INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Fils et méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell. Le modèle de Holland revisité

Francis Collino et Florence Millot

N° 3472

Aout 1998

THÈME 4



ISSN 0249-6399

INRIA
ROCQUENCOURT

Fils et méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell. Le modèle de Holland revisité

Francis Collino et Florence Millot

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n ° 3472 — Aout 1998 — 78 pages

Résumé : Notre étude porte sur l'incorporation de fils minces dans les formulations volumiques des équations de Maxwell. Nous construisons un modèle basé sur une approximation quasi-statique du champ électrique au voisinage du fil. Ce modèle correspond à un problème mathématique bien posé car conservant une énergie. Il s' écrit sous la forme d' un problème d' évolution variationnel et se prête donc bien à une discrétisation par éléments finis en espace et différences finies en temps. Nous choisissons des éléments finis et une technique d'assemblage qui redonnent le schéma de Yee en l'absence du fil et proposons deux schémas de discrétisation en temps pour les termes additionnels dus au fil. Le premier redonne le schéma aux différences finies proposé par Holland et qui est très utilisé dans les codes industriels. Notre modèle est donc le cadre mathématique sous-jacent du schéma de Holland. Le second est un schéma original qui présente l' avantage d'être stable sous la condition de stabilité usuelle, c' est à dire indépendamment de la présence ou de la grosseur du fil. Il est donc une alternative intéressante au schéma de Holland qui souffre de problème de stabilité. L' étude est complétée par la détermination de l' inductance artificielle optimale qui est un paramètre clé de la méthode. Une formule explicite est donnée dans le cas d'un fil parallèle aux axes du maillage. Les résultats des expériences numériques confirment nos conclusions théoriques. Signalons pour finir une retombée intéressante par elle-même de notre travail qui est la détermination du comportement asymptotique de la fonction de Green de l' équation d'Helmholtz bidimensionnelle discrétisée avec un laplacien à cinq points.

Mots-clé : Maxwell, Fil, modèle filaire, fonction de Green discrète, Schéma de Yee

(Abstract: pto)

Ce travail a été réalisé au CERFACS (42 avenue G. Coriolis 31057, Toulouse). Florence Millot est ingénieur chercheur au Cerfacs. F.Collino est ingénieur consultant au Cerfacs et ingénieur expert à l'Inria.

Wires and finite element methods for Maxwell's equations. The Holland's model reexamined.

Abstract: Our study concerns the incorporation of thin wires in the volumic formulations of the Maxwell's equations. Our model is built on a quasi static approximation of the electric field in the vincinity of the wire. This model corresponds to a well posed mathematical problem with conservation of an energy. It can be written as an evolution variational problem, and so, is well suited for a discretization with finite elements in space and finite differences in times. We choose the finite elements and a assembly technique to recover the well known Yee scheme when the wire is absent and propose two different schemes for the time discretization of the additionnal terms due to the wire. The first one corresponds to the finite difference scheme proposed by Holland which is very used in the industrial FDTD electromagnetic codes. Our model is therefore the underlying continuous model for the Holland's scheme. The second one is a new scheme that has the advantage to be stable under the usual CFL, i.e. independantly of the size of the wire. It is therefore an interesting alternative to the Holland's model that suffers from instability problems. The study is completed with the determination of the artificial inductance, a sensitive parameter of all these methods. An explicit formula is given in the case of wire parallel to one of the axis of the mesh. Experimental computations confirm our theoritical claims. Let us mention a result of our work, interesting per se, that is the asymptotic behaviour of the Green function of the 2-D Helmholtz equation discretized with a five points laplacian on a regular grid.

