ici.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude de la propagation des ondes dans des milieux comportant des fentes. Ces problèmes auront grossièrement la géométrie suivante :

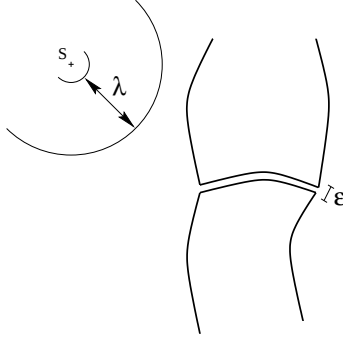


FIG. 1: Expérience modèle

Nous sommes ici face à une source S , rayonnant une onde de longueur d'onde λ dans le domaine correspondant à la partie gauche de la figure 1. Cette onde sera à la fois réfléchie par la paroi et transmise à travers la fente, ayant pour hauteur ε , vers le côté droit.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse asymptotique où l'épaisseur ε est petite devant la longueur λ :

$$\varepsilon \ll \lambda. \quad (1.1)$$

Ce type de problème a de nombreuses applications que l'on peut séparer en deux catégories :

- l'étude de la transmission de l'onde qui s'intéresse à la forme ainsi qu'à l'amplitude de l'onde transmise à travers la fente. On citera par exemple dans le domaine acoustique l'insonorisation des voitures : une partie des nuisances sonores pénétrant à l'intérieur de l'habitacle d'une voiture, provient de la jonction qui sépare les portes des ailes de cette voiture. Dans le domaine électromagnétique, que ce soit pour une voiture qui passe sous une ligne haute tension, ou pour un engin spatial soumis à de forts rayonnements lors de la rentrée dans l'atmosphère, il est important d'assurer un blindage électromagnétique efficace. Ce n'est qu'à ce prix que l'on assure l'intégrité du matériel embarqué.
- l'étude de la diffraction qui s'intéresse à la modification du champ extérieur du fait de la présence de la fente. L'application principale est la détection, que ce soit acoustique pour les sonars ou électromagnétique pour les radars.

A terme il faudrait développer des méthodes de résolution fiables et robustes permettant de calculer de manière rapide une approximation correcte de la solution. Les méthodes classiques de discrétisation numérique amène à mailler en espace avec un pas qui sera de l'ordre de grandeur de la plus petite longueur caractéristique c'est à dire ε , et ceci impliquera, surtout dans le domaine temporel (condition CFL), un temps de calcul bien trop élevé. Nous voyons donc l'utilité de développer une approche adaptée au problème. Nous avons pour cela deux voies naturelles :

- La première idée consiste à effectuer un raffinement de maillage local. On effectue un maillage fin à l'intérieur de la fente et plus grossier à l'extérieur. Ce procédé se heurte toutefois des problèmes techniques. Nous n'étudierons pas ces méthodes, on pourra se référer à [1, 2].
- Une seconde alternative consiste à introduire des modèles approchés lorsque ε est petit. Ces modèles approchés devront permettre de ne pas avoir à raffiner dans le voisinage de la fente. L'idée est ici d'effectuer un couplage entre un problème unidimensionnel (la fente) et deux problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels (les deux demi-espaces de propagation).

C'est cette deuxième approche que nous choisissons. Cette technique de modélisation a déjà été introduite dans la littérature pour diverses applications dans le passé. Pour notre problème spécifique, ce sont les ingénieurs qui ont effectué la plus grosse contribution. On pourra par exemple examiner [3] pour une bibliographie extensive dans le cas de l'électromagnétisme. Ces méthodes, souvent décrites seulement au niveau des schémas numériques, n'ont pas eu pour l'instant à notre connaissance de justifications mathématiques. On peut trouver en mécanique, pour des problèmes certes différents mais possédant la même problématique, des contributions dues à des mathématiciens. Nous pensons notamment à la justification des équations de plaques et de coques [4, 5, 6]. Nous nous proposons ici d'effectuer un travail d'analyse mathématique ayant pour but de valider un modèle asymptotique.

Rentrons maintenant dans le vif du sujet et introduisons un jeu d'équations aux dérivées partielles permettant de décrire notre problème. Parmi les différentes équations servant à modéliser la propagation d'ondes, (équations de Maxwell, équation de propagation acoustique en vitesse, équation de propagation des ondes dans les solides, à coefficients variables ou constants...) nous choisissons classiquement d'étudier le problème modèle : l'équation de propagation d'onde scalaire normalisée ($c = 1$)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F. \quad (1.2)$$

Cette équation modélise, par exemple, la propagation des ondes acoustiques ($u =$ pression), ou encore régit l'évolution des composantes transverses des champs électriques et magnétiques pour les ondes électromagnétiques 2D ($u = E_t$ ou B_t). De plus, cette équation simple semble être suffisante pour réussir à dégager les bonnes idées permettant de traiter notre classe de problème.

Le problème physique est posé en régime temporel. Nous allons ici faire l'hypothèse que le régime permanent est établi et que le champ $U(x, t)$ ainsi que le terme source $F(x, t)$ s'expriment sous la forme suivante (régime harmonique), où ω est la pulsation donnée du problème :

$$\begin{cases} U(x, t) = u(x) \times \exp(i \omega t), \\ F(x, t) = f(x) \times \exp(i \omega t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Cette dépendance temporelle nous mène classiquement à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + \omega^2 u = -f. \quad (1.4)$$

Comme la longueur d'onde vaut $\lambda = 2\pi/\omega$ la condition asymptotique se réécrit :

$$\omega \varepsilon \ll 2\pi. \quad (1.5)$$

Les obstacles se modélisent en général à l'aide de conditions aux limites homogènes. Nous pouvons en considérer de différents types. Nous citerons par exemple :

- la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0,$$

- la condition de Neumann homogène

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

- les conditions mixtes

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, \quad \text{où } \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \text{Im}(\beta) > 0.$$

Ces conditions s'expriment toutes sur la frontière de l'obstacle Γ .

Parmi ces trois conditions, seule la condition de Neumann assure l'existence pour tout ε d'un mode propagatif à l'intérieur de la fente. En effet, les deux autres conditions entraînent une décroissance exponentielle de la solution à l'intérieur de la fente. Dans ces deux cas, une très bonne approximation de la solution dans la fente sera la fonction nulle. Nous nous plaçons donc dans le cas physiquement le plus intéressant de la condition aux limites de Neumann.

Dans le cadre des applications physiques, la condition de Neumann correspond à un bord parfaitement mou pour la propagation des ondes de pression, et parfaitement conducteur pour la propagation du champ magnétique transverse.

A priori, il est nécessaire pour fermer notre système d'équations d'introduire une condition d'onde sortante à l'infini appelée condition de radiation (voir [7, 8]). Toutefois nous nous contenterons d'introduire une approximation de ces conditions appelée condition absorbante que nous imposerons sur une frontière fictive Γ_f :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + i \omega u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_f.$$

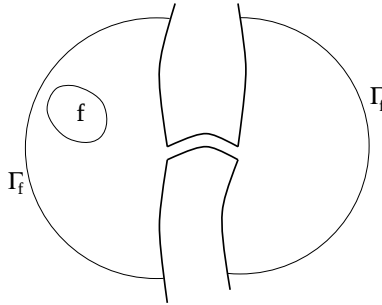


FIG. 2: Frontière fictive

Insistons toutefois sur le fait que ce choix facilite un peu les preuves des théorèmes mais n'enlève rien à la généralité de notre analyse.

Le terme source sera supposé à support compact ne rencontrant pas l'embouchure de la fente. Ceci nous permettra d'affirmer que les irrégularités de la solution à l'embouchure de la fente n'est pas le fait du terme source mais bien de la géométrie du problème. Cette hypothèse est importante et il ne faudra pas l'oublier dans la suite.

Bien que la motivation de ce travail soit avant tout numérique, le contenu de ce rapport est exclusivement mathématique. Nous avons cependant effectué des tests numériques convaincants que nous montrerons dans un prochain rapport.

Après cette courte introduction nous présentons le plan de ce travail :

Le chapitre 2 est relatif à la construction formelle des modèles approchés sur 3 géométries modèles. Nous étudierons dans l'ordre : au paragraphe 2.1 la fente droite finie, au paragraphe 2.2 la fente courbe finie de hauteur constante et au paragraphe 2.3 le cas de la fente droite semi-infinie. C'est sur ce dernier cas, le plus académique, que nous effectuerons une analyse fine dans les parties suivantes.

Le chapitre 3 concerne l'analyse de la convergence de la solution exacte u^ε vers la solution du problème sans fente u^0 . Ce résultat de convergence est énoncé au théorème 3.11. La démarche de cette preuve est de type perturbative et se base sur un raisonnement de stabilité (paragraphe 3.2) consistant (paragraphe 3.3).

Le chapitre 4 constitue le coeur de l'étude. On s'intéresse à l'analyse de l'approximation du modèle exact par le modèle approché introduit au paragraphe 2.3.

- Nous démontrons au paragraphe 4.1 l'existence et l'unicité de la solution, notée $\tilde{u}^\varepsilon$, du modèle approché ;
- Nous effectuons au paragraphe 4.2 l'analyse de la convergence de la solution du modèle approché $\tilde{u}^\varepsilon$ vers la solution du problème sans fente u^0 . Ce résultat apparaît comme un intermédiaire nécessaire pour la suite ;
- Au paragraphe 4.3, nous étudions l'erreur commise par le modèle approché (on étudie ici la différence $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$). Nous obtenons tout d'abord des estimations hors de la fente en norme H^1 et L^2 ainsi que des estimations dans des domaines évitant la fente, puis des estimations en norme L^2 et H^1 dans la fente.
- Ce chapitre se termine par le paragraphe bilan 4.4 ; nous récapitulons les résultats sous forme de tableaux.

2 Construction des problèmes approchés

2.1 Le cas de la fente droite finie

Commençons par décrire la géométrie du problème et introduire les principales notations. Le

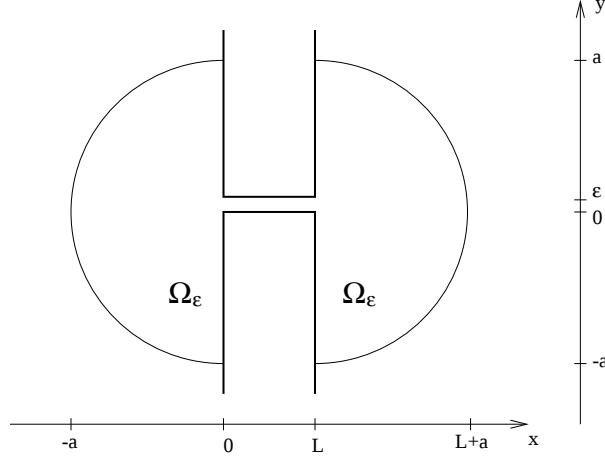


FIG. 3: Géométrie de la fente droite finie

domaine de propagation Ω_ε (on rappelle que ε est un petit paramètre) se décompose en :

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \Omega \cup \mathcal{O}_\varepsilon, \\ \Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \\ \mathcal{O}_\varepsilon = [0, L] \times]0, \varepsilon[. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les domaines Ω^- et Ω^+ sont définis par :

$$\begin{cases} \Omega^- = \{x \in]-\infty, 0[\times \mathbb{R}, |x| < a\}, \\ \Omega^+ = \{x \in]L, +\infty[\times \mathbb{R}, |x - x_L| < a\}, \text{ avec } x_L = (L, 0). \end{cases} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, on partitionne les frontières de Ω_- et Ω_+ :

$$\begin{cases} \partial\Omega^- = \Gamma^- \cup \Gamma_f^-, & \Gamma^- = \{(0, y), |y| < a\}, \\ \partial\Omega^+ = \Gamma^+ \cup \Gamma_f^+, & \Gamma^+ = \{(L, y), |y| < a\}, \end{cases} \quad (2.3)$$

et on pose :

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+, \\ \Gamma_f = \Gamma_f^- \cup \Gamma_f^+. \end{cases} \quad (2.4)$$

Enfin nous poserons (avec $\varepsilon \ll a$, a étant un paramètre de l'ordre de la longueur d'onde) :

$$\begin{cases} \Sigma_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon^- \cup \Sigma_\varepsilon^+, \\ \Sigma_\varepsilon^- = \{(0, y) \in \Gamma^-, 0 \leq y \leq \varepsilon\} = \partial\mathcal{O}_\varepsilon \cap \Gamma^-, \\ \Sigma_\varepsilon^+ = \{(L, y) \in \Gamma^+, 0 \leq y \leq \varepsilon\} = \partial\mathcal{O}_\varepsilon \cap \Gamma^+. \end{cases} \quad (2.5)$$

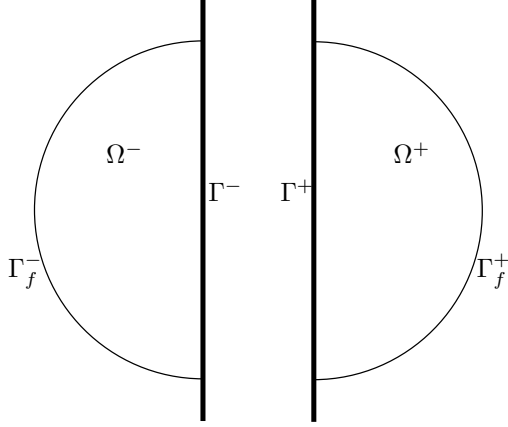


FIG. 4: Les domaines fixes pour la fente droite finie



FIG. 5: La fente droite finie

Rappelons tout d'abord les équations du problème initial :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + i\omega u^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_f. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le second membre f est supposé à support dans Ω .

Pour construire, au moins formellement, le problème approché, l'idée toute bête consiste à écrire que dans la bande $\mathcal{O}_\varepsilon$, la solution u^ε est indépendante de la variable transverse y (on notera qu'une telle solution satisfait bien les conditions de Neumann homogènes sur $\partial\mathcal{O}_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon$) :

$$u^\varepsilon(x, y) \sim U^\varepsilon(x), \quad \text{dans } \mathcal{O}_\varepsilon, \quad (2.7)$$

auquel cas la fonction U^ε satisfait bien entendu l'équation de Helmholtz 1D homogène :

$$-\frac{d^2 U^\varepsilon}{dx^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad (2.8)$$

ce qui conduit à formuler un problème couplé 2D-1D de la forme (nous désignons dorénavant par $\tilde{u}^\varepsilon$ la solution approchée dans Ω) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow C \text{ et } U^\varepsilon : I \rightarrow C \text{ tels que :} & \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ -\frac{d^2 U^\varepsilon}{dx^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, & \text{sur } I, \\ + \text{conditions de raccord 2D-1D (2.10) et (2.11).} & \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Les conditions de raccord 1D-2D restent bien entendu à préciser. Il s'agit de traduire le raccord en valeur et en dérivée normale (nous parlerons de raccord Dirichlet et Neumann) de la solution exacte u^ε à travers Σ_ε . La difficulté est alors double :

- D'une part, Σ_ε n'a pas de sens pour U^ε : seules les extrémités 0 et L du segment ont un sens.
- D'autre part, on ne peut pas imposer la valeur de $\tilde{u}^\varepsilon$ ou de sa dérivée normale aux seuls points $(0, 0)$ et $(0, L)$ de Γ .

La solution que nous proposons, assez naturelle, consiste à imposer un raccord en moyenne. Pour le raccord Dirichlet, nous écrivons simplement que :

$$U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad U^\varepsilon(L) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} \tilde{u}^{\varepsilon,0} d\sigma, \quad (2.10)$$

alors que pour le raccord de Neumann nous écrivons que la dérivée normale de $\tilde{u}^\varepsilon$ est constante le long de Σ_ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{dx}(0), & \text{sur } \Sigma_\varepsilon^-, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = -\frac{dU^\varepsilon}{dx}(L), & \text{sur } \Sigma_\varepsilon^+. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le problème aux limites ((2.9),(2.10),(2.11)) est un "bon" problème aux limites dans la mesure où il admet une formulation variationnelle dans l'espace :

$$H^1(\Omega) \times H^1(I). \quad (2.12)$$

Plus exactement, le bon espace de Hilbert de travail est le sous-espace fermé de $H^1(\Omega) \times H^1(I)$ dans lequel on impose la condition (2.10) :

$$W_\varepsilon = \{(v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H^1(I) / V^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} v^\varepsilon d\sigma, V^\varepsilon(L) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} v^\varepsilon d\sigma\}. \quad (2.13)$$

Il est alors facile de voir que le problème ((2.9),(2.10),(2.11)) est équivalent au problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\tilde{u}^\varepsilon, U^\varepsilon) \in W_\varepsilon \text{ tels que :} \\ a_\Omega(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon a_I(U^\varepsilon, V^\varepsilon) = L(v^\varepsilon), \quad \forall (v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in W_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.14)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} a_\Omega(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) dx + i\omega \int_{\Gamma_f} u \bar{v} d\sigma, & \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \\ a_I(U, V) = \int_I \left(\frac{dU}{dx} \frac{d\bar{V}}{dx} - \omega^2 U \bar{V} \right) dx, & \forall (U, V) \in H^1(I)^2, \\ L(v) = \int_\Omega f \bar{v} dx, & \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.15)$$

C'est un simple exercice sur l'alternative de Fredholm de montrer que le problème (2.14) est bien posé. Bien entendu, ce problème se prête aisément à une approximation par éléments finis et est donc "facile" à traiter numériquement.