Key-words: Maxwell, Wire, Holland model, FDTD, discrete Green function

1 Introduction

Le sujet que nous traitons dans ce rapport est la modélisation des filles minces euh non ... des fils minces dans les codes de calcul d'électromagnétisme, et plus particulièrement pour la méthode FDTD (Finite-Difference-Time Difference), introduite par Yee [16], [14]. Il se situe dans le domaine plus vaste de la modélisation de l'effet de détails géométriques sur les ondes électromagnétiques, détails au sens où l'une des longueurs caractéristiques d'un objet diffractant est petite devant la longueur d'onde. L'utilisation d'un maillage très fin épousant la forme de l'objet conduit à un calcul onéreux. Outre le nombre de mailles nécessaire qui peut s'avérer important dans le cas de structures très minces ou fines, c'est surtout la condition de stabilité qui impose au pas de temps d'être borné par la plus petite longueur de maille qui a des conséquences désastreuses sur la précision de la solution numérique (dans les zones où le maillage est lâche, le ratio pas de temps sur pas d'espace est localement très petit et la dispersion pour le schéma de Yee est maximale). Notons également que la méthode FDTD s'appuyant sur un maillage cubique, la géométrie des détails est toujours approchée par des formes en "marches d'escalier" ce qui génère des diffractions parasites qui altèrent la précision du calcul.

Le travail le plus connu traitant du problème du fil pour la FDTD est le modèle de Holland, [8]. Holland s'appuie sur une approximation quasi-statique du champ électrique autour du fil qu'il utilise directement pour modifier le schéma numérique. L'idée est de négliger les variations du champ électrique incident dans un petit voisinage du fil (de la taille de quelque(s) maille(s)) pour obtenir une relation entre les variations du champ électrique autour du fil avec le courant et la charge qui parcourt celui-ci. Cette relation est moyennée faisant apparaître une inductance linéique artificielle L. Pour un fil vertical d'axe Oz cette relation s'écrit

$$<< E \cdot \hat{z} >>_{S_h} = L \ (\partial_t I + \partial_z Q) \tag{1}$$

où $<< . >>_{S_h}$ est un opérateur de moyenne sur la surface S_h.

Les expériences numériques présentées sont assez convaincantes et la technique de Holland est actuellement très utilisée dans les codes de calcul FDTD industriels. Toutefois, des questions restent posées sur ce modèle. La première tient au choix du coefficient L. Holland propose plusieurs formules qu'il modifie de façon assez arbitraire pour obtenir de bons résultats numériques. La seconde concerne la stabilité du schéma; celle-ci apparaît dépendre de l'épaisseur du fil par l'intermédiaire de la constante L. Plus gros est le diamètre du fil par rapport à la taille de la maille et plus petit doit être choisi le pas de temps. On est alors amené à diminuer le pas de temps ce qui conduit à un surcroît de calcul et à une perte de précision.

L'apport de notre travail concerne principalement ces deux problèmes. Tout d'abord, nous proposons de modifier le schéma de discrétisation en temps de manière à obtenir théoriquement la stabilité sous la même condition qu'en l'absence du fil ($c_0 \Delta t < \frac{h}{\sqrt{3}}$). Ensuite nous donnons des formules explicites de la valeur de L lorsque le fil est parallèle à l'un des axes du maillage. Si cette valeur n'est pas retenue, on montre que l'erreur relative sur l'inverse de la transformation de Fourier du courant varie approximativement comme le logarithme de $\frac{a}{\lambda}$ où a est le rayon du fil et λ la longueur d'onde associée à la fréquence considérée. Cette dépendance seulement logarithmique entraîne que l'erreur peut être importante dans le cas d'un mauvais choix de L. Un autre intérêt de ce travail est de proposer un modèle de fil directement dans le domaine du continu. Ce modèle peut se mettre sous forme d'un problème variationnel évolutif dont les solutions satisfont à une loi de conservation de l'énergie. En choisissant convenablement les

espaces d'approximation et la stratégie de discrétisation en temps on retombe (presque) sur le schéma de Holland. Bien sûr, rien n'empêcherait d'utiliser d'autres éléments finis pour la discrétisation. Le modèle filaire que nous proposons permet d'intégrer les fils dans d'autres codes de calcul que la FDTD.