2.2 Le cas d'une fente courbe finie à section constante

Dans ce cas, nous supposons que le domaine de propagation Ω_ε est toujours définie par (2.1) mais cette fois, la fente courbe $\mathcal{O}_\varepsilon$ est définie différemment, ce qui nécessite d'introduire un petit peu de

géométrie. On part d'une courbe $\mathcal{C}$ de longueur finie $\tilde{L} \geq L$ que l'on paramétrise par son abscisse curviligne s :

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} = F(s), s \in]0, \tilde{L}[\}, \quad (2.16)$$

où la fonction $F \in C^2([0, \tilde{L}]; \mathbb{R}^2)$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall s \in]0, \tilde{L}[, & |F'(s)| = 1, \\ F(0) = (0, 0), & F(\tilde{L}) = (h, L) \quad \text{pour un certain } h \in \mathbb{R}, \\ F'(0) = F'(\tilde{L}) = (1, 0), \\ \forall s \in]0, \tilde{L}[, & F \text{ est injective de }]0, \tilde{L}[\text{ dans }]0, L[\times \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.17)$$

Dans (2.17), la seconde ligne indique que la courbe $\mathcal{C}$ connecte les deux demi-espaces composant Ω , la troisième exprime qu'en ses deux extrémités la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la direction x et la quatrième, que cette courbe est sans point double et ne pénètre pas dans Ω . On introduit

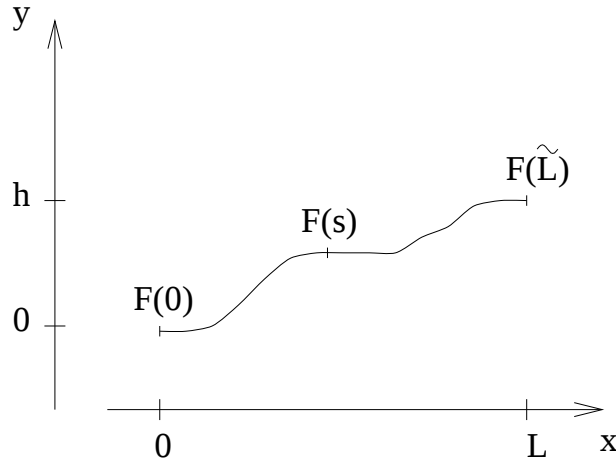


FIG. 6: La paramétrisation de la fente courbe (1)

les vecteurs unitaires tangents et normaux à la courbe $\mathcal{C}$ ((F_x, F_y) désignant les deux composantes de F :

$$t(s) = F'(s) = (F'_x(s), F'_y(s)), \quad n(s) = (-F'_y(s), F'_x(s)). \quad (2.18)$$

On notera en particulier que les vecteurs normaux aux deux extrémités de la courbe sont orientés dans la direction $y > 0$:

$$n(0) = n(\tilde{L}) = (0, 1). \quad (2.19)$$

Nous introduisons la courbure $c(s)$ (et donc le rayon de courbure $R(s) = |c(s)|^{-1}$) :

$$c(s) = F''_x(s) F'_y(s) - F'_x(s) F''_y(s), \quad (2.20)$$

et désignons par R_* le rayon de courbure minimum :

$$R_* = \min_{s \in]0, \tilde{L}[} R(s) > 0. \quad (2.21)$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, nous introduisons la transformation :

$$\begin{cases} \Phi :]0, \tilde{L}[\times]0, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (s, \nu) \longmapsto F(s) + \nu n(s). \end{cases} \quad (2.22)$$

Le Jacobien de cette transformation étant donné par :

$$J_{\Phi}(s) = 1 - \nu c(s), \quad (2.23)$$

dès que ε est assez petit, à savoir dès que :

$$\varepsilon < R_*, \quad (2.24)$$

l'application Φ est localement inversible au voisinage de tout point de $]0, \tilde{L}[\times]0, \varepsilon[$ et par conséquent, la courbe $\mathcal{C}$ étant sans point double et globalement injective, nous pouvons maintenant décrire l'ouvert $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ par :

$$\mathcal{O}_{\varepsilon} = \{ \mathbf{x} = \Phi(s, \nu), s \in]0, \tilde{L}[, \nu \in]0, \varepsilon[\}. \quad (2.25)$$

Dès que la condition (2.24) est satisfaite, le couple (s, ν) fournit donc un système de coordonnées locales dans $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ (voir figure F), Φ étant alors une bijection de $]0, \tilde{L}[\times]0, \varepsilon[$ dans $\mathcal{O}_{\varepsilon}$. En particulier, une fonction u définie dans $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ pourra être assimilée à une fonction $u(s, \nu)$ (nous ne changeons pas de notation pour simplifier). On notera que la frontière de $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ se décrit comme suit :

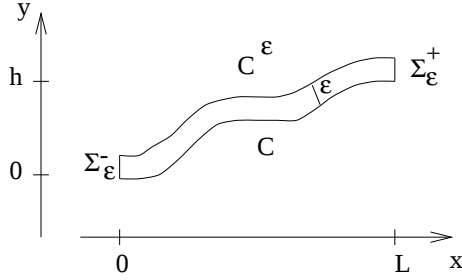


FIG. 7: la paramétrisation de la fente courbe (2)

$$\begin{cases} \partial \mathcal{O}_{\varepsilon} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\varepsilon} \cup \Sigma_{\varepsilon}^{-} \cup \Sigma_{\varepsilon}^{+} \\ \Sigma_{\varepsilon}^{-} = \{ (0, y), y \in [0, \varepsilon] \}, \quad \Sigma_{\varepsilon}^{+} = \{ (L, y), y \in [h, h + \varepsilon] \} \\ \mathcal{C}_{\varepsilon} = \{ x = \Phi(s, \varepsilon), s \in]0, \tilde{L}[\}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Le problème à résoudre est alors toujours décrit par (2.6) et il est donc utile de rappeler l'expression du Laplacien dans ce système de coordonnées :

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial s} \left([1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left([1 + \nu c(s)] \frac{\partial u}{\partial \nu} \right). \quad (2.27)$$

L'idée pour construire le modèle approché reste la même et consiste à supposer que, en première approximation, la solution reste constante dans une section droite $s = \text{constante}$. Autrement dit, on fait l'approximation :

$$u^{\varepsilon}(s, \nu) \sim U^{\varepsilon}(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(s, \nu) d\nu, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.28)$$

Pour obtenir l'équation vérifiée par U^{ε} , on commence par intégrer par rapport à la variable ν l'équation :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left([1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left([1 + \nu c(s)] \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu} \right) - \omega^2 u^{\varepsilon} = 0. \quad (2.29)$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \varepsilon) = 0, \quad (2.30)$$

on obtient tout d'abord :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} d\nu \right) - \omega^2 U^\varepsilon = 0. \quad (2.31)$$

et en réinjectant l'approximation (2.28), on aboutit à l'équation 1D :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\varepsilon c(s)} \operatorname{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 U^\varepsilon = 0. \quad (2.32)$$

Le modèle approché que nous proposons s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \text{ et } U^\varepsilon : I =]0, \tilde{L}[\rightarrow \mathbf{C} \text{ tels que :} \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\varepsilon c(s)} \operatorname{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 U^\varepsilon = 0, & \text{sur } I, \\ + \text{conditions de raccord 2D-1D (2.10) et (2.11).} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Remarque 2.1 Il est aussi possible d'obtenir de nouveaux modèles en effectuant un développement de l'équation (2.27) posée sur la fente (on se référera à l'annexe A pour plus de détails). On obtiendra par exemple à l'ordre 0 l'équation des ondes unidimensionnelles :

$$-\frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial s^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad (2.34)$$

ou à l'ordre 1 :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\left[1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad (2.35)$$

et à l'ordre 2 :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\left[1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} + \frac{\varepsilon^2 (c(s))^2}{3} \right] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 U^\varepsilon = 0. \quad (2.36)$$

Pour les ordres supérieurs on peut remarquer que U^ε dépend alors de la variable normale et donc le développement a dans notre optique un peu moins de sens.

Remarquons, à posteriori, que ces modèles correspondent à un développement limité du modèle (2.33), en effet :

$$\operatorname{Log}[1 + \varepsilon c(s)] = \varepsilon c(s) - \frac{\varepsilon^2 c(s)^2}{2} + \frac{\varepsilon^3 c(s)^3}{3} + o(\varepsilon^3 c(s)^3). \quad (2.37)$$

2.3 Un problème modèle pour l'analyse asymptotique : la fente droite semi-infinie.

Pour l'analyse asymptotique qui va suivre, nous allons nous concentrer sur le problème modèle qui consiste à supposer que le domaine Ω est réduit au domaine $\Omega = \Omega^-$ qui débouche sur une fente droite semi-infinie. Autrement dit :

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \mathbb{R}^+ \times]0, \varepsilon[. \quad (2.38)$$

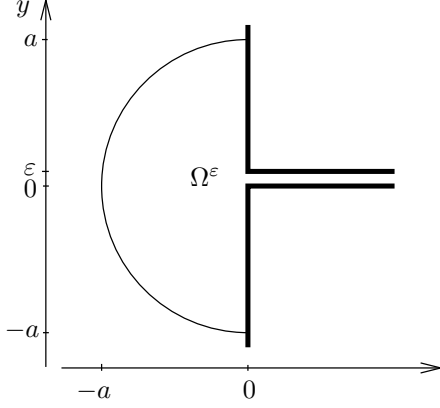


FIG. 8: Géométrie de la fente droite semi-infinie

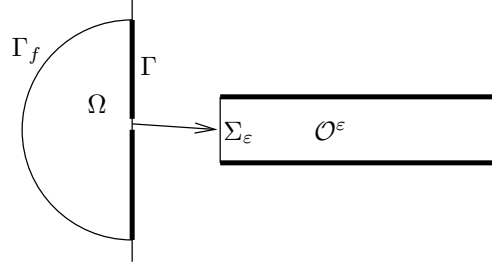


FIG. 9: Domaine fixe et fente droite semi-infinie

Cela revient à prendre $L = +\infty$ dans le modèle décrit à la section 2.1.

Le problème à résoudre s'écrit toujours sous la forme (2.6) mais il faut ajouter une condition sur le comportement de la solution dans la fente $\mathcal{O}_\varepsilon$. Dans ce paragraphe, nous nous contenterons de formuler cette condition par :

$$\text{La solution } u^\varepsilon \text{ est sortante dans la fente semi-infinie } \mathcal{O}_\varepsilon \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \quad (2.39)$$

Grossièrement parlant, cette condition signifie que l'on sélectionne une certaine catégorie de solutions dans la bande $\mathcal{O}_\varepsilon$. La traduction mathématique précise, bien que simple, demande l'introduction d'un petit arsenal mathématique. C'est pourquoi nous la repoussons à la section 3.1. Dans ce nouveau contexte, le problème approché s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow C \text{ et } U^\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow C \text{ tels que :} & \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ -\frac{d^2 U^\varepsilon}{dx^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^+, \\ U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, & \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{dx}(0), & \text{sur } \Sigma_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

système d'équations que nous devons à nouveau compléter par une condition sur le comportement de U^ε lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{La solution } U^\varepsilon \text{ est sortante quand } x \rightarrow +\infty. \quad (2.41)$$

Comme on est en une dimension d'espace, cette condition est cette fois très facile à exprimer. En tant que solution de l'équation de Helmholtz 1D, U^ε est combinaison linéaire de $\exp(i\omega x)$ et $\exp(-i\omega x)$. Dire que U^ε est sortante revient à ne retenir qu'une solution proportionnelle à $\exp(-i\omega x)$, ce qui correspond à une onde se propageant dans la direction $x > 0$. Nous avons alors

:

$$U^\varepsilon(x) = U^\varepsilon(0) \exp(-i\omega x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.42)$$

Il est alors facile de découpler $\tilde{u}^\varepsilon$ et U^ε . En effet, de (2.42) nous tirons la relation:

$$\frac{dU^\varepsilon}{dx}(0) + i\omega U^\varepsilon(0) = 0, \quad (2.43)$$

que l'on peut transformer en une condition aux limites sur Σ_ε grâce aux deux conditions de raccord Neumann et Dirichlet:

$$\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i \frac{\omega}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma = 0. \quad (2.44)$$

On peut donc caractériser $\tilde{u}^\varepsilon$ comme la solution du problème aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i \frac{\omega}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma = 0, & \text{sur } \Sigma_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Notre but dans ce qui va suivre va être de mener une analyse asymptotique de l'approximation du problème exacte par le problème approché et donc en particulier de celle de u^ε par $\tilde{u}^\varepsilon$. Il faut bien comprendre qu'il ne suffit pas de montrer que $\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$ tend vers 0 car $\tilde{u}^\varepsilon$ n'est pas seulement sensé représenter le comportement limite de u^ε dans Ω . En fait, ainsi que l'intuition l'indique, la solution exacte u^ε converge (c'est ce que nous montrerons de façon précise et rigoureuse au chapitre 2) vers la solution du problème qu'on obtient en supprimant purement et simplement la fissure, c'est à dire la solution du problème suivant, que nous appellerons problème de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} + i\omega u^0 = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

La solution u^0 ne tient pas compte de la présence de la fissure, ce que le calcul de $\tilde{u}^\varepsilon$ est sensé faire. Par conséquent, le problème approché ne pourra être satisfaisant que s'il fournit une meilleure approximation de u^ε que celle fournie par u^0 . Du point de vue théorique, cela demande de montrer que:

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_\Omega = o(\|u^\varepsilon - u^0\|_\Omega) \quad (2.47)$$

où $\|\cdot\|_\Omega$ est une norme à préciser. Par conséquent une analyse asymptotique pertinente doit passer par les étapes suivantes:

1. Démontrer la convergence de u^ε vers u^0 et estimer l'erreur $u^\varepsilon - u^0$.
2. Donner une estimation de l'erreur $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ et la comparer à $u^\varepsilon - u^0$.

Le point 1 sera abordé au chapitre 3 et le point 2 au chapitre 4.

De façon parallèle, si on s'intéresse à la solution dans la fente, on peut considérer que le problème limite consiste à approcher u^ε par 0 dans $\mathcal{O}_\varepsilon$. L'analyse va consister à :

1. Estimer l'erreur $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ dans le domaine $\mathcal{O}_\varepsilon$ dans lequel on rappelle que $\tilde{u}^\varepsilon$ est défini par (cf (2.7):

$$\tilde{u}^\varepsilon(x, y) = U^\varepsilon(x). \quad (2.48)$$

2. Montrer que $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ "converge plus vite vers 0" que u^ε dans $\mathcal{O}_\varepsilon$:

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{\mathcal{O}_\varepsilon} = o(\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{O}_\varepsilon}) \quad (2.49)$$

(où la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_\varepsilon}$ est à préciser).

C'est encore ce que nous étudierons au chapitre 4.