Outre cette introduction, le rapport est organisé en quatre sections. La première donne différentes formulations pour la diffraction d'une onde par un cylindre conducteur infini. La seconde porte sur la dérivation de l'approximation (1) puis du modèle filaire qui est à la base de ce travail. La discrétisation du modèle est ensuite décrite dans une troisième section. On y analyse notamment la stabilité des schémas. On discute également du choix de l'inductance artificielle L en s'appuyant sur des résultats concernant le problème bidimensionnel. L'analyse de ce problème 2-D est détaillée dans la dernière section.

2 Formulations pour la diffraction d'une onde par un cylindre

Dans cette section, on donne trois formulations équivalentes du problème de diffraction par un cylindre infini. La première intègre la géométrie de l'obstacle dans l'espace de travail. Elle s'avère mal adaptée à un passage à la limite sur le rayon du cylindre. La deuxième incorpore le fil par le biais d'une forme bilinéaire, l'espace de travail étant indépendant de l'objet diffractant, c'est cette formulation qui nous servira d'inspiration pour nos modèles approchés. La troisième qui diffère de la précédente de par l'introduction de la charge électrique nous servira de point de départ pour la dérivation de l'approximation quasi-statique.

2.1 Position du problème - Première formulation

Γ_a désigne le cylindre de rayon a et d'extension infinie selon l'axe $0z$. On note n sa normale extérieure (en coordonnées cylindriques (r, θ, z) on a $n = \hat{r}$). Enfin, on définit Ω_a^e et Ω_a^i les domaines respectivement extérieur et intérieur au cylindre.

Une première formulation du problème de diffraction par le cylindre consiste à écrire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{trouver } E(x,t) \text{ tel que} & \\ \epsilon_0 \partial_{tt} E + \frac{1}{\mu_0} \text{rotrot} E = 0 & \text{sur } \Omega_a^e \\ (E \wedge n) \wedge n = 0 & \text{sur } \Gamma_a \\ E(t=0) = E^0, & \partial_t E(t=0) = E^1. \end{array} \right. \tag{2}$$

Pour simplifier, l'onde incidente a été initialisée avec des conditions initiales dont le support n'intersecte pas le cylindre.
Le problème (2) peut se formuler comme un problème d'évolution variationnel. On introduit les espaces

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\text{rot}, \Omega) = \{ E \in L^2(\Omega), \quad \text{rot} E \in L^2(\Omega) \} \\ V = \{ E \in H(\text{rot}, \Omega_a^e) , \quad (E \wedge n) \wedge n = 0 \} . \end{array} \right. \tag{3}$$

Γ_a étant régulière, on peut donner un sens à la trace des composantes tangentielles de E sur Γ_a dans l'espace $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ (cf [9] pour plus de précisions) et la condition sur Γ_a a bien un sens.

Le problème (2) se réécrit

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } E \in C^1(0,T;L^2(\Omega_a^e)) \cap C^0(0,T;V) \text{ tel que} \\ \quad \forall\, F \in V, \quad \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_{\Omega_a^e} \epsilon_0 EF\, dv + \int_{\Omega_a^e} \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}E\mathrm{rot}F\, dv = 0. \\ \quad E(t=0) = E^0 \in V,\ \partial_t E(t=0) = E^1 \in L^2(\Omega_a^e). \end{array}\right. \tag{4}$$

On montre (cf. [5] par exemple) que ce problème admet une solution unique et que l'énergie définie par

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_{\Omega_a^e} \epsilon_0 \left|\partial_t E\right|^2 dv + \frac{1}{2}\int_{\Omega_a^e} \frac{1}{\mu_0}|\mathrm{rot}E|^2\, dv, \tag{5}$$

est conservée.

Dans cette formulation, on voit que la géométrie de l'obstacle ainsi que la condition de conducteur parfait sont pris en compte à travers l'espace de résolution V. Si on utilise une méthode numérique, type éléments finis en espace et différences finies en temps, on doit tenir compte de la géométrie à travers le maillage de Ω_a^e, ce qui conduit à utiliser des mailles très petites lorsque le fil a un rayon minuscule. Lorsqu'en plus on se rappelle que la condition de stabilité restreint le pas de temps en fonction de la taille de la maille, on convient que cette méthode est très mal adaptée à la structure filaire.

2.2 Méthode des domaines fictifs. Deuxième formulation

Une autre formulation du problème peut être construite qui consiste à formuler le problème sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on définit le prolongé de E par

$$\tilde{E}(x) = \left\{\begin{array}{ll} E(x) & \text{si } x \in \Omega_a^e \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_a^i, \end{array}\right. \tag{6}$$

c'est-à-dire que la solution du problème (4) a été prolongée par zéro à l'intérieur du cylindre. Soulignons que la restriction de $\tilde{E}$ à Ω_a^e (resp. Ω_a^i) est dans l'espace $H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)$. En effet, on peut écrire au sens des distributions,

$$\mathrm{rot}\tilde{E} = \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^e} + \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^i} + [\tilde{E}\wedge n]_{\Gamma_a}\delta_{\Gamma_a}, \tag{7}$$

où δ_{Γ_a} désigne la mesure portée par le cylindre et définie par

$$< \delta_{\Gamma_a}, \phi >= \int_{\Gamma_a} \phi_{/\Gamma_a}\, ds, \tag{8}$$

et où $[\tilde{E}\wedge n]$ est le saut de $E\wedge n$ à travers Γ_a qui est nul dans notre cas puisque les traces extérieures et intérieures sont nulles. On en déduit que $\mathrm{rot}\tilde{E} = \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^e} + \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^i}$ et qu'alors le champ $\tilde{E}(x)$ ainsi construit est bien dans l'espace $H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)$.
De même, si E est dans V, on a

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\tilde{E} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^e} + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\tilde{E}|_{\Omega_a^i} + [\mathrm{rot}\tilde{E}\wedge n]\ \delta_{\Gamma_a}, \tag{9}$$

d'où on peut facilement déduire

$$\epsilon_0\partial_{tt}\tilde{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rotrot}\tilde{E} = \frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\tilde{E}\wedge n]\delta_{\Gamma_a}. \tag{10}$$

Le champ $\tilde{E}$ est alors solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } (E,\vec{\mu}) \in H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)\times W \text{ tel que} \\ \epsilon_0\partial_{tt}E + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rotrot}E = -\partial_t\vec{j}\,\delta_{\Gamma_a} \\ (E\wedge n)\wedge n = 0 \text{ sur } \Gamma_a \\ E(t=0)=E^0,\ \partial_t E(t=0)=E^1, \end{array}\right. \tag{11}$$

où W est l'espace des sauts de $[\mathrm{rot}\tilde{E}\wedge n]$ à travers une surface régulière, c'est à dire l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div},\Gamma_a)$ et où la dérivée en temps $\partial_t\vec{j}$ à été introduite pour respecter les définitions classiques de la densité de courant.

On peut réécrire le problème sous sa forme variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } E\in C^1(0,T;H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3))\cap C^0(0,T;H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)), \\ \qquad \text{et } \partial_t\vec{j}\in C^0(0,T;H^{-1/2}(\mathrm{div},\Gamma_a)) \text{ tels que} \\ \forall F\in H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3),\quad \forall\,\vec{\lambda}\in H^{-1/2}(\mathrm{div},\Gamma_a) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\epsilon_0 EF\,ds + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}E\mathrm{rot}F\,ds = -\int_{\Gamma_a}\partial_t\vec{j}\cdot\ n\wedge(F\wedge n)\,ds \\ \displaystyle\int_{\Gamma_a}\vec{\lambda}\cdot\ n\wedge(E\wedge n)\,ds = 0 \\ E(t=0)=E^0\in V,\ \partial_t E(t=0)=E^1, \end{array}\right. \tag{12}$$

les deux intégrales de surface devant être comprises au sens de la dualité entre l'espace des courants $H^{-1/2}(\mathrm{div},\Gamma_a)$ et l'espace des traces tangentielles sur Γ_a des fonctions de $H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)$ soit $H^{-1/2}(\mathrm{rot},\Gamma_a)$.