3 Convergence vers le problème limite et estimation de l'erreur

3.1 Reformulation du problème exact dans Ω .

Il est utile pour l'analyse de convergence de se restreindre à un domaine géométrique fixe, en l'occurrence Ω . Pour ce faire nous allons caractériser la restriction à Ω de u^ε comme la solution d'un problème aux limites dans Ω (qu'on notera toujours u^ε pour simplifier) en remplaçant la présence de la fente $\mathcal{O}_\varepsilon$ par une condition aux limites équivalente sur la frontière artificielle Σ_ε . L'approche est très classique (voir par exemple [9, 10, 11]) et nous ne rappelons ici que les grandes lignes de la démarche qui consiste à obtenir une expression explicite de l'opérateur dit de Dirichlet-Neumann sur Σ_ε . Dans toute la suite, nous identifierons systématiquement (sans toujours le mentionner), Σ_ε au segment $[0, \varepsilon]$. Le point clé est la séparation des variables dans $\mathcal{O}_\varepsilon$ qui amène naturellement à introduire la suite de fonctions d'une seule variable :

$$w_0^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad w_n^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

qui n'est autre que la base orthonormée de $L^2(0, \varepsilon)$ des fonctions propres de l'opérateur $-d^2/dy^2$ avec conditions aux limites de Neumann homogènes en $y = 0$ et $y = \varepsilon$:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 w_n^\varepsilon}{dy^2} = \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2} w_n^\varepsilon \\ \frac{dw_n^\varepsilon}{dy}(0) = \frac{dw_n^\varepsilon}{dy}(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ainsi, toute fonction $\varphi \in L^2(\Sigma_\varepsilon) \equiv L^2([0, \varepsilon])$ se décompose donc sous la forme :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon \quad (\text{dans } L^2([0, \varepsilon])), \quad \varphi_n^\varepsilon = \int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi w_n^\varepsilon d\sigma \equiv (\varphi, w_n^\varepsilon)_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}, \quad (3.3)$$

et on a :

$$\|\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n^\varepsilon|^2. \quad (3.4)$$

On peut aussi caractériser l'espace $H^1(\Sigma_\varepsilon)$ par :

$$\varphi \in H^1(\Sigma_\varepsilon) \iff \|\varphi\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}\right) |\varphi_n^\varepsilon|^2 < +\infty, \quad (3.5)$$

et par interpolation, les espaces $H^s(\Sigma_\varepsilon)$, $0 \leq s \leq 1$:

$$\varphi \in H^s(\Sigma_\varepsilon) \iff \|\varphi\|_{H^s(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}\right)^s |\varphi_n^\varepsilon|^2 < +\infty, \quad (3.6)$$

La définition (3.6) est celle que nous retiendrons pour la norme dans $H^s(\Sigma_\varepsilon)$ (c'est surtout la dépendance en ε qui nous importe ici !). Par dualité, les espaces $[H^s(\Sigma_\varepsilon)]'$, $0 \leq s \leq 1$ se caractérisent toujours à l'aide de (3.6) modulo le changement de s en $-s$ et une définition convenable (par dualité) des coefficients φ_n^ε . Nous renvoyons à [12, 13, 14] pour plus de détails.

Pour simplifier, nous ferons dans toute la suite l'hypothèse :

$$\varepsilon < \frac{\pi}{\omega}, \quad (3.7)$$

ce qui n'est pas restrictif quand on veut s'intéresser à ce qui se passe lorsque ε tend vers 0. Toute solution v de l'équation de Helmholtz homogène dans $\mathcal{O}^\varepsilon$ satisfaisant la condition de Neumann

homogène sur $\partial\mathcal{O}_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon$ s'écrit alors sous la forme suivante, qu'on appelle décomposition modale :

$$v(x, y) = (a_0^\varepsilon \exp(-i\omega x) + b_0^\varepsilon \exp(i\omega x)) w_0^\varepsilon(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega) x} + b_n^\varepsilon e^{+\xi_n^\varepsilon(\omega) x}) w_n^\varepsilon(y), \quad (3.8)$$

où nous avons posé :

$$\xi_n^\varepsilon(\omega) = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\varepsilon^2} - \omega^2}, \quad n \geq 1, \quad (\xi_n^\varepsilon(\omega) > 0 \quad \text{d'après (3.7)}). \quad (3.9)$$

Dire que l'on s'intéresse à une solution sortante (quand $x \rightarrow +\infty$) pour le problème global revient à imposer :

$$b_n^\varepsilon = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

En d'autres termes on ne retient que la moitié des modes en éliminant les modes qui croissent exponentiellement lorsque $x \rightarrow +\infty$ ainsi que ceux qui se propagent dans la direction $x < 0$. Ainsi, la solution u^ε dans $\mathcal{O}^\varepsilon$ s'écrit-elle sous la forme :

$$u^\varepsilon(x, y) = a_0^\varepsilon \exp(-i\omega x) w_0^\varepsilon(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega) x} w_n^\varepsilon(y). \quad (3.10)$$

Elle apparaît donc comme la superposition :

- d'un mode propagatif : $a_0^\varepsilon \exp(-i\omega x) w_0^\varepsilon(y)$,
- d'une infinité de modes évanescents dans la direction $x > 0$: $a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega) x} w_n^\varepsilon(y)$.

Remarque 3.1 Lorsque l'hypothèse (3.7) n'est plus vérifiée, on a encore une expression analogue pour u^ε dans $\mathcal{O}^\varepsilon$ à ceci près qu'on a une somme finie de modes propagatifs (leur nombre augmentant avec ε). Le point important ici est qu'il reste toujours un mode propagatif (et exactement un seul) pour ε assez petit.

Il est facile d'obtenir une relation entre u^ε et $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$ qui soit indépendante des a_n^ε . C'est cette relation qui va fournir la condition aux limites "exacte" sur Σ_ε , à savoir :

$$\left. \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right|_{\Sigma_\varepsilon} + T^\varepsilon(\omega)(u^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}) = 0, \quad (3.11)$$

où $T^\varepsilon(\omega)$ est l'opérateur non local formellement défini par ($T^\varepsilon(\omega)$ est diagonal dans la base w_n^ε) :

$$T^\varepsilon : \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon \longrightarrow T^\varepsilon(\omega)\varphi = i\omega \varphi_0^\varepsilon w_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon. \quad (3.12)$$

De façon plus rigoureuse, il est facile de voir que (3.12) définit un opérateur linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$ dans $\left[H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon) \right]'$:

$$T^\varepsilon(\omega) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon), H^{-1/2}(\Sigma_\varepsilon)). \quad (3.13)$$

La restriction de u^ε à Ω est donc caractérisée comme la solution du problème aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + i\omega u^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \left. \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right|_{\Sigma_\varepsilon} + T^\varepsilon(\omega)(u^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}) = 0, & \text{sur } \Sigma_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

ou, de façon équivalente, comme la solution du problème variationnel suivant (qui précise le cadre fonctionnel et donne un sens rigoureux à la notion de solution) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.15)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) dx + i\omega \int_{\Gamma_f} u \bar{v} d\sigma, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \\ b^\varepsilon(u, v) = i\omega u_0^\varepsilon \bar{v}_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \bar{v}_n^\varepsilon, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans (3.16), les coefficients u_n^ε (resp. v_n^ε) sont définis comme dans la formule (3.3) en remplaçant φ par la trace de u (resp. v) sur Σ_ε . Comme $a(u, v)$ et $b^\varepsilon(u, v)$ définissent deux formes hermitiennes continues sur $H^1(\Omega)$, on peut, grâce au théorème de Riesz, définir deux opérateurs :

$$(A, B^\varepsilon) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega))^2 \quad (3.17)$$

caractérisés par :

$$\begin{cases} (Au, v)_{H^1(\Omega)} = a(u, v), \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2, \\ (B^\varepsilon u, v)_{H^1(\Omega)} = b^\varepsilon(u, v), \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2. \end{cases} \quad (3.18)$$

De même il existe L dans $H^1(\Omega)$ tel que :

$$\ell(v) = (L, v)_{H^1(\Omega)}. \quad (3.19)$$

Le problème satisfait par u^ε dans Ω (que nous appellerons problème exact dans la suite) prend alors la forme compacte suivante :

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que } (A + B^\varepsilon)u^\varepsilon = L. \quad (3.20)$$

De même, le problème de Neumann (que nous appellerons également problème limite dans la suite) :

$$\begin{cases} -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} + i\omega u^0 = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial u^0}{\partial x} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.21)$$

se réécrit tout simplement :

$$\text{Trouver } u^0 \in H^1(\Omega) \text{ tel que } Au^0 = L. \quad (3.22)$$

L'existence et l'unicité de la solution des problèmes (3.14) et (3.21), autrement dit le caractère inversible des opérateurs A et $A + B^\varepsilon$, relève d'une analyse utilisant des techniques tout à fait classiques et s'appuyant sur l'alternative de Fredholm. Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration le résultat d'une telle analyse :

$$\begin{cases} A \text{ est un isomorphisme dans } H^1(\Omega), \\ \text{Pour tout } 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{\omega}, \quad A + B^\varepsilon \text{ est un isomorphisme dans } H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous allons nous concentrer dans la suite de ce chapitre sur l'étude rigoureuse de la convergence de u^ε vers u^0 , étude qui passe par un résultat de stabilité préalable, à savoir une estimation uniforme de :

$$(A + B^\varepsilon)^{-1}.$$

Remarque 3.2 Lorsque (3.7) n'est pas vérifié, le problème vérifié par u^ε dans Ω s'écrit toujours sous la forme (3.20) avec une expression légèrement différente pour B^ε (c'est à dire pour $b^\varepsilon(u, v)$) et le résultat d'inversibilité de $A + B^\varepsilon$ reste valable (la preuve n'utilise pas la petitesse de ε).

3.2 Un résultat de stabilité

Commençons par remarquer que l'opérateur B^ε reste borné lorsque ε tend vers 0.

Lemme 3.3 Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε et de la pulsation ω telle que :

$$\|B^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq C \max(1, \omega).$$

Preuve : Nous avons :

$$\|B^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|b^\varepsilon(u, v)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.24)$$

Or, à partir de (3.16) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$|b^\varepsilon(u, v)| \leq (\omega |u_0^\varepsilon|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |u_n^\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}} \times (\omega |v_0^\varepsilon|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |v_n^\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Compte tenu de l'inégalité $\xi_n^\varepsilon(\omega)^2 \leq 1 + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}$ et de la définition (3.6) pour la norme dans $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$, il vient :

$$|b^\varepsilon(u, v)| \leq \max(1, \omega) \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}$$

Or, nous avons l'inégalité :

$$\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (3.25)$$

où la norme $H^{1/2}(\Gamma)$ est la norme d'interpolation entre les espaces $H^1(\Gamma)$ et $L^2(\Gamma)$.

Ce résultat s'obtient par interpolation (c'est ici que le choix (3.6) pour la norme $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$ est important) à partir des inégalités (qui utilisent simplement l'inclusion $\Sigma_\varepsilon \subset \Gamma$!) :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in L^2(\Gamma), & \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \\ \forall \varphi \in H^1(\Gamma), & \|\varphi\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}. \end{cases}$$

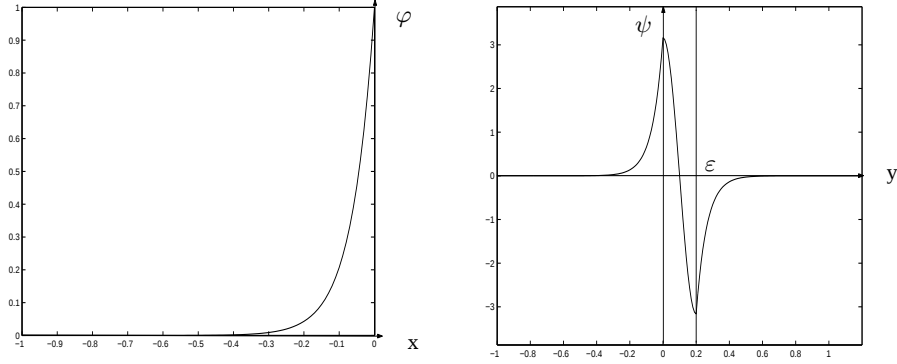
En utilisant le théorème de trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il vient par conséquent :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.26)$$

où la constante C ne dépend ni de ω ni de ε . On conclut alors aisément. $\square$

Remarque 3.4 Nous avons lors de la preuve de ce lemme montré le résultat de trace uniforme (3.26). En effet il existe une constante C ne dépendant pas de ε telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.27)$$



Remarque 3.5 Le résultat de stabilité qui va suivre ne peut s'obtenir par un simple résultat de perturbation car il est faux que $\|B^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))}$ tend vers 0 avec ε . Pour s'en convaincre, considérons la suite de fonctions définie dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ (domaine qui contient Ω) par $v^\varepsilon(x, y) = \varphi^\varepsilon(y) \psi(x)$ avec :

$$\psi(x) = e^{-(1+\frac{\pi^2}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} |x|} \text{ et } \varphi^\varepsilon(y) = \begin{cases} w_1^\varepsilon(y) & \text{si } 0 \leq y \leq \varepsilon \\ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} e^{-\pi \frac{|y|}{\varepsilon}} & \text{si } y \leq 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} e^{-\pi \frac{|y-\varepsilon|}{\varepsilon}} & \text{si } y \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.28)$$

Par construction $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})$ et :

$$b^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = \xi_1^\varepsilon(\omega) \sim \frac{\pi}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.29)$$

et un calcul fastidieux mais simple montre que :

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})}^2 \sim \frac{C}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.30)$$

Par conséquent :

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad b^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq \alpha \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.} \quad (3.31)$$

ce qui démontre à fortiori que $\|B^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))}$ ne tend pas vers 0 (cf (3.24)).

Theorème 3.6 Il existe C ne dépendant pas de ε telle que :

$$\|(A + B^\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq C. \quad (3.32)$$

Preuve. Nous allons raisonner par l'absurde: si (3.32) est faux, il existe une suite u^ε avec $\varepsilon \rightarrow 0$ telle que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad L^\varepsilon = (A + B^\varepsilon) u^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\Omega). \quad (3.33)$$

Nous pouvons extraire de u^ε une sous-suite telle que :

$$u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } H^1(\Omega) - \text{faible et } L^2(\Omega) - \text{fort.} \quad (3.34)$$

Par définition de A et B^ε , nous avons :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (L^\varepsilon, v) = a(u^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(u^\varepsilon, v). \quad (3.35)$$

Introduisons alors un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ composé de fonctions qui s'annulent dans un voisinage de l'origine :

$$H_{0,0}^1(\Omega) \equiv \{v \in H^1(\Omega) / \exists r > 0 / v = 0 \text{ dans } \Omega \cap B(0, r)\}, \quad (3.36)$$

où $B(0, r)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$. Nous allons utiliser le résultat bien connu suivant (pour être complet, nous en donnons une démonstration un peu plus loin) :

Lemme 3.7 $H_{0,0}^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Nous remarquons alors que:

$$\forall v \in H_{0,0}^1(\Omega), \quad \exists \varepsilon^*(v) > 0 \text{ tel que } b^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = 0 \text{ pour } \varepsilon < \varepsilon^*(v). \quad (3.37)$$

Par conséquent:

$$\forall v \in H_{0,0}^1(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = a(u, v). \quad (3.38)$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (3.35), il vient:

$$a(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_{0,0}^1(\Omega). \quad (3.39)$$

Par continuité de $a(.,.)$ et densité de $H_{0,0}^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, $a(u, v) = 0$ pour tout v dans $H^1(\Omega)$, autrement dit $Au = 0$. Ceci entraîne, A étant un isomorphisme:

$$u = 0. \quad (3.40)$$

Autrement dit:

$$u^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\Omega) - \text{faible et } L^2(\Omega) - \text{fort}. \quad (3.41)$$

Explicitons maintenant la partie réelle de l'égalité (3.35) (écrite avec $v = u^\varepsilon$) :

$$\int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |u_n^\varepsilon|^2 = \mathcal{R}e (L^\varepsilon, u^\varepsilon)_{H^1(\Omega)} + \omega^2 \int_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 dx. \quad (3.42)$$

De la positivité des coefficients $\xi_n^\varepsilon(\omega)$ on déduit donc l'estimation:

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|L^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \omega^2 \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.43)$$

Comme $\|L^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ par hypothèse et comme nous venons de démontrer que $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ on en déduit que :

$$u^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega) - \text{fort}, \quad (3.44)$$

ce qui est impossible puisque $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = 1$. $\square$

Preuve du lemme 3.7. Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, il s'agit de construire une suite $(v_a \in H_{0,0}^1(\Omega), a > 0)$ telle que

$$\lim_{a \rightarrow 0} v_a = v \text{ dans } H^1(\Omega). \quad (3.45)$$

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ étant dense dans $H^1(\Omega)$, il suffit de construire une telle suite pour:

$$v \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (3.46)$$

Dans ce qui suit (r, θ) désigne les coordonnées polaires au voisinage de l'origine. Pour tout $a > 0$, introduisons la fonction de troncature:

$$\Psi_a(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a, \\ \text{Log}\left(\frac{r}{a}\right) \left(\text{Log}\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{-1} & \text{si } a < r < 1, \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

Nous allons vérifier que $v_a = \Psi_a v$ convient. En effet:

$$\begin{aligned} \|v - \Psi_a v\|_{H^1(\Omega)} &= \|v - \Psi_a v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v - \Psi_a v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} (\|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \Psi_a\|_{L^2(\Omega)}) + \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme Ψ_a est à support dans la boule $B(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1, est majorée par 1 et converge presque partout vers 1 lorsque a tend vers 0, alors:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (3.48)$$

Par ailleurs, on calcule aisément que:

$$\|\nabla \Psi_a\|_{L^2(B(0,1))}^2 = \frac{2\pi}{(-\text{Log}(a))}, \quad (3.49)$$

ce qui montre que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\nabla \Psi_a\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (3.50)$$

et achève la démonstration. $\square$

3.3 Analyse de consistance et estimation d'erreur

Introduisons l'erreur :

$$e^\varepsilon = u^\varepsilon - u^0. \quad (3.51)$$

Il est facile de vérifier (3.20) (3.22) que e^ε satisfait :

$$(A + B^\varepsilon) e^\varepsilon = -B^\varepsilon u^0. \quad (3.52)$$

En vertu du théorème de stabilité 3.6, il suffit pour estimer e^ε dans $H^1(\Omega)$, d'estimer le terme :

$$B^\varepsilon u^0, \quad (3.53)$$

qu'on peut assimiler à un terme d'erreur de consistance. Nous allons établir que, bien que B^ε ne tend pas fortement (au sens des opérateurs) vers 0, $B^\varepsilon u^0$ tend vers 0 dans $H^1(\Omega)$. Ceci est essentiellement dû au fait que u^0 est une fonction indépendante de ε , qui plus est très régulière au voisinage de Γ .

Notre démarche passe par une décomposition de l'opérateur B^ε sous la forme :

$$B^\varepsilon = B_0^\varepsilon + R^\varepsilon, \quad (3.54)$$

correspondant, de manière évidente, à une décomposition de la forme bilinéaire $b^\varepsilon(u, v)$ en :

$$\begin{cases} b^\varepsilon(u, v) = b_0^\varepsilon(u, v) + r^\varepsilon(u, v) \\ b_0^\varepsilon(u, v) = i\omega u_0^\varepsilon \overline{v_0^\varepsilon}, \quad r^\varepsilon(u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \overline{v_n^\varepsilon}, \end{cases} \quad (3.55)$$

où on renvoie à (3.3) et à la section 3.1 pour la définition des coefficients u_n^ε et v_n^ε .

Les deux lemmes qui suivent, dont nous reportons la preuve à la sous-section 3.3.3, sont deux estimations de consistance:

Lemme 3.8 *Il existe une constante $C(\omega)$ indépendante de ε telle que :*

$$\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\omega) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.56)$$

Lemme 3.9 *Il existe une constante C indépendante de ε et ω telle que :*

$$\|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.57)$$

Remarque 3.10 Contrairement à ce qu'on pourrait penser à priori, on gagne très peu en passant de l'estimation du "terme principal" à l'estimation du "reste" : seulement un facteur $\sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}$! Nous verrons en outre que la preuve des deux lemmes repose sur des techniques tout à fait différentes (cf section 3.3.3).

On en déduit immédiatement le résultat principal de ce chapitre :

Theorème 3.11 La fonction u^ε converge vers u^0 dans $H^1(\Omega)$ et on a l'estimation d'erreur (C désigne une constante positive indépendante de ε) :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.58)$$

Preuve. Du résultat de stabilité du théorème 3.6 et de l'équation (3.52), on déduit immédiatement que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|B^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} + \|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)}). \quad (3.59)$$

Il suffit alors d'appliquer les lemmes 3.8 et 3.9. $\square$

3.3.1 Résultats préliminaires sur B_0^ε

Nous effectuons dans cette partie une étude donnant les résultats de consistance les plus intéressants sur B_0^ε .

Nous établissons un lemme technique, qui nous sera utile par la suite, consistant en une estimation particulière de la fonction w_0^ε . Plus précisément, nous considérons la fonction $\tilde{w}_0^\varepsilon$ définie sur $\mathbb{R}$ en prolongeant w_0^ε par 0 :

$$\tilde{w}_0^\varepsilon(y) = w_0^\varepsilon(y) \quad \text{si } y \in]0, \varepsilon[, \quad = 0 \quad \text{sinon.} \quad (3.60)$$

On notera que $\tilde{w}_0^\varepsilon \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s < 1/2$. Nous travaillerons dans la suite avec la norme $H^s(\mathbb{R})$ traditionnellement définie par :

$$\forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \quad \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{\varphi}(k)|^2 dk, \quad (3.61)$$

où $\widehat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ .

Lemme 3.12 Au voisinage de $\varepsilon = 0$, on a l'équivalent :

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 \sim \sqrt{2 \varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (3.62)$$

alors que, pour $-1/2 < s < 1/2$:

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \sim C(s) \varepsilon^{-s} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (3.63)$$

avec

$$C(s) = \int_{\mathbb{R}} t^{2(s-1)} \sin^2(t) dt. \quad (3.64)$$

Enfin pour $s < -1/2$, un équivalent de la norme H^s de $\tilde{w}_0^\varepsilon$ est donné par

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim C(s) \sqrt{\varepsilon} \quad (3.65)$$

avec

$$C(s) = \int_{\mathbb{R}} (1 + k^2)^s dk. \quad (3.66)$$

Preuve. Un simple calcul montre que, si on pose $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$\widehat{w}_0^\varepsilon(k) = \sqrt{\varepsilon} \text{sinc} \left(\frac{k\varepsilon}{2} \right) \exp \left(-\frac{ik\varepsilon}{2} \right). \quad (3.67)$$

Par conséquent:

$$\|\widetilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sinc}^2(\frac{k\varepsilon}{2})}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} dk = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad (3.68)$$

après changement de variable $t = \frac{\varepsilon k}{2}$. Nous séparons cette dernière intégrale en trois morceaux:

$$\|\widetilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt + \int_{[-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t) - 1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt \right].$$

Nous observons alors que:

- Pour le premier morceau:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = 2 \operatorname{argsh} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) \sim 2 |\operatorname{Log} \varepsilon| \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.69)$$

- La majoration $\frac{\text{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{t^3}$ permet d'utiliser le théorème de Lebesgue et d'obtenir :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t)}{|t|} dt. \quad (3.70)$$

- De même, la majoration $\frac{|\text{sinc}^2(t) - 1|}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|\text{sinc}^2(t) - 1|}{t}$ permet d'obtenir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t) - 1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = \int_{[-1,1]} \frac{\text{sinc}^2(t) - 1}{|t|} dt. \quad (3.71)$$

La conclusion de la démonstration est alors immédiate. Le résultat pour $-1/2 < s < 1/2$ se démontre de façon analogue (c'est un peu plus simple). Les détails sont laissés au lecteur.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $s < -\frac{1}{2}$, nous pouvons faire apparaître pourquoi nous ne pouvons pas gagner de facteur ε . Calculons la norme H^s de $\widetilde{w}_0^\varepsilon$:

$$\|\widetilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^2 \left(\frac{k\varepsilon}{2} \right) (1+k^2)^s dk. \quad (3.72)$$

Comme il est clair que nous vérifions les conditions suivantes

$$\left| \text{sinc}^2 \left(\frac{k\varepsilon}{2} \right) (1+k^2)^s \right| \leq (1+k^2)^s \text{ qui est intégrable sur } \mathbb{R},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{sinc}^2 \left(\frac{k\varepsilon}{2} \right) (1+k^2)^s] = (1+k^2)^s, \quad (3.73)$$

On peut appliquer le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^2 \left(\frac{k\varepsilon}{2} \right) (1+k^2)^s dk = \int_{\mathbb{R}} (1+k^2)^s dk. \quad \square \quad (3.74)$$

Voyons maintenant les conséquences que l'on peut tirer pour B_0^ε . Par définition (cf 3.55), on a :

$$|(B_0^\varepsilon u; v)| \leq \omega |u_0^\varepsilon| |v_0^\varepsilon|. \quad (3.75)$$

Il semble donc légitime de s'intéresser au lemme suivant :

Lemme 3.13

(i) Pour tout $s \in]0, 1/2[$, il existe une constante $C(s)$ (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\forall u \in H^{1/2+s}(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega)}. \quad (3.76)$$

(ii) Il existe une constante C (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C \sqrt{\varepsilon |\log(\varepsilon)|} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.77)$$

(iii) Pour tout $s \in [0, +\infty[$, il existe une constante $C(s)$ (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C(s) \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.78)$$

Preuve.

Considérons un élément $u \in H^{1/2+s}(\Omega)$, pour $s \in]0, 1[$, on peut le prolonger continûment en une fonction $\tilde{u}$ de $H^{1/2+s}(\mathbb{R}^2)$ (un tel prolongement existe bien, voir page 46 à 48 de [15] ou en symétrisant par rapport à l'axe $x = 0$ au théorème 8.1 page 42 de [12]) et en prendre sa trace sur l'axe $x = 0$, (que nous assimilerons à $\mathbb{R}$) :

$$\|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C(s) \|\tilde{u}\|_{H^{1/2+s}(\mathbb{R}^2)} \leq C(s) \|u\|_{H^{1/2+s}(\Omega)}. \quad (3.79)$$

De plus, comme u et $\tilde{u}$ coïncident sur le segment $]0, \varepsilon[$:

$$|u_0^\varepsilon| = \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(0, y) \tilde{w}_0^\varepsilon(y) dy \right| \leq C \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R})} \times \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \quad (3.80)$$

et par conséquent :

$$|u_0^\varepsilon| \leq C(s) \|u\|_{H^{1/2+s}(\Omega)} \times \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}. \quad (3.81)$$

Nous concluons à l'aide du lemme 3.12. $\square$

Ce qui entraîne le résultat suivant :

Corollaire 3.14

(i) Il existe C (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon |\log(\varepsilon)|} |u_0^\varepsilon|. \quad (3.82)$$

(ii) Il existe C (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\|B_0^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq C \varepsilon |\log(\varepsilon)|. \quad (3.83)$$

(iii) Pour tout $s > 0$, il existe $C(s)$ (ne dépendant pas de ε) telle que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon \sqrt{|\log(\varepsilon)|} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.84)$$

Preuve.

Par définition de B_0^ε :

$$\|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{(B_0^\varepsilon u; v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq C |u_0^\varepsilon| \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|v_0^\varepsilon|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.85)$$

La conclusion vient du lemme 3.13. $\square$

3.3.2 Résultats préliminaires sur R^ε

Introduisons maintenant une semi-norme sur $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$, très utile pour R^ε car elle ne prend pas en compte le mode 0 :

$$\|u\|_{H_*^{1/2}([0,\varepsilon])}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} |u_n^\varepsilon|^2. \quad (3.86)$$

Lemme 3.15

(i) Pour tout $s \in [0, 1[$, il existe une constante $C(s)$ telle que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}([0,\varepsilon])} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.87)$$

(ii) Pour tout $s \in]0, +\infty[$, il existe une constante $C(s)$ telle que :

$$\forall u \in H^{2+s}(\Omega), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}([0,\varepsilon])} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{2+s}(\Omega)}. \quad (3.88)$$

Preuve.

(i) Considérons un élément u de $H^{3/2+r}(\Omega)$ pour $r \in [0, 1/2[$, on peut le prolonger continûment en une fonction notée $\tilde{u}$ de $H^{3/2+r}(\mathbb{R}^2)$ et en prendre sa trace sur le demi-axe $x = 0$, $y > 0$ (que nous assimilerons à $\mathbb{R}^+$) :

$$\|\tilde{u}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^+)} \leq C \|\tilde{u}\|_{H^{3/2+r}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{H^{3/2+r}(\Omega)}. \quad (3.89)$$

La dérivée en y de cette trace est en particulier un élément de $L^2([0, \varepsilon])$.

Soit P^ε l'opérateur de projection $L^2([0, \varepsilon])$, l'opérateur de projection sur le sous-espace vectoriel des constantes. Il est classique (lemme de Bramble-Hilbert) de montrer :

$$\begin{cases} \|u - P^\varepsilon u\|_{L^2([0,\varepsilon])} \leq C \varepsilon \left\| \frac{du}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])}, & \forall u \in H^1([0, \varepsilon]) \\ \|u - P^\varepsilon u\|_{H^1([0,\varepsilon])} \leq C \left\| \frac{du}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])}, & \forall u \in H^1([0, \varepsilon]). \end{cases} \quad (3.90)$$

Nous en déduisons par interpolation le résultat en norme $H^{1/2}([0, \varepsilon])$:

$$\|u - P^\varepsilon u\|_{H^{1/2}([0,\varepsilon])} \leq C \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{du}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])}. \quad (3.91)$$

De plus, par définition de $\|\cdot\|_{H_*^{1/2}([0,\varepsilon])}$:

$$\|u\|_{H_*^{1/2}([0,\varepsilon])} = \|u - P^\varepsilon u\|_{H^{1/2}([0,\varepsilon])} \leq C \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{du}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])}. \quad (3.92)$$

Ce qui démontre, à l'aide d'un théorème de trace, le résultat pour $s = 1/2$. Pour les $s > 1/2$ nous avons besoin du résultat que l'on pourra trouver dans [12] (theorem 11.2 page 63).

Pour tout $r \in [0, 1/2[$, pour tout $v \in H^r(\mathbb{R}^+)$, $v/x^r \in L^2([0, \varepsilon])$ il existe une constante C ne dépendant que de r telle que :

$$\left\| \frac{v}{x^r} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C(r) \|v\|_{H^r(\mathbb{R}^+)}. \quad (3.93)$$

Nous appliquons maintenant ce résultat à $v = d\tilde{u}/dy$ pour obtenir :

$$\left\| \frac{d\tilde{u}}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])} \leq \left\| \frac{y^r}{y^r} \frac{d\tilde{u}}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])} \leq \varepsilon^r \left\| \frac{1}{y^r} \frac{d\tilde{u}}{dy} \right\|_{L^2([0,\varepsilon])} \leq \varepsilon^r \left\| \frac{1}{y^r} \frac{d\tilde{u}}{dy} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \quad (3.94)$$

Par conséquent (u et $\tilde{u}$ coïncident sur le segment $|0, \varepsilon|$) :

$$\|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \leq C(r) \varepsilon^{1/2+r} \left\| \frac{d\tilde{u}}{dy} \right\|_{H^r(\mathbb{R}^+)} \leq C(s) \varepsilon^{1/2+r} \|\tilde{u}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^+)}. \quad (3.95)$$

En utilisant l'estimation (3.89) :

$$\forall r \in [0, 1/2[, \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \leq C(r) \varepsilon^{1/2+r} \|u\|_{H^{3/2+r}(\Omega)} \quad (3.96)$$

C'est à dire :

$$\forall s \in [1/2, 1[, \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \quad (3.97)$$

De plus d'après la remarque 3.4 nous avons aussi :

$$\text{Pour } s = 0, \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \leq \|u\|_{H^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.98)$$

On obtient le résultat pour $s \in]0, 1/2[$ par interpolation entre (3.97) et (3.98).

(ii) Comme nous sommes en dimension 2, pour tout $s > 0$, $H^{2+s}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^1(\overline{\Omega})$ et par conséquent :

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq C(s) \|u\|_{H^{2+s}(\Omega)} \quad (3.99)$$

Reprenons maintenant l'inégalité (3.92) :

$$\left| \begin{aligned} \|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} &\leq C \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{du}{dy}(0, y) \right\|_{L^2(|0, \varepsilon|)}, \\ &\leq C \varepsilon \left\| \frac{du}{dy}(0, y) \right\|_{L^\infty(|0, \varepsilon|)}, \\ &\leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{2+s}(\Omega)}. \end{aligned} \right. \quad (3.100)$$

Ce qui termine (ii). $\square$

Lemme 3.16 *Il existe une constante C ne dépendant pas de ε , telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et tout $v \in H^1(\Omega)$,*

$$|(R^\varepsilon u, v)| \leq \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \|v\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.101)$$

Preuve.