Dans cette formulation, la condition à la limite apparaît comme une contrainte au problème, l'inconnue $\partial_t\vec{j}$ pouvant s'interpréter comme un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. La géométrie de l'obstacle est prise en compte maintenant par l'intermédiaire de ce multiplicateur. C'est cette formulation qui sert de point de départ à la méthode des domaines fictifs, [7], [4]. Toutefois, une discrétisation brutale de (12) ne résout en rien le problème de la petitesse supposée du rayon du cylindre. En effet, le champ que l'on doit approcher possède toujours une singularité au voisinage du fil et sa prise en compte nécessite toujours un maillage fin en son voisinage. Pour remédier à cet inconvénient, on se propose d'approcher ce problème par un problème plus régulier dont les solutions sont proches (au moins lorsque le fil est mince) du problème original. C'est l'objet de la section 3.2 .

Remarque On peut être tenté de passer directement à la limite (c'est-à-dire faire tendre le rayon a du fil vers zéro) dans (12) puisque l'espace des fonctions ne dépend plus du rayon. Toutefois, une difficulté majeure surgit lors de ce passage à la limite. En effet $\vec{\mu}\delta_{\Gamma_a}$ tend au sens des distributions vers $M(\vec{\mu})\,\delta(x,y)$ où $M(\vec{\mu}) = a\int_0^{2\pi}\vec{\mu}.\hat{z}\ d\theta$, tandis que $\int_{\Gamma_a}\vec{\lambda}\cdot n\wedge(E\wedge n)\,ds$ est asymptotiquement équivalent à $\int_{-\infty}^{\infty}(E_{/r=0}\cdot\hat{z})\,M(\vec{\lambda})\,dz$ lorsque $E\cdot\hat{z}$ est suffisamment régulier. Malheureusement on ne peut utiliser ces approximations sans quitter l'espace $H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)$ dans lequel nous avons formulé le problème. En effet, la trace d'un champ arbitraire de l'espace $H(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)$ sur une ligne n'a pas de sens. C'est précisément ici que réside toute la difficulté de la construction des modèles asymptotiques des fils et surtout de l'obtention des estimations d'erreurs.

2.3 Formulation avec charge et courant

Il est bien connu que l'on peut se débarrasser de l'opérateur compliqué rot rot en introduisant la charge q portée par le conducteur. Pour cela, on applique l'opérateur divergence à la première équation du système (11). En supposant les conditions initiales E_1 de divergence nulle, on obtient

$$\partial_t(\epsilon_0 \mathrm{div} E) = -\mathrm{div}_{\Gamma_a} \vec{j}\ \delta_{\Gamma_a} \tag{13}$$

On en déduit que $\epsilon_0 \mathrm{div}(E)$ est une mesure portée par le cylindre dès que E_0 est de divergence nulle. On définit la charge q par

$$q\ \delta_{\Gamma_a} = \epsilon_0 \mathrm{div} E \tag{14}$$

En rapprochant les équations, on obtient la relation de continuité

$$\partial_t q + \mathrm{div}_{\Gamma_a} \vec{j} = 0 \tag{15}$$

Maintenant en utilisant la relation

$$\mathrm{rot\ rot} = -\vec{\Delta} + \mathrm{grad\ div}, \tag{16}$$

on aboutit à

$$\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} E - \vec{\Delta} E = -\mu_0 \left(\partial_t j + c_0^2 \mathrm{grad}_{\Gamma_a}\ q\right) \delta_{\Gamma_a} - \frac{1}{\epsilon_0} q\ \mathrm{grad}\, \delta_{\Gamma_a} \tag{17}$$

où le gradient de δ_{Γ_a} est à prendre au sens des distributions

$$< \mathrm{grad}\, \delta_{\Gamma_a}, \phi >= -\int_{\Gamma_a} \mathrm{grad} \phi_{/\Gamma_a}\, ds. \tag{18}$$