Par définition de l'opérateur R^ε , nous avons

$$(R^\varepsilon u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \overline{v_n^\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \xi_n^\varepsilon(\omega) = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} - \omega^2} \quad (3.102)$$

Par Cauchy-Schwartz, on conclut en remarquant que $|\xi_n^\varepsilon(\omega)| \leq (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2}$. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe des deux lemmes précédents et de l'inégalité :

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{(R^\varepsilon u, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq C \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\|u\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)} \|v\|_{H_*^{1/2}(|0, \varepsilon|)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.103)$$

Corollaire 3.17

(i) *Il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \quad (3.104)$$

(ii) *Pour tout $s \in [0, 1]$, il existe une constante $C(s)$ telle que pour tout $u \in H^{1+s}(\Omega)$:*

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.105)$$

(iii) *Pour tout $s \in]0, +\infty[$, il existe une constante $C(s)$ telle que pour tout $u \in H^{2+s}(\Omega)$:*

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{2+s}(\Omega)}. \quad (3.106)$$

3.3.3 Preuves des estimations de consistance

Preuve du lemme 3.8. u^0 est la solution du problème au laplacien (3.21), par régularité elliptique $u^0 \in H^2(\Omega)$ et on a l'estimation :

$$\|u^0\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.107)$$

ainsi du (iii) du lemme 3.14 on déduit :

$$\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{\text{Log}(\varepsilon)} \|u^0\|_{H^2(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{\text{Log}(\varepsilon)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (3.108)$$

Remarque 3.18 Notre raisonnement revient en fait à montrer :

$$|(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.109)$$

qui se déduit du (iii) du corollaire 3.13.

Remarque 3.19 L'exploitation de la régularité et de l'indépendance en ε de u^0 ne permet donc que de gagner un facteur $\sqrt{\text{Log} \varepsilon}$ dans l'estimation de $\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)}$ par rapport à (3.83). On peut remarquer toutefois que, si on fait l'hypothèse:

$$u^0(0, 0) = 0, \quad (3.110)$$

ce qui arrivera si par exemple f est impaire en la variable y , alors on a l'inégalité:

$$\forall y \in]0, \varepsilon[, \quad |u^0(0, y)| \leq C(\omega) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.111)$$

qui permet de gagner un facteur ε dans l'estimation final :

$$\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \omega \varepsilon^2 \sqrt{\text{Log} \varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.112)$$

Preuve du lemme 3.9. Le support de la source f est éloignée de R de la fente. Nous pouvons donc considérer une fonction de troncature $\varphi(r, \theta) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (ne dépendant pas de ε) telle que $\varphi = 1$ pour tout $r < \frac{R}{2}$ et $\varphi = 0$ sur le support de la source. Par régularité elliptique de u^0 , solution du problème au laplacien (3.21), φu^0 est $C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc à fortiori $H^{2+s}(\Omega)$ et on a bien entendu :

$$\|\varphi u^0\|_{H^{2+s}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.113)$$

Comme u^0 et φu^0 coïncident sur le segment $]0, \varepsilon[$:

$$\|u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0, \varepsilon])} \leq \|\varphi u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0, \varepsilon])} \leq C \varepsilon \|\varphi u^0\|_{H^{2+s}(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.114)$$

dont nous tirons grâce au corollaire 3.17 :

$$\|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|. \quad \square \quad (3.115)$$

Nous retiendrons dans la suite l'inégalité :

$$\|u^0\|_{H_*^{1/2}([0, \varepsilon])} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.116)$$

Remarque 3.20 Présentons aussi la preuve la plus ancienne du lemme 3.9, Cette preuve a l'intérêt d'être beaucoup plus explicite.

Nous avons, pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$(R^\varepsilon u^0, v) = r^\varepsilon(u^0, v) \leq r^\varepsilon(u^0, u^0)^{\frac{1}{2}} \times r^\varepsilon(v, v)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.117)$$

Le lemme 3.3 fournit l'estimation uniforme :

$$r^\varepsilon(v, v) = \operatorname{Re}(b^\varepsilon(v, v)) \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.118)$$

Par ailleurs, par définition de $r^\varepsilon(.,.)$:

$$r^\varepsilon(u^0, u^0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |(u^0)_n^\varepsilon|^2, \quad (3.119)$$

où on rappelle que :

$$(u^0)_n^\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^0(0, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right) dy. \quad (3.120)$$

Exploitions la régularité de u^0 pour effectuer une double intégration par parties :

$$\left| \int_0^\varepsilon u^0(0, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right) dy = \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 \left[\frac{\partial u^0}{\partial y}(0, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right) \right]_0^\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}(0, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right) dy, \right. \quad (3.121)$$

d'où on tire l'estimation :

$$\left| \int_0^\varepsilon u^0(0, y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right) dy \right| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 \left[\left\| \frac{\partial u^0}{\partial y} \right\|_{L^\infty(\Sigma_\varepsilon)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} \right\|_{L^\infty(\Sigma_\varepsilon)} \right] \leq C \left(\frac{\varepsilon}{n\pi}\right)^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.122)$$

Compte tenu de l'inégalité $\xi_n^\varepsilon(\omega) \leq n\pi/\varepsilon$, il vient :

$$r^\varepsilon(u^0, u^0) \leq C \varepsilon^2 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right] \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.123)$$

c'est à dire :

$$r^\varepsilon(u^0, u^0)^{\frac{1}{2}} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.124)$$

On conclut en regroupant (3.118) et (3.124). $\square$

4 Analyse de l'erreur d'approximation du modèle

Nous allons dans cette partie étudier l'erreur commise par le modèle approché.

4.1 Reformulation du problème approché dans Ω

La solution du modèle approché est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} + T_0^\varepsilon(\omega) \tilde{u}^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Sigma_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $T_0^\varepsilon(\omega) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon), H^{-1/2}(\Sigma_\varepsilon))$ est l'opérateur non local défini sur Σ_ε par :

$$(T^{\varepsilon,0}(\omega)\varphi)(y) = i\omega \times \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \varphi(y) dy. \quad (4.2)$$

La solution $\tilde{u}^\varepsilon$ peut être aussi vue comme la solution du problème variationnel suivant (qui précise le cadre fonctionnel et donne un sens rigoureux à la notion de solution) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(\tilde{u}^\varepsilon, v) + b_0^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où nous avons ici repris les notations (3.55).

Le système variationnel vérifié par la solution $\tilde{u}^\varepsilon$ peut être exprimé sous une forme compacte à l'aide des opérateurs A , B_0^ε et de l'élément L de H^1 définis en (3.18) (3.19). Cette équation est à comparer avec les équations opérateurs (3.20) pour la solution exacte et (3.22) pour la solution limite.

$$\text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que } (A + B_0^\varepsilon) \tilde{u}^\varepsilon = L. \quad (4.4)$$

Comme cela a déjà été évoqué en introduction, l'opérateur $A + B_0^\varepsilon$ est un automorphisme de $H^1(\Omega)$.

Nous choisissons de découper le reste de l'analyse de la façon suivante :

- nous étudions dans la partie 4.2 la convergence de $\tilde{u}^\varepsilon$ vers u^0 ,
- nous estimons dans la partie 4.3 l'erreur commise par le modèle $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$.

Le premier point peut sembler artificiel, mais il apparait nécessaire d'estimer $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ avant $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$

4.2 Etude de la convergence de $\tilde{u}^\varepsilon$ vers u^0

Commençons cette partie par énoncer les résultats obtenus relatifs à la convergence de $\tilde{u}^\varepsilon$ vers u^0 .

Théorème 4.1 *Lorsque ε tend vers 0, $\tilde{u}^\varepsilon$ converge vers u^0 dans $H^1(\Omega)$ et on a l'estimation d'erreur (C désigne une constante indépendante de ε)*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Théorème 4.2 Pour tout $s \in]0, 1[$, $\tilde{u}^\varepsilon$ converge vers u^0 dans $H^{1+s}(\Omega)$ et on a l'estimation d'erreur ($C(s)$ désigne une constante indépendante de ε mais dépendante de s) :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^{1-s} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.6)$$

Théorème 4.3 Il existe une constante C ne dépendant pas de ε telle que :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Remarque 4.4 Remarquons tout de suite que, par inégalité triangulaire, (4.5) et (3.58) entraînent :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.8)$$

Tirons de plus de (4.6) que : $\tilde{u}^\varepsilon$ est bornée indépendamment de ε en norme $H^{1+s}(\Omega)$:

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.9)$$

4.2.1 Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ en norme $H^1(\Omega)$

Nous commençons cette partie par un résultat de stabilité portant sur l'inverse de $A + B_0^\varepsilon$.

Lemme 4.5 Il existe $C > 0$ ne dépendant pas de ε telle que :

$$\|(A + B_0^\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq C. \quad (4.10)$$

Preuve. Ce résultat peut se prouver à l'aide des mêmes outils que pour le théorème 3.6 mais nous préférons ici une démarche de type perturbative. En effet, l'opérateur B_0^ε tend fortement vers 0. Plus précisément (cf (3.83)) nous avons :

$$\|B_0^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq C \varepsilon |\log \varepsilon|. \quad (4.11)$$

Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, posons :

$$v = (A + B_0^\varepsilon)^{-1} u. \quad (4.12)$$

d'où il vient :

$$v = A^{-1} u - A^{-1} B_0^\varepsilon v \implies \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} + C \varepsilon |\ln \varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Donc en prenant ε suffisamment petit ($1 - C \varepsilon |\ln \varepsilon| \geq \frac{1}{2}$)

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{1 - C \varepsilon |\ln \varepsilon|} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.14)$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

A l'aide de la démarche classique stabilité consistence, nous effectuons la

Preuve du théorème 4.1.

Si nous posons,

$$\tilde{e}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^0, \quad (4.15)$$

il vient :

$$(A + B_0^\varepsilon) \tilde{e}^\varepsilon = -B_0^\varepsilon u^0.$$

Par conséquent grâce au lemme 4.5 et au lemme 3.8 :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (4.16)$$

Signalons une conséquence immédiate de la proposition 4.1 qui nous servira par la suite :

Corollaire 4.6 *Il existe une constante C ne dépendant pas de ε telle que :*

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Preuve.

Appliquons une inégalité triangulaire :

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| + |(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|, \quad (4.18)$$

ainsi d'après l'inégalité (3.109) et le (ii) du lemme 3.13, et

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \sqrt{\varepsilon \operatorname{Log}(\varepsilon)} \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.19)$$

Du théorème 4.1 on tire :

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \varepsilon^{3/2} \operatorname{Log}(\varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (4.20)$$

4.2.2 Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ en norme $H^{1+s}(\Omega)$

Avant de rentrer dans le vif du sujet, rappelons un résultat de régularité relatif à un problème auxiliaire que nous utiliserons par la suite :

Considérons $v \in H^1(\Omega)$ la solution unique du problème suivant ($h \in H^{-1/2}(\Gamma)$) :

$$\begin{cases} \Delta v + \omega^2 v &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= h, & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial v}{\partial n} + i \omega v &= 0, & \text{sur } \Gamma_f. \end{cases} \quad (4.21)$$

Il est facile de montrer que, si $h \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$, $v \in H^{1+s}(\Omega)$ pour tout $s < 1$. On sait de plus qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall h \in H^{-1/2+s}(\Gamma), \quad \|v\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \|h\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.22)$$

Preuve de la proposition 4.2.

La différence $\tilde{e}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^0$ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{e}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{e}^\varepsilon &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} &= -i \omega (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{w}_0^\varepsilon(y), & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} + i \omega \tilde{e}^\varepsilon &= 0, & \text{sur } \Gamma_f, \end{cases} \quad (4.23)$$

où $\tilde{w}_0^\varepsilon$ est défini en (3.60). Comme $\tilde{w}_0^\varepsilon \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$ pour tout $s \in]0, 1[$, nous pouvons donc appliquer l'estimation (4.22) :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.24)$$

Appliquons maintenant le lemme 3.12 ainsi que le corollaire 4.6:

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^{1-s} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (4.25)$$

4.2.3 Estimation de $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ dans $L^2(\Omega)$

Le preuve va utiliser une technique de dualité qui nous amène à considérer le problème dual suivant :

Pour $g \in L^2(\Omega)$ donné,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi^0 \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (A v ; \varphi^0)_{H^1(\Omega)} = (v ; g)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Ce problème est le problème dual du problème limite (3.22). Il est facile de exprimer ce problème en termes d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi^0 + \omega^2 \varphi^0 = -g, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} - i\omega \varphi^0 = 0, & \text{sur } \Gamma_f. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Preuve du théorème 4.3

Prenons dans le problème (4.26) $v = \tilde{e}^\varepsilon$:

$$(A \tilde{e}^\varepsilon ; \varphi^0)_{H^1(\Omega)} = (\tilde{e}^\varepsilon ; g)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.28)$$

En effectuant la soustraction des équations vérifiées par u^0 et $\tilde{u}^\varepsilon$, il est clair que nous avons :

$$A \tilde{e}^\varepsilon = -B_0^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon. \quad (4.29)$$

Par conséquent on peut écrire :

$$(\tilde{e}^\varepsilon ; g)_{L^2(\Omega)} = (A \tilde{e}^\varepsilon ; \varphi^0) = -(B_0^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon ; \varphi^0)_{H^1(\Omega)}. \quad (4.30)$$

Par définition de B_0^ε nous tirons :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon ; g)_{L^2(\Omega)}| \leq C |(\tilde{u}^\varepsilon ; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \times |(\varphi^0 ; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \quad (4.31)$$

Par régularité elliptique pour (4.27) :

$$\|\varphi^0\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.32)$$

Ainsi d'après le corollaire 4.6 et le lemme 3.13 :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon ; g)_{L^2(\Omega)}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} C \sqrt{\varepsilon} \|\varphi^0\|_{H^2(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.33)$$

En utilisant la caractérisation duale de la norme $L^2(\Omega)$:

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(\tilde{e}^\varepsilon ; g)_{L^2(\Omega)}|}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}, \quad (4.34)$$

on obtient le théorème. $\square$

4.2.4 Caractère optimal des estimations

Théorème 4.7 *Il existe deux constantes C_1 et C_2 positives telles que :*

- (i) $\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega)} \geq C_1 \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)|^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$
- (ii) $\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \varepsilon |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Remarque 4.8 Ces inégalités prouvent que sous la condition $u^0(0,0) \neq 0$, les estimations des propositions 4.1 et 4.3 sont optimales.

Preuve de (i)

Commençons tout d'abord par rappeler un théorème de trace :

Si u est un élément de $H^1(\Omega)$ à laplacien dans $L^2(\Omega)$. On peut alors montrer que l'on peut définir sur chaque morceau Γ_i de la frontière sa dérivée normale. Ce sera alors un élément de $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'$.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{[H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)]'} \leq C (\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}) \quad (4.35)$$

On se référera par exemple pour la démonstration au théorème 1.5.3.10 page 61 de [16].

Appliquons ce résultat pour $\tilde{e}^\varepsilon$:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{e}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{e}^\varepsilon &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} &= -i\omega (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon) \tilde{w}_0^\varepsilon & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \tilde{e}^\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma_f. \end{cases} \quad (4.36)$$

Par conséquent on a :

$$\|i\omega (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon) \tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'} \leq C (\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta \tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.37)$$

De plus, la norme $L^2(\Omega)$ du laplacien de $\tilde{e}^\varepsilon$ est contrôlée à l'aide de sa norme $L^2(\Omega)$:

$$\omega |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)| \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'} \leq C \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.38)$$

Nous avons besoin pour continuer d'une minoration de la norme $[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'$ de $\tilde{w}_0^\varepsilon$, c'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 4.9 Il existe une constante C ne dépendant pas ε telle que :

$$C \sqrt{\varepsilon |\log \varepsilon|} \leq \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'}. \quad (4.39)$$

Preuve.

Commençons par rappeler une caractérisation de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Cet ensemble peut être identifié à l'ensemble $\tilde{H}_{00}^{1/2}(|-a, a|)$ (cf (2.2) pour la définition de a) des fonctions de $H^{1/2}(\mathbb{R})$ nulles hors de $|-a, a|$. De plus, nous disposons d'une norme équivalente à $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$:

$$m \|u\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\tilde{u}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq M \|u\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}, \quad (4.40)$$

où $\tilde{u}$ est la prolongée de u par 0 hors de $|-a, a|$.

Nous allons maintenant montrer l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \leq C \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'}. \quad (4.41)$$

Considérons une fonction de troncature $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que φ est nulle hors de $[-a, a]$ et telle que, pour un R donné ($\varepsilon < R < a$), φ est égale à 1 sur le segment $[-R, R]$. On a pour tout $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \hat{u} = \varphi u, \hat{u} \in \tilde{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \\ \|\hat{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Comme le support $\tilde{w}_0^\varepsilon$ est inclus dans le segment $[0, \varepsilon]$ on a l'égalité suivante pour tout $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$:

$$(\tilde{w}_0^\varepsilon; u)_{\mathbb{R}} = (\tilde{w}_0^\varepsilon; \hat{u})_{\mathbb{R}}, \quad (4.43)$$

où nous avons donné à $(u, v)_{\mathbb{R}}$ le sens de :

$$\int_{\mathbb{R}} u(y) v(y) dy, \quad (4.44)$$

qui peut être réinterprété comme un produit de dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}), H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Nous pouvons écrire à l'aide de (4.42) :

$$C \frac{(\tilde{w}_0^\varepsilon; u)}{\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}} \leq \frac{(\tilde{w}_0^\varepsilon; \hat{u})}{\|\hat{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}}. \quad (4.45)$$

Comme $\hat{u} \in \tilde{H}_{00}^{1/2}(|-a, a|)$, on a la majoration :

$$C \frac{(\tilde{w}_0^\varepsilon; u)}{\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}} \leq \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\mathbb{R})]'}; \quad (4.46)$$

on passe ensuite au suprémum sur $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$:

$$C \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \leq \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\mathbb{R})]'}'. \quad (4.47)$$

Et enfin il ne nous reste plus qu'à utiliser le lemme 3.12 pour obtenir la conclusion du lemme. $\square$

De l'inégalité (4.38) et du lemme 4.9 nous tirons :

$$C |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \sqrt{\varepsilon |\log \varepsilon|} \leq \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.48)$$

Il ne nous reste plus qu'à minorer $|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|$:

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \geq |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| - |(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (4.49)$$

La fonction u^0 est très régulière dans un voisinage de la fente, elle est par exemple Lipschitzienne sur le segment $[0, \varepsilon]$ et la constante de Lipschitz peut être estimée par la norme $L^2(\Omega)$ de f , nous en déduisons :

$$|u^0(0, y) - u^0(0, 0)| \leq C y \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.50)$$

la constante C dépend de la distance qui sépare le support de f de la fente.

Nous utilisons ceci pour obtenir la minoration :

$$\begin{aligned} |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| &\geq \left| \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^0(0, 0) dy - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon y dy \right| \right| \\ &\geq C \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C \varepsilon^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

De plus on majore l'autre terme à l'aide du (ii) du lemme 3.13 :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \varepsilon \sqrt{\text{Log}(\varepsilon)} \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.52)$$

et ainsi à l'aide du théorème 4.1 on tire :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \varepsilon^{3/2} |\log \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.53)$$

Ce qui prouve qu'il existe deux constante $C_1 > 0$ et C_2 telles que :

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \geq C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.54)$$

Et à l'aide de (4.48) :

$$C_1 \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)|^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad \square \quad (4.55)$$

Preuve de (ii)

Nous aurons besoin pour la démonstration du :

Lemme 4.10 *Pour toute fonction u de $H^1(\Delta, \Omega)$, la restriction à Γ de $\frac{\partial u}{\partial n}$ est un élément du dual de $H_{00}^{3/2}(\Gamma)$ et on a l'estimation suivante*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{[H_{00}^{3/2}(\Gamma)]'} \leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.56)$$

Preuve.

Pour tout g défini sur Γ_f tels que :

$$g|_\Gamma \in H_{00}^{3/2}(\Gamma) \text{ et } g|_{\Gamma_f} = 0, \quad (4.57)$$

il existe, d'après le théorème de relèvement 1.5.2.8 page 50 de [16], une fonction $v \in H^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} v|_{\partial\Omega} = g \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{H_{00}^{3/2}(\Gamma)}. \end{cases} \quad (4.58)$$

Soit maintenant $u \in H^1(\Delta, \Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ Nous pouvons définir sa dérivée normale sur le bord en tant qu'élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ainsi que sa trace u élément de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, le calcul suivant est licite et s'obtient par intégration par partie :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, g \right\rangle - \langle u; 0 \rangle = \int_\Omega \Delta u v - u \Delta v. \quad (4.59)$$

Grâce au théorème de Cauchy Schwartz et à l'inégalité triangulaire :

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, g \right\rangle \right| \leq (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.60)$$

Par conséquent pour tout $g \in H_{00}^{3/2}(\Gamma)$:

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, g \right\rangle \right| \leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}) \|g\|_{H_{00}^{3/2}(\Gamma)}. \quad (4.61)$$

Par définition de la norme duale :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{[H_{00}^{3/2}(\Gamma)]'} \leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}). \quad \square \quad (4.62)$$

Nous aurons aussi besoin d'une minoration de la norme $[H_{00}^{3/2}(\Gamma)]'$ fournie par le lemme suivant :

Lemme 4.11 *Il existe une constante C telle que :*

$$C \sqrt{\varepsilon} \leq \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{3/2}(\Gamma)]'}.$$

Preuve. En utilisant des arguments similaires à ceux développés dans la preuve du lemme 4.9 :

$$C \sqrt{\varepsilon} \leq \|w_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \|w_0^\varepsilon\|_{(H_{00}^{3/2}(\Gamma))'}. \quad (4.63)$$

A l'aide du lemme 3.12 on a la conclusion. $\square$

Le lemme 4.10 entraîne ($\tilde{e}^\varepsilon$ est solution de (4.36)) :

$$C |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)| \|w_0^\varepsilon\|_{(H_{00}^{3/2}(\Gamma))'} \leq C \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.64)$$

et à l'aide de (4.54)) il existe deux constantes $C_1 > 0$ et C_2 telles que :

$$C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \text{Log}(\varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)|. \quad (4.65)$$

nous pouvons donc écrire :

$$C_1 \varepsilon |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^2 \text{Log}(\varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (4.66)$$

Remarque 4.12 *Les techniques de preuves des points (i) et (ii) sont très similaires, si bien que nous avons choisi de présenter qu'une partie des preuves qui sont d'ailleurs classiques. On peut par exemple rapprocher le lemme 4.10 de l'estimation (4.35).*

4.3 Etude de l'approximation de u^ε par $\tilde{u}^\varepsilon$

Nous allons étudier dans cette partie l'erreur η^ε commise par le modèle approché :

$$\eta^\varepsilon = u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon. \quad (4.67)$$

Il est facile de voir que η^ε vérifie indifféremment les équations suivantes :

$$(A + B^\varepsilon)\eta^\varepsilon = -R^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon \quad \text{et} \quad (A + B_0^\varepsilon)\eta^\varepsilon = -R^\varepsilon u^\varepsilon. \quad (4.68)$$

4.3.1 Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ en norme $H^1(\Omega)$

Théorème 4.13 *Il existe C (indépendant de ε) telle que*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.69)$$

Remarque 4.14 *Il faut comparer cette erreur avec l'erreur commise par u^ε sur u^0 (théorème 3.11). Nous remarquons que nous avons seulement gagné un facteur $\sqrt{\text{Log}(\varepsilon)}$. Notre conjecture est pourtant que ce résultat est optimal.*

Le résultat suivant est en fait le résultat de consistance

Lemme 4.15 *Il existe $C > 0$ ne dépendant pas de ε tel que :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.70)$$

Supposons pour un court instant que nous ayons établi la proposition 4.15.

Preuve du théorème 4.13

En Appliquant le théorème 3.6 le corollaire 3.17 et le lemme 4.15 :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|R^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (4.71)$$

Preuve du lemme 4.15.

$\|\cdot\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}$ est une semi-norme sur $H^1(\Omega)$, par conséquent :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} + \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (4.72)$$

Appliquons le lemme 3.15, (appliqué pour $s = 1/2$) puis le théorème 4.6 (avec $s = 1/2$ également) pour obtenir :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.73)$$

l'estimation pour u^0 , a déjà été démontré en (3.116). $\square$

Signalons pour conclure une conséquence immédiate du théorème 4.13 qui nous sera utile à la section 4.3.2 :

Corollaire 4.16 *Il existe $C > 0$ ne dépendant pas de ε tel que :*

$$\|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.74)$$

Preuve.

Le lemme 3.15 (appliqué pour $s = 0$) entraîne :

$$\|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0,\varepsilon])} \leq \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0,\varepsilon])} + \|\eta^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0,\varepsilon])} \leq \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}([0,\varepsilon])} + \|\eta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad (4.75)$$

Le lemme de consistance 4.15 ainsi que le théorème 4.13 d'estimation d'erreur en norme $H^1(\Omega)$ nous permettent de conclure. $\square$

4.3.2 Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ en norme $L^2(\Omega)$

Nous montrons ici que la solution approchée $\tilde{u}^\varepsilon$ approche de façon quadratique la solution exacte u^ε .

Théorème 4.17 *Pour tout $s \in]0, 1]$, il existe une constante C ne dépendant pas de ε telle que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^{2-s} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.76)$$

Preuve du théorème. Nous utilisons une technique de dualité :

Pour $g \in L^2(\Omega)$ donné, considérons le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{\varphi} \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ ((A + B^{\varepsilon,0}) v; \tilde{\varphi})_{H^1(\Omega)} = (v; g)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Ce problème est le problème dual du problème approché (4.4), il est évidemment bien posé. Il est très facile d'exprimer ce problème en termes d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{\varphi} + \omega^2 \tilde{\varphi} = -g, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Sigma^\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} - i\omega \tilde{\varphi} = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} - i\omega(\tilde{\varphi}_0; w_0^\varepsilon) w_0^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Sigma^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (4.78)$$

De façon évidente, le résultat (4.9) obtenu pour $\tilde{u}^\varepsilon$ s'applique à $\tilde{\varphi}$ et on a donc :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} \in H^{1+s}(\Omega), \\ \|\tilde{\varphi}\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \|g\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \quad (4.79)$$

Choisissons $v = \eta^\varepsilon$ comme fonction test du problème dual :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad ((A + B^{\varepsilon,0}) \eta^\varepsilon; \tilde{\varphi}) = (\eta^\varepsilon; g). \quad (4.80)$$

Ainsi comme η^ε vérifie l'équation (4.68)

$$(\eta^\varepsilon; g) = ((A + B^{\varepsilon,0}) \eta^\varepsilon; \tilde{\varphi}) = -(R^\varepsilon u^\varepsilon; \tilde{\varphi}). \quad (4.81)$$

Grâce au lemme 3.16 il vient :

$$|(\eta^\varepsilon; \tilde{\varphi})| \leq C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \|\tilde{\varphi}\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)}. \quad (4.82)$$

Par ailleurs en utilisant le (i) du lemme 3.15 puis (4.79) on a :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad \|\tilde{\varphi}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon^s \|\tilde{\varphi}\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^s \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.83)$$

En regroupant les inégalités (4.74), (4.82) et (4.83) nous avons :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad |(\eta^\varepsilon; g)| \leq C(s) \varepsilon^{1+s} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.84)$$

On obtient le théorème à l'aide de l'écriture duale de la norme $L^2(\Omega)$

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{(\eta^\varepsilon, g)_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}. \quad \square \quad (4.85)$$

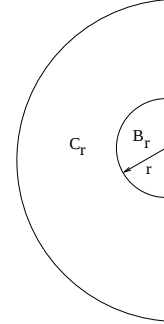
4.3.3 Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ dans des domaines évitant la fente

Considérons maintenant la famille de domaines :

$$\Omega_r = \{x \in \Omega / \|x\| \geq r\}, \quad (4.86)$$

ainsi que leur complémentaire :

$$B_r = \{x \in \Omega / \|x\| < r\}. \quad (4.87)$$



Nous montrons ici que, si nous excluons un petit domaine incluant la fente alors nous pouvons obtenir des estimations d'erreurs en ε^2 pour la norme H^1 . Ceci est concrétisé par les théorème suivant.

Théorème 4.18 *Pour tout $R > 0$, il existe une constante $C(R)$ indépendant de ε telle que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 4.19 *Pour tout $R > 0$, il existe une constante $C(R)$ indépendant de ε telle que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous verrons lors de la preuve que le théorème 4.19 est une conséquence du théorème 4.18.

Preuve du théorème 4.18.

Considérons comme dans la partie 4.3.2 la solution $\tilde{\varphi}$ du problème modèle approché dual, mais cette fois avec un g à support inclus dans Ω_R (pour un R donné strictement positif). Bien entendu nous avons toujours (cf 4.82) :

$$|(\eta^\varepsilon; g)| \leq C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma^\varepsilon)} \|\tilde{\varphi}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma^\varepsilon)}. \quad (4.88)$$

L'équivalent du lemme 4.15 (qui utilise le fait que f est à support dans Ω_R) s'applique bien sûr à $\tilde{\varphi}$:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(R) \varepsilon \|g\|_{L^2(\Omega_R)} \quad (4.89)$$

et par conséquent d'après le corollaire 4.16 :

$$|(\eta^\varepsilon, g)| \leq C(R) \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega_R)}. \quad (4.90)$$

On obtient le théorème à l'aide de l'écriture duale de la norme $L^2(\Omega_R)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega_R)} = \sup_{g \in L^2(\Omega_R)} \frac{(\eta^\varepsilon, g)_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega_R)}}. \quad \square \quad (4.91)$$

Preuve du théorème 4.19.

Comme nous travaillons sur une couronne qui évite la fente, il nous suffit de rappeler les équations vérifiées par η^ε hormis les conditions aux limites associées à la fente :

$$\begin{cases} \Delta \eta^\varepsilon + \omega^2 \eta^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial n} + i\omega \eta^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.92)$$

Soit $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ une fonction de troncature radiale, φ valant 1 sur Ω_R et 0 sur $B_{R/2}$. Nous obtenons la semi-norme $H^1(\Omega)$ de $|\varphi \eta^\varepsilon|$ à l'aide d'une formule de Green :

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)|^2 = - \int_\Omega \Delta(\varphi \eta^\varepsilon) \overline{\varphi \eta^\varepsilon} + \int_{\Gamma_f} \frac{\partial(\varphi \eta^\varepsilon)}{\partial n} \overline{\varphi \eta^\varepsilon}. \quad (4.93)$$

Nous développons le laplacien de $\varphi \eta^\varepsilon$ et utilisons l'équation différentielle vérifiée par η^ε dans Ω :

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi \eta^\varepsilon) &= \Delta(\varphi) \eta^\varepsilon + 2(\nabla \varphi)(\nabla \eta^\varepsilon) + \varphi(\Delta \eta^\varepsilon), \\ &= \Delta(\varphi) \eta^\varepsilon + 2(\nabla \varphi)(\nabla \eta^\varepsilon) - \omega^2 \varphi \eta^\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.94)$$

et remarquons que, sur Γ_f , φ est identiquement égale à 1 :

$$\int_{\Gamma_f} \frac{\partial(\varphi \eta^\varepsilon)}{\partial n} \overline{\varphi \eta^\varepsilon} = \int_{\Gamma_f} \frac{\partial(\eta^\varepsilon)}{\partial n} \overline{\eta^\varepsilon} = -i\omega \int_{\Gamma_f} |\eta^\varepsilon|^2. \quad (4.95)$$

En regroupant ces résultats nous pouvons donc écrire :

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega (\Delta(\varphi) \eta^\varepsilon + 2(\nabla \varphi)(\nabla \eta^\varepsilon) - \omega^2 \varphi \eta^\varepsilon) \overline{\varphi \eta^\varepsilon} - i\omega \int_{\Gamma_f} |\eta^\varepsilon|^2. \quad (4.96)$$

Prenons la partie réelle de cette expression et majorons :

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)|^2 \leq \left| \int_\Omega (\Delta(\varphi) \eta^\varepsilon + 2(\nabla \varphi)(\nabla \eta^\varepsilon) - \omega^2 \varphi \eta^\varepsilon) \overline{\varphi \eta^\varepsilon} \right|. \quad (4.97)$$

A l'aide de la formule :

$$\nabla(\varphi \eta^\varepsilon) = \nabla(\varphi) \eta^\varepsilon + \varphi \nabla(\eta^\varepsilon). \quad (4.98)$$

nous pouvons écrire :

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)|^2 \leq \left| \int_\Omega \left[(\Delta(\varphi) \varphi - 2(\nabla \varphi)^2 - \omega^2) |\eta^\varepsilon|^2 + 2 \nabla(\varphi \eta^\varepsilon) \overline{\varphi \eta^\varepsilon} \right] \right|. \quad (4.99)$$

Comme $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ on peut majorer ses dérivées successives par des constantes et de plus $\varphi = 0$ dans $B_{R/2}$ nous pouvons donc limiter les intégrales à $\Omega_{R/2}$:

$$\int_{\Omega_{R/2}} |\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)|^2 \leq C \int_{\Omega_{R/2}} [|\eta^\varepsilon|^2 + \nabla(\varphi \eta^\varepsilon) \overline{\eta^\varepsilon}]. \quad (4.100)$$

D'après l'inégalité de Young pour tout $a > 0$:

$$\|\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{R/2})}^2 \leq C \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R/2})}^2 + C a \|\varphi \eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R/2})}^2 + \frac{C}{a} \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R/2})}^2. \quad (4.101)$$

On prend $a = \frac{1}{2C}$ et par conséquent :

$$\|\nabla(\varphi \eta^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{R/2})} \leq C \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R/2})}. \quad (4.102)$$

De plus, la fonction φ est égale à 1 sur Ω_R :

$$\|\nabla \eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R/2})}, \quad (4.103)$$

ce qui démontre le résultat annoncé. $\square$

4.3.4 Estimation de $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ dans la fente

Pour tous les points intérieurs à la fente (i.e $x > 0$, et $y \in]0, \varepsilon[$) nous disposons de la formule de représentation de la solution exacte :

$$u^\varepsilon(x, y) = (u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_0^\varepsilon(y) \exp(-i \omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u^\varepsilon; w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_n^\varepsilon(y) \exp(\xi_n^\varepsilon(\omega) x). \quad (4.104)$$

De même pour le modèle approché nous disposons de la formule de représentation unidimensionnelle pour tout $x > 0$:

$$\tilde{u}^\varepsilon(x) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(0, y) dy \right] \exp(-i \omega x). \quad (4.105)$$

On définit de manière tout à fait naturelle un prolongement de $\tilde{u}^\varepsilon$ à la fente ($x > 0$, $y \in]0, \varepsilon[$) :

$$\tilde{u}^\varepsilon(x, y) = \tilde{u}^\varepsilon(x). \quad (4.106)$$

Par conséquent, on a la formule de représentation suivante :

$$\tilde{u}^\varepsilon(x, y) = (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_0^\varepsilon(y) \exp(-i \omega x). \quad (4.107)$$

Étude du comportement des solutions sur l'interface

La donnée des solutions u^ε et $\tilde{u}^\varepsilon$ sur le segment Σ_ε nous permettent de complètement déterminer ces solutions à l'intérieur de la fente par les formules de représentation (4.104) et (4.107). Nous donnons ici des résultats relatifs aux coefficients de décomposition des traces de u^ε et $\tilde{u}^\varepsilon$ sur Σ_ε . Ces résultats présentés sous la forme de lemme nous permettrons d'obtenir les estimations à l'intérieur de la fente.