Si l'on décompose le champ électrique en champs incident et diffracté

$$E = E^d + E^{inc} \tag{19}$$

E^{inc} vérifie Maxwell dans l'espace libre avec (E^0, E^1) comme conditions initiales tandis que E^d vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } E^d(x,t),\ q(s,t) \text{ et } \vec{j}(s,t) \text{ tels que} \\ \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} E - \vec{\Delta} E = -\mu_0 \left(\partial_t \vec{j} + c_0^2 \mathrm{grad}_{\Gamma_a}\ q\right) \delta_{\Gamma_a} - \frac{1}{\epsilon_0} q\ \mathrm{grad}\, \delta_{\Gamma_a} \\ \partial_t q + \mathrm{div}_{\Gamma_a} \vec{j} = 0 \\ (E^d \wedge n) \wedge n = -(E^{inc} \wedge n) \wedge n \quad \text{sur } \Gamma_a \\ E^d(t=0) = 0, \quad \partial_t E^d(t=0) = 0, \quad q(t=0) = 0, \quad j(t=0) = 0. \end{array} \right. \tag{20}$$

2.4 Résolution dans un cas particulier

Nous nous proposons ici de résoudre le système (20) dans le cas particulier où le champ incident est constant sur le pourtour du fil et porté par l'axe Oz. L'expression qui lie champ électrique et courant dans ce cas nous servira de point de départ pour la dérivation de l'approximation quasi-statique. On suppose donc que

$$((E^{inc} \wedge \hat{r}) \wedge \hat{r})_{/r=a} = E_z^{inc}(a,z,t)\ \hat{z} \tag{21}$$

Le système (20) étant invariant par rotation autour de l'axe du cylindre, il est facile de vérifier que la solution est de la forme

$$\begin{aligned} &E^d = E_z^d(r,z,t)\ \hat{z} + E_r^d(r,z,t)\ \hat{r}, \\ &\vec{j} = j_z(z,t)\ \hat{z}, \quad q = q(z,t) \end{aligned} \tag{22}$$

et en projetant l'équation qui gouverne le champ sur l'axe Oz, on obtient

$$\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2 E_z^d - \partial_{zz}^2 E_z^d - \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r E_z^d) = -\mu_0(\partial_t j_z + c_0^2 \partial_z q)\ \delta(r-a) \tag{23}$$

Cette équation peut se résoudre à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace en temps et de Fourier en z. Si ϕ est une fonction de z,t, on note

$$\tilde{\phi}(\omega, k_z) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dz\ \phi(z,t)\ e^{i\omega t - ik_z z} \tag{24}$$

L'équation pour $\tilde{E}_z^d$ est

$$\begin{cases} \xi^2 \tilde{E}_z^d(r) + \dfrac{1}{r}\partial_r(r\partial_r(\tilde{E}_z^d(r))) = \tilde{\lambda}\ \delta(r-a) \\ \tilde{\lambda} = \mu_0(-i\omega\tilde{j}_z + ik_z c_0^2 \tilde{q}) \end{cases} \tag{25}$$

où on choisit de définir ξ via

$$\xi = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2\right)^{\frac{1}{2}}, \Im(\xi) > 0 \text{ sur } \Im(\omega) > 0 \tag{26}$$

Cette équation différentielle ordinaire se résout en

$$\begin{cases} \tilde{E}_z^d(r) = -\tilde{E}_z^{inc}(a)\dfrac{H_0^{(1)}(\xi r)}{H_0^{(1)}(\xi a)} & r \geq a \\ \tilde{E}_z^d(r) = -\tilde{E}_z^{inc}(a)\dfrac{J_0(\xi r)}{J_0(\xi a)} & r \leq a \end{cases} \tag{27}$$

Les fonction J_0 et $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$ sont les fonctions de Bessel et de Hankel d'ordre 0 [10]. Le choix $H_0^{(1)}$ est fait car $\tilde{E}_z^d$ doit être bornée lorsque la partie imaginaire de ω tend vers plus l'infini (le choix $e^{+i\omega t}$ dans la transformée de Fourier Laplace en temps impliquant cette propriété).

On remarque que si la solution doit être continue à la traversée du fil en $r = a$ (c'est nécessaire car sinon il existerait un terme en dérivée de Dirac), il n'en est pas de même pour la dérivée qui présente un saut qui est précisément relié à λ

$$\partial_r \tilde{E}_z^d(a^+) - \partial_r \tilde{E}_z^d(a^-) = \tilde{\lambda} \tag{28}$$

D'où la relation

$$\hat{\lambda} = -\frac{\tilde{E}_z^{inc}(a)}{H_0^{(1)}(\xi a)J_0(\xi a)}\ \left(\xi H_0^{(1)\prime}(\xi a)J_0(\xi a) - \xi H_0^{(1)}(\xi a)J_0'(\xi a)\right) \tag{29}$$

on reconnaît dans le terme entre parenthèses le Wronskien des fonctions de Bessel (cf. [6], formule 3.56 page 64), d'où

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2\pi a} \frac{\tilde{E}_z^{inc}(a)}{\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi a) J_0(\xi a)} \tag{30}$$

En éliminant le champ incident entre (27) et (30), on trouve une relation directe entre le champ diffracté et le courant

$$\tilde{E}_z^d(r) = -2\pi a J_0(\xi a) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi r)\ \tilde{\lambda}, \quad r > a \tag{31}$$

de même, on a la relation

$$\tilde{E}_z^d(r) + \tilde{E}_z^{inc}(a) = 2\pi a J_0(\xi a) \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi a) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi r) \right)\ \tilde{\lambda}, \quad r > a \tag{32}$$

qui va nous servir de point de départ pour l'approximation quasi-statique.

3 Modèle approché pour la structure filaire

Dans cette section, on donne le cheminement qui va nous permettre de construire notre modèle approché. Il ne s'agit pas ici d'être très rigoureux (par exemple, on ne donne ici pas d'estimations d'erreur) mais de donner les idées qui sont à la base de notre modèle. On donne néanmoins des éléments pour l'analyse mathématique du modèle approché.

3.1 Construction du modèle. Approximation quasi-statique

Tous les modèles de fils sont classiquement construits en utilisant la même hypothèse de départ qui consiste à négliger les variations du champ incident sur un petit disque centré autour du fil. En termes d'équations cela se traduit par la substitution

$$\Big((E^{inc} \wedge n) \wedge n \Big)_{/r=a} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} E_z^{inc}(a, \theta, z) d\theta\ \hat{z} \tag{33}$$

(remarquez que le champ incident porté par le vecteur $\hat{\theta}$ est pris égal à 0, la moyenne de la projection sur ce vecteur d'un champ constant étant nulle).

Le champ diffracté approché est alors gouverné par le système d'équations étudié dans la section précédente. On montre que le courant et la charge sont des fonctions uniquement des variables z et t. Dans la suite, on utilisera

$$I(z,t) = 2\pi a \vec{j}(z,t) \cdot \hat{z}, \quad Q(z,t) = 2\pi a q(z,t) \tag{34}$$

I est le courant qui parcourt le fil, Q sa charge linéique. On a bien sûr la relation de continuité

$$\partial_t Q + \partial_z I = 0 \tag{35}$$

et l'équation gouvernant le champ électrique total $E = E^{inc} + E^d$ s'écrit

$$\epsilon_0 \partial_{tt} E + \frac{1}{\mu_0}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} E = -\partial_t I(z,t)\ \frac{\delta_{\Gamma_a}}{2\pi a}(r)\ \hat{z}, \tag{36}$$