Le lemme suivant donne le comportement asymptotique du coefficient de projection de la solution exacte sur le premier mode de la fente.

Lemme 4.20 *Il existe une constante C positive telle que :*

$$|(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.108)$$

de plus si $u^0(0, 0) \neq 0$ il existe $C_1 > 0$ et C_2 telle que :

$$C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (4.109)$$

Preuve.

Introduisons tout d'abord la solution limite de u^0 :

$$|(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| - |(u^\varepsilon - u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| + |(u^\varepsilon - u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (4.110)$$

Appliquons le (ii) du lemme 3.13 ainsi que le théorème 4.13 :

$$|(u^\varepsilon - u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{|\varepsilon \operatorname{Log}(\varepsilon)|} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{3/2} |\operatorname{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.111)$$

La remarque 3.18 et l'inégalité (4.51) nous permet d'obtenir (4.108) et (4.109). $\square$

Ce dernier lemme donne le comportement asymptotique de l'approximation de u_0^ε par $\tilde{u}_0^\varepsilon$

Lemme 4.21 *Il existe une constante C ne dépendant pas de ε*

$$|(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\operatorname{Log} \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.112)$$

Preuve. Le (ii) du lemme 3.13 nous permet d'écrire :

$$|(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq \sqrt{\varepsilon |\operatorname{Log}(\varepsilon)|} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.113)$$

On conclut à l'aide du théorème 4.13. $\square$

Estimation de u^ε dans la fente

Nous voulons ici déterminer si le modèle prend bien en compte la forme de la solution à l'intérieur de la fente. Pour obtenir des jauges d'erreurs, nous allons calculer différentes normes de $u^\varepsilon(x, y)$ à l'intérieur de la fente. Considérons deux types de domaine à l'intérieur de la fente, le premier type de domaine A_L (avec L strictement positif) touche la fente et permet d'obtenir des estimations d'erreur proche de la jonction :

$$A_L = |0, L| \times |0, \varepsilon|. \quad (4.114)$$

Le deuxième B_{L_1, L_2} ($0 < L_1 < L_2$) est intérieur à la fente :

$$B_{L_1, L_2} = |L_1, L_2| \times |0, \varepsilon|. \quad (4.115)$$

Il permet d'obtenir des estimations ne prenant pas en compte la partie de l'erreur due aux coins.

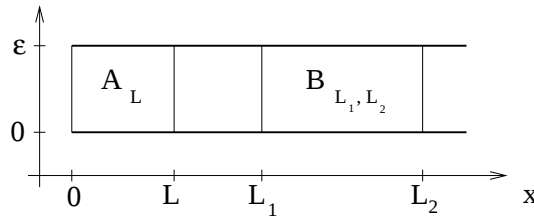


FIG. 10: Rappel des définitions des domaines A_L et B_{L_1, L_2}

Proposition 4.22 *Il existe trois constantes $C_1 > 0$, C_2 et $C_3 > 0$ ne dépendant pas de ε telles que :*

$$C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\operatorname{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(A_L)} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.116)$$

Preuve. Calculons, à l'aide du développement (4.104), la norme $H^1(A_L)$ de u^ε :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 &= (1 + \omega^2) |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 \int_0^L 1 \, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} + |\xi_n^\varepsilon(\omega)|^2 \right) |(u^\varepsilon; w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 \int_0^L \exp(-2 \xi_n^\varepsilon(\omega) x) \, dx. \end{aligned} \quad (4.117)$$

En intégrant et en remplaçant $\xi_n^\varepsilon(\omega)$ par sa valeur :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 &= (1 + \omega^2) |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 L \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \omega^2 + 2 \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2}}{\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} - \omega^2}} \right) |(u^\varepsilon; w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 (1 - \exp(-2 \xi_n^\varepsilon(\omega) L)). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Par conséquent nous avons l'encadrement suivant :

$$L |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 \leq C |(u^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 L + C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}^2. \quad (4.119)$$

Nous obtenons la proposition à l'aide du lemme 4.20 et du corollaire 4.16. $\square$

De même, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 4.23 *Il existe trois constantes $C_1 > 0$, C_2 et $C_3 > 0$ telles que :*

$$C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(B_{L_1, L_2})} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous pouvons remarquer que l'énergie H^1 est répartie de façon à peu près uniforme que ce soit proche ou loin de l'embouchure de la fente.

De même, nous pouvons obtenir des estimations d'erreurs en norme L^2 .

Proposition 4.24 *Pour tout $L > 0$ (resp. $0 < L_1 < L_2$), il existe une constante C_1 et C_2 positive telle que :*

$$\begin{aligned} C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u^\varepsilon\|_{L^2(A_L)} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \\ \text{resp. } C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0,0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u^\varepsilon\|_{L^2(B_{L_1, L_2})} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En regardant les preuves de plus près, nous pouvons remarquer que la majorité de l'énergie contenue dans la fente par la solution exacte est principalement due à son terme propagatif que ce soit loin ou proche de la jonction.

Tous les résultats obtenus à la partie suivante sont à comparer avec ces résultats. En effet un bon modèle devra satisfaire la condition suivante écrite ici formellement

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\| \ll \|u^\varepsilon\| \quad (4.120)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur les domaines A_L ou B_{L_1, L_2} . En effet la solution limite n'est pas définie à l'intérieur de la fente. L'approximation naturelle de la solution exacte dans la fente est donc 0.

Erreur commise par le modèle à l'intérieur de la fente

Nous donnons deux théorèmes d'erreur du modèle, le premier sur les domaines touchant la fente (A_L) et le deuxième sur les domaines loin de la fente (B_{L_1, L_2})

Théorème 4.25 *Il existe une constante C ne dépendant pas de ε telle que*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(A_L)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2}$$

Preuve. Calculons la norme $H^1(A_L)$ de l'erreur $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ à l'aide des formules de représentations (4.104) et (4.107) :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 &= (1 + \omega^2) |(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 L \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \omega^2 + 2 \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2}}{\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} - \omega^2}} \right) |(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 (1 - \exp(-2 \xi_n^\varepsilon(\omega) L)). \end{aligned}$$

Nous transformons cette égalité en l'estimation suivante :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(A_L)} \leq C |(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| + C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \quad (4.121)$$

Le corollaire 4.16 et le lemme 4.21 nous permettent de conclure. $\square$

Dans le cas de l'approximation proche de l'embouchure, la majorité de l'erreur du modèle est due aux modes évanescents. On peut donc en conclure que ce sont les singularités qui sont responsables de cette erreur.

Dans les domaines B_{L_1, L_2} nous allons enfin profiter du fait qu'une partie de la solution est évanescence.

Théorème 4.26 *Pour tout $0 < L_1 < L_2$, il existe une constante C telle*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(B_{L_1, L_2})} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\log \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.122)$$

Preuve.

Utilisons encore les formules de représentation et majorons à l'aide des mêmes techniques qu'auparavant :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 &\leq C |(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 \\ &+ C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}^2 (\exp(-2 \xi_n^\varepsilon(\omega) L_1) - \exp(-2 \xi_n^\varepsilon(\omega) L_2)). \end{aligned} \quad (4.123)$$

Or pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\xi_n^\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} - \omega^2} \geq C_1 \frac{\pi}{\varepsilon}, \quad (4.124)$$

ainsi nous pouvons faire apparaître un terme de décroissance exponentielle :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(A_L)}^2 \leq C |(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|^2 + C \exp\left(-2 C_1 \frac{L_1}{\varepsilon}\right) \|u^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}^2. \quad (4.125)$$

Le corollaire 4.16 et le lemme 4.21 nous permettent de conclure. $\square$

Cette fois, loin des coins, les singularités ne sont plus apparentes. Nous retrouvons donc l'erreur que nous commettons seulement sur le premier mode, les autres modes étant amortis exponentiellement.

Nous pouvons aussi avec des méthodes similaires obtenir des inégalités $L^2(\Omega)$, cette fois que nous soyons proche ou loin de la fente, l'erreur est due au mode propagatif.

Théorème 4.27 *Pour tout $L > 0$ (resp. $0 < L_1 < L_2$), il existe une constante C positive telle que*

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(A_L)} &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\log \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \left(\text{resp. } \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(B_{L_1, L_2})} &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\log \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.126)$$

Dans toutes les normes que nous avons ici étudiées nous pouvons remarquer que notre modèle est bon.

4.4 Récapitulatif

Résumons notre étude à l'aide de tableaux. La première ligne précise la norme de travail, la deuxième majore l'erreur absolue du modèle, la troisième la vitesse de convergence de la solution exacte vers la solution limite. la dernière ligne de chaque tableau montre l'amélioration apportée par le modèle, c'est à dire une erreur relative.

Les estimations soulignées ont été montrées optimales. En effet, nous avons montré l'optimalité des estimations $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ et l'optimalité de celles-ci se déduit à l'aide d'une inégalité triangulaire :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_N \geq \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_N - \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_N. \quad (4.127)$$

Commençons par les estimations sur le demi-plan de propagation :

N	$=$	$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$	$H^1(\Omega_R)$	$L^2(\Omega_R)$
$\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _N$	$\leq$	$C \varepsilon$	$C(\delta) \varepsilon^{2-\delta}, \forall \delta > 0$	$C(R) \varepsilon^2$	$C(R) \varepsilon^2$
$\ u^\varepsilon - u^0\ _N$	$\leq$	$\underline{C \varepsilon \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}}$	$\underline{C \varepsilon}$	$\underline{C \varepsilon}$	$\underline{C \varepsilon}$
$\frac{\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _N}{\ u^\varepsilon - u^0\ _N}$	$\leq$	$C \text{Log}(\varepsilon) ^{-1/2}$	$C(\delta) \varepsilon^{1-\delta}, \forall \delta > 0$	$C \varepsilon$	$C \varepsilon$

Ajoutons quelques précisions : l'estimation de $u^\varepsilon - u^0$ provient de façon triviale de l'inégalité :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \leq \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.128)$$

L'estimation de $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)}$ s'en déduit en effectuant la même preuve que pour le théorème 4.19. Nous n'avons pas eu le souci de montrer avec la plus grande rigueur l'optimalité de ces inégalités pour les conditions absorbantes. On pourra tout de même pour se convaincre se reporter à l'annexe C ; nous y donnons l'optimalité de ce résultat dans le cas des conditions transparentes.

Finissons par le tableau des estimations à l'intérieur de la fente :

N	$=$	$H^1(A_L)$	$L^2(A_L)$	$H^1(B_{L_1, L_2})$	$L^2(B_{L_1, L_2})$
$\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _N$	$\leq$	$C \varepsilon$	$C \varepsilon^{3/2} \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon^{3/2} \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon^{3/2} \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$
$\ u^\varepsilon\ _N$	$\leq$	$\underline{C \sqrt{\varepsilon}}$	$\underline{C \sqrt{\varepsilon}}$	$\underline{C \sqrt{\varepsilon}}$	$\underline{C \sqrt{\varepsilon}}$
$\frac{\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _N}{\ u^\varepsilon\ _N}$	$\leq$	$C \sqrt{\varepsilon}$	$C \varepsilon \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$

A Ansatz du problème de la fente courbe à section constante

Considérons U^ε solution du problème de Helmholtz posée en coordonnées curvilignes :

$$\forall s \in I, \forall \nu \in]0, \varepsilon[, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 + \nu c(s))^{-1} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(1 + \nu c(s)) \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial \nu} \right] + \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad (\text{A.1})$$

où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et pour $\nu = 0$ ou ε :

$$\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \nu) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Effectuons la normalisation suivante :

$$\nu = \varepsilon z, \quad (\text{A.3})$$

on vérifie ainsi les équations suivantes sur le pavé $I \times]0, 1[$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(1 + z \varepsilon c(s))^{-1} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + z \varepsilon c(s)) \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial z} \right] + \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad (\text{A.4})$$

et pour $z = 0$ ou 1 on a :

$$\forall s \in I, \quad \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial z}(s, z) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Supposons maintenant que U^ε peut se mettre sous la forme d'un développement limité appelé aussi Ansatz :

$$U^\varepsilon(s, z) = U_P^\varepsilon + o(\varepsilon^P), \quad U_P^\varepsilon = \sum_{j=0}^P \varepsilon^j U^j(s, z). \quad (\text{A.6})$$

où tous les U^i vérifie la condition aux limites A.5.