Le premier ingrédient de notre modèle approché va consister à régulariser la mesure portée par Γ_a, Comme

$$\frac{\delta_{\Gamma_a}}{2\pi a}(r) \sim \delta(x,y), \quad a \to 0^+ \tag{37}$$

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes, on introduit une approximation de la masse de Dirac invariante par rotation

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty \delta_\epsilon(r) 2\pi r dr = 1, \\ \forall \varphi \text{ continue }, \displaystyle\int \varphi(x,y)\delta_\epsilon(\sqrt{x^2+y^2})dxdy \ \to \varphi(0), \quad \epsilon \to 0^+. \\ \delta_\epsilon(r) = 0, \quad r > r_\epsilon^+ > a \end{array} \tag{38}$$

où r_ϵ^+ est également petit devant les longueurs d'ondes présentes dans le champ électromagnétique incident. L'équation (36) est alors approchée par

$$\epsilon_0 \partial_{tt} E + \frac{1}{\mu_0} \text{ rot rot} E = -\partial_t I(z,t)\ \delta_\epsilon(r)\ \hat{z}, \tag{39}$$

Le deuxième ingrédient va consister à trouver une relation approchée liant courant, charge et champ total $E \cdot \hat{z}$ valable dans un voisinage du fil puis de moyenner cette relation à l'aide de δ_ϵ.

Le point de départ est l'équation (32). On utilise le développement limité

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\frac{i}{4} H_0^{(1)}(t) = -\frac{1}{2\pi}\log t + \frac{i}{4} + \frac{1}{2\pi}\log 2 - \frac{\gamma}{2\pi} + O(t^2 \log t) \\ J_0(t) = 1 + O(t^2) \end{array} \right. \tag{40}$$

où γ est la constante d'Euler. En négligeant les termes en $O(\xi^2 a^2 \log(\xi a))$ et $O(\xi^2 r^2 \log(\xi r))$, on obtient

$$\tilde{E}_z^d(r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{E}_z^{inc}(a,\theta)d\theta \approx a \log(\frac{r}{a})\tilde{\lambda}, \quad r_\epsilon^+ > r > a, \tag{41}$$

où on rappelle que $\tilde{\lambda}$ est la transformée de Fourier-Laplace en temps et de Fourier en z de $\mu_0 \partial_t j_z + \frac{1}{\epsilon_0}\partial_z q$. Cette relation peut aisément s'inverser selon

$$\begin{array}{l} E_z^d(r,z,t) + \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_z^{inc}(a,\theta,z,t)d\theta \approx \\ \quad \displaystyle\frac{\mu_0}{2\pi}\log(\frac{r}{a})\ (\partial_t I(z,t) + c_0^2 \partial_z Q(z,t))), \quad r > a,\ r_\epsilon^+ > r > a. \end{array} \tag{42}$$

En négligeant de nouveau les variations de E_z^{inc} au voisinage du fil, on trouve

$$E_z \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\log(\frac{r}{a})\ (\partial_t I(z,t) + c_0^2 \partial_z Q(z,t))), \quad r_\epsilon^+ > r > a. \tag{43}$$

C'est l'approximation quasi-statique. On remarque que cette relation implique bien l'annulation de E_z en $r = a$. Elle dit de plus que le champ en z se comporte approximativement comme $\log(\frac{r}{a})$ lorsque l'on s'éloigne de l'axe du fil.

En utilisant $\delta_\epsilon(r)$, on obtient par prise de moyenne (le champ total vrai est nul à l'intérieur du fil, $r < a$))

$$\int_0^{r_\epsilon^+} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E \cdot \hat{z}\ d\theta\right)\ \delta_\epsilon(r) 2\pi r dr \approx L_\epsilon\ (\partial_t I + c_0^2 \partial_z Q). \tag{44}$$

avec

$$L_\epsilon = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_a^{r_\epsilon^+} \log(\frac{r}{a}) \delta_\epsilon(r) 2\pi r dr. \tag{45}$$

L_ϵ a la dimension d'une inductance linéique.

Nous avons alors tous