Injectons ce développement dans l'équation A.4 il vient ainsi un développement limité de A.4, dont on peut tirer les équations (A.7) (A.9) (A.11) (A.16) et (A.20) :

$$\forall s \in I, \forall z \in]0, 1[, \quad \frac{\partial^2 U^0}{\partial z^2}(s, z) = 0. \quad (\text{A.7})$$

et par conséquent comme U^0 vérifie les conditions aux limites (A.5)

$$U^0(s, z) = U^0(s). \quad (\text{A.8})$$

Le deuxième ordre du développement nous permet d'obtenir la dépendance de U^1 en fonction de z , en effet :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[z c(s) \frac{\partial U^0}{\partial z} + \frac{\partial U^1}{\partial z} \right] = 0, \quad (\text{A.9})$$

et grâce à A.8 :

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial z^2}(s, z) = 0 \implies U^1(s, z) = U^1(s). \quad (\text{A.10})$$

Le troisième ordre nous fournit la dépendance de U^2 en fonction de t ainsi que l'équation qui régit U^0 :

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[z c(s) \frac{\partial U^1}{\partial z} + \frac{\partial U^2}{\partial z} \right] + \omega^2 U^0 = 0 \quad (\text{A.11})$$

en groupant astucieusement les termes, remarquons à l'aide de A.8 :

$$\frac{\partial^2 U^2}{\partial z^2}(s, z) = -\frac{\partial^2 U^0}{\partial s^2} - \omega^2 U^0 = f(s). \quad (\text{A.12})$$

c'est à dire :

$$\forall (s, z) \in I \times]0, 1[, \quad U^2(s, z) = a^2(s) + b^2(s) z + \frac{f(z)}{2} z^2, \quad (\text{A.13})$$

et ainsi grâce à A.5 :

$$U^2(s, z) = U^2(s). \quad (\text{A.14})$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial s^2} + \omega^2 U^0 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Pour les ordres suivants la dépendance en z devient polynomiale, en effet :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[-z c(s) \frac{\partial U^0}{\partial s} + \frac{\partial U^1}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[z c(s) \frac{\partial U^2}{\partial z} + \frac{\partial U^3}{\partial z} \right] + \omega^2 U^1 = 0, \quad (\text{A.16})$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial^2 U^3}{\partial z^2} = z \frac{\partial}{\partial s} \left[c(s) \frac{\partial U^0}{\partial s}(s) \right] - \frac{\partial^2 U^1}{\partial s^2}(s) - \omega^2 U^1(s). \quad (\text{A.17})$$

On intègre cette équation pour $z \in [0, 1]$, puis on assure la condition aux limites A.5 pour U^3 en $z = 0$ et $z = 1$ on obtient d'une part l'équation vérifiée par U^1 :

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial s^2}(s) + \omega^2 U^1(s) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[c(s) \frac{\partial U^0}{\partial s}(s) \right] = 0. \quad (\text{A.18})$$

et la dépendance en z de U^3 (que nous donnons car c'est ce qui permettrait au lecteur de pousser le développement limité à un ordre supérieur)

$$U^3(s, z) = f(s) - \frac{z^2}{2} \left[\frac{\partial^2 U^1}{\partial s^2}(s) + \omega^2 U^1(s) \right] + \frac{z^3}{6} \frac{\partial}{\partial s} \left[c(s) \frac{\partial U^0}{\partial s}(s) \right]. \quad (\text{A.19})$$

Pour l'ordre supérieur, donnant la dernière équation en s sur un U^i qui ne dépend pas de t , on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[z^2 (c(s))^2 \frac{\partial U^0}{\partial s} - z c(s) \frac{\partial U^1}{\partial s} + \frac{\partial U^2}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[z c(s) \frac{\partial U^3}{\partial z} + \frac{\partial U^4}{\partial z} \right] + \omega^2 U^2 = 0. \quad (\text{A.20})$$

et on intègre cette équation par rapport à z sur $[0, 1]$ et en appliquant les conditions aux limites A.5 pour U^3 et U^4 :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left[(c(s))^2 \frac{\partial U^0}{\partial s} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[c(s) \frac{\partial U^1}{\partial s} \right] + \frac{\partial^2 U^2}{\partial s^2} + \omega^2 U^2 = 0. \quad (\text{A.21})$$

et ainsi à partir de (A.15) (A.18) et (A.21) il vient :

U_0^ε ne dépend que de s et vérifie :

$$\Delta U_0^\varepsilon + \omega^2 U_0^\varepsilon = 0 \quad (\text{A.22})$$

U_1^ε ne dépend que de s et vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon c(s) \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial s^2} + \omega^2 U_1^\varepsilon = r^1(\varepsilon), \\ r^1(\varepsilon)/\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon c(s) \frac{\partial U^2}{\partial s} \right]. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

U_2^ε ne dépend que de s et vérifie :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon^2 (c(s))^2 \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial s} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon c(s) \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial s^2} + \omega^2 U_2^\varepsilon = r^2(\varepsilon), \\ r^2(\varepsilon)/\varepsilon^3 = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon^2 (c(s))^2 \frac{\partial (U^1 + \varepsilon U^2)}{\partial s} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon c(s) \frac{\partial U^2}{\partial s} \right]. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Nous obtenons une approximation d'ordre 2 [resp. 3] de (A.23) [resp. (A.24)] en remplaçant $r^1(\varepsilon)$ [resp. $r^2(\varepsilon)$] par 0, ce qui renvoie à la remarque 2.1.

B Régularité de u^0

Par hypothèse, la source f de l'équation est éloignée de R de l'origine.

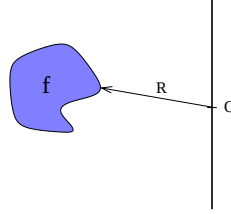
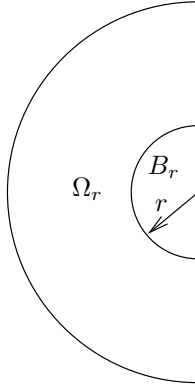


FIG. 11: Distance de la source à la fente

Nous nous attendons à obtenir des résultats de régularité locale pour u^0 pour les domaines dont l'intersection avec le support de la source est vide. Introduisons donc les domaines suivants :



$$\begin{cases} B_r &= \{x \in \Omega / \|x\| < r\}, \\ \Omega_r &= \{x \in \Omega / \|x\| > r\}. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

FIG. 12: Domaine loin ou proche de l'origine

Voici la proposition de régularité : le lecteur attentif pourra remarquer que les constantes ne dépendent que de R et de ω (i.e du support de f).

Théorème B.1 Soit R_* un scalaire strictement inférieur à R :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \in H^n(B(0, R_*)) \text{ et } \exists C(R_*, n) \quad \|\underline{u}_0\|_{H^n(B_{R_*})} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{B.2})$$

Preuve. Commençons par symétriser la solution limite u^0 ; pour cela définissons sa symétrisée $\underline{u}^0$ par rapport à l'axe $x = 0$

$$\begin{cases} \forall x > 0, & \underline{u}^0(x) = u^0(-x), \\ \forall x < 0, & \underline{u}^0(x) = u^0(x). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

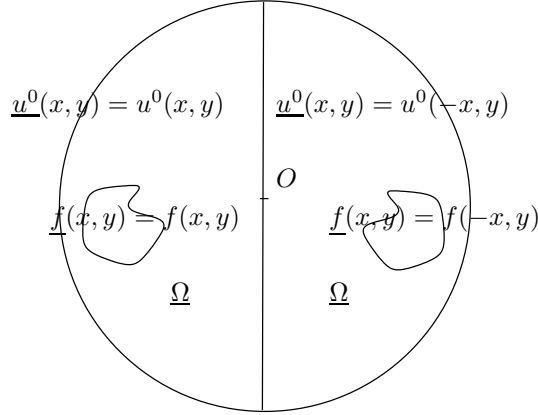
La fonction $\underline{u}^0$ est alors solution du problème suivant :

chercher $u \in H^1(\underline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u &= \underline{f}, & (\underline{\Omega}), \\ \frac{\partial u}{\partial n} + i\omega u &= 0, & (\underline{\Gamma}_f), \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

où $\underline{\Omega}$ et $\underline{\Gamma}_f$ sont les symétrisées de Ω et Γ_f où $\underline{f}$ est la symétrisée de f . La continuité (symétrisation) à l'interface assurent la conformité $H^1(\underline{\Omega})$, et la condition aux limites de Neumann homogène

assurent que l'équation au laplacien est bien vérifiée aux sens des distributions dans $\underline{\Omega}$.



Il est alors clair que nous avons construit un prolongement H^1 stable

$$\|\underline{u}^0\|_{H^1(\underline{\Omega})} \leq C \|u^0\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{B.5})$$

Considérons $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite, définie par :

$$\begin{aligned} R_0 &= R, \\ R_{n+1} &= R_n - \delta/2^n, \quad \text{avec } \delta = R - R_*. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

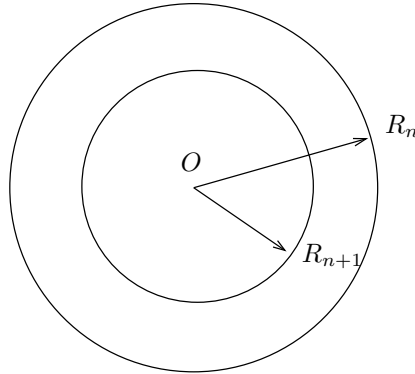
Cette suite tend en croissant vers R_* . Nous allons montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \quad \|\underline{u}_0\|_{H^n(B(0, R_n))} \leq C \|\underline{u}_0\|_{H^1(\underline{\Omega})}, \quad (\text{B.7})$$

où $B(0, R_n)$ est la boule de centre 0 et de rayon R_n .

Pour $n = 1$ l'inégalité est triviale. Supposons donc la proposition vraie pour tous les $m \leq n$.

Considérons la fonction de troncature $\Psi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$ définie à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) . On prend Ψ_n de support inclus dans le demi-cercle de centre 0 et de rayon R_n , $(\Psi(r, \theta) = 0$ pour tout $r > R_n$), et pour $r < R_{n+1}$ on lui donne la valeur 1.



La fonction produit $\eta_n = \Psi_n \times \underline{u}^0$ définie tout d'abord sur Ω se prolonge facilement par 0 sur $\mathbb{R}^2$ en une fonction de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Recherchons les équations vérifiées par η_n :

- dans la boule de centre 0 et de rayon R

$$\Delta \eta_n = (\Delta \Psi_n) \underline{u}^0 + 2 \nabla \Psi_n \nabla \underline{u}^0 + \Psi_n (\Delta \underline{u}^0) = (\Delta \Psi_n) \underline{u}^0 + 2 \nabla \Psi_n \nabla \underline{u}^0 - \omega^2 \underline{u}^0,$$

- hors de cette même boule

$$\eta_n = 0 \quad \implies \quad \Delta \eta_n = 0.$$

Il est alors clair que nous avons l'estimation suivante

$$\|\Delta\eta_n\|_{H^{n-1}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_n))}.$$

La constante C dépendant bien entendu de Ψ_n . De plus par définition de la fonction η_n

$$\|\eta_n\|_{H^n(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_n))}.$$

Nous pouvons alors utiliser des normes $H^n(\mathbb{R}^2)$ issue de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \|\eta_n\|_{H^{n+1}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{n+1} |\hat{\eta}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^n |\hat{\eta}_n(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 (1 + |\xi|^2)^n |\hat{\eta}_n(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Cauchy-Schwartz

$$\|\eta_n\|_{H^{n+1}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\eta_n\|_{H^n(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\eta_n\|_{H^n(\mathbb{R}^2)} \|\Delta\eta_n\|_{H^n(\mathbb{R}^2)}.$$

En liant ces résultats

$$\|\eta_n\|_{H^{n+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_n))}.$$

La fonction Ψ_n étant égale à 1 dans la boule de centre O et de rayon R_{n+1} , on a :

$$\|\underline{u}^0\|_{H^{n+1}(B(0,R_{n+1}))} \leq C \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_n))}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a bien :

$$\|\underline{u}^0\|_{H^{n+1}(B(0,R_{n+1}))} \leq C \|\underline{u}^0\|_{H^1(\underline{\Omega})},$$

ce qui termine la récurrence.

Rappelons maintenant l'inégalité :

$$\|\underline{u}^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous avons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \quad \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_n))} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_* < R_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \quad \|\underline{u}^0\|_{H^n(B(0,R_*))} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

C Estimation locale optimale dans le cas d'une condition transparente

Reprenons le système d'équations (4.36) en changeant les conditions absorbantes en condition de radiation

$$\begin{cases} \Delta \tilde{e}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{e}^\varepsilon = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^{2,-}, \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} = i \omega (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon) \tilde{w}_0^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}, & \text{en } x = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

$\tilde{e}^\varepsilon$ vérifie une condition de radiation en $r = +\infty$.

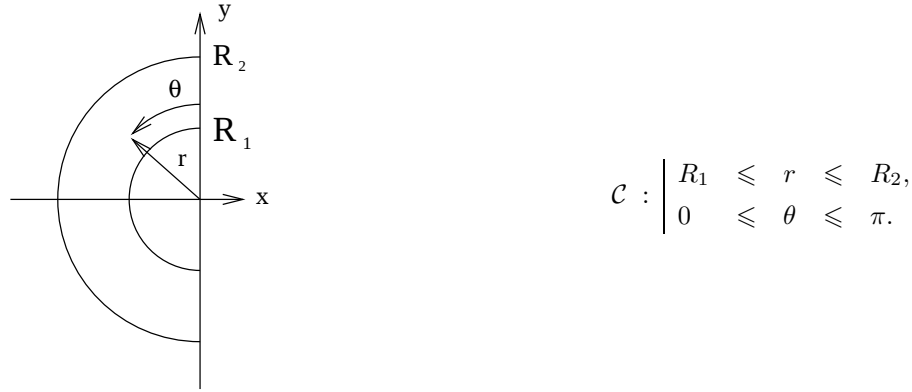
$\tilde{e}^\varepsilon$ est entièrement déterminée par la formule de représentation intégrale :

$$\tilde{e}^\varepsilon(x, y) = \int_0^\varepsilon G(x, y, y') \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n}(y') dy'. \quad (\text{C.2})$$

avec

$$G(x, y, y') = \frac{2}{4i} H_0^{(1)} \left(\sqrt{x^2 + (y - y')^2} \right) \quad (\text{C.3})$$

Intéressons nous plus particulièrement à la couronne $\mathcal{C}$ paramétrée en coordonnée polaire :



Ainsi nous avons l'expression de G en coordonnée polaire :

$$G(x, y, y') = H_0^{(1)} \left(r \sqrt{1 - 2y'/y \cos(\theta) + (y')^2/r^2} \right). \quad (\text{C.4})$$

Cette expression nous permet d'effectuer le développement asymptotique de G dans $\mathcal{C} \times]0, \varepsilon]$, en effet $H_0^{(1)}$ est analytique sur $\mathbb{R}_+^*$ on a donc :

$$G(x, y, y') = H_0^{(1)}(r) + \varepsilon g^\varepsilon(r, \theta, y'/\varepsilon), \quad \forall 0 < R_1 \leq r \leq R_2, \quad (\text{C.5})$$

avec :

$$\forall (r, \theta, z) \in \mathcal{C} \times]0, 1], \quad g^\varepsilon(r, \theta, z) \leq C(R_1, R_2). \quad (\text{C.6})$$

par conséquent en appliquant la formule (C.2) :

$$\tilde{e}^\varepsilon(x, y) = \sqrt{\varepsilon} (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} \left(H_0^{(1)}(r) + \varepsilon h^\varepsilon(r, \theta) \right) \quad (\text{C.7})$$

où

$$h^\varepsilon(r, \theta) \leq C(R_1, R_2) \quad (\text{C.8})$$

et par conséquent :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{C})} \geq C \sqrt{\varepsilon} |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \left(\|H_0^{(1)}\|_{L^2(\mathcal{C})} - \varepsilon \|h^\varepsilon(r, \theta)\|_{L^2(\mathcal{C})} \right) \quad (\text{C.9})$$

La minoration (4.54) montre l'optimalité de l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ loin de la fente ; c'est à dire il existe deux constantes C_1 et C_2 dépendant de R_1 et R_2 telles que :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{C})} \geq C_1(R_1, R_2) \varepsilon |u^0(0, 0)| - C_2(R_1, R_2) \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{C.10})$$

Bien évidemment ceci montre aussi l'optimalité en norme $H^1(\Omega)$, en effet :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \geq \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{C.11})$$

References

- [1] Collino F. Fouquet T. Joly P., Analyse d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équations des ondes, Rapport de recherche INRIA, 1998
- [2] Collino F., Fouquet T., Joly P., Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell, Rapport de recherche INRIA, 2000
- [3] Taflove A., Computational electrodynamics the finite difference time domain method, Artech House, 1995
- [4] Ciarlet P.G., Plates and junctions in elastic multi-structures an asymptotic analysis, Masson Springer-Verlag, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, 1990
- [5] Le Dret H., Problèmes variationnels dans les multi-domaines modélisation des jonctions et applications, Masson, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, 1991
- [6] Destuynder Ph., Modélisation des coques minces élastiques, Masson, Collection Physique fondamentale et appliquée, 1990
- [7] Nédélec J.C., Acoustics and electromagnetics equations : integral equations for harmonic problems, Springer, Collection Applied mathematical sciences, 2001
- [8] Nédélec J.C., Ondes acoustiques et électromanétiques équations intégrales, ecole polytechnique univervité paris VI et Paris XI, Cours de DEA, 1996
- [9] Lenoir M., Tounsy A., The localized finite element method ans its application to the two dimensional sea-keaping problem, SIAM Journal on Numerical Analysis, page 729-752 , volume 25, 1988
- [10] Givoli D., Patlashenko I., Keller J.B., Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbouded domains, computer methods in applied mechanics and engineering 164, page 173 à 185, 1998
- [11] Harari I., Patlashenko I., Givoli D., Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides for unbounded wave guides, Journal of computational physics 143, page 200 à 223, 1998
- [12] Lions J.L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1, Dunod, Travaux et recherches mathématiques, 1968
- [13] Huet D., Décomposition spectrale et opérateurs, Presses universitaires de France, Le mathématicien, 1976
- [14] Riesz F., Nagy B.SZ., Leçons d'analyse fonctionnelle, Paris Gautier-Villars, Budapest Académiai kiadó, Collection Académie des sciences de Hongrie, 1968
- [15] Lions J.L., Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Les presses de l'université de Montréal, séminaire de mathématiques supérieures-été 1962, 1965
- [16] Grisvard P., Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Collection Monographs and studies in mathematics, 1985



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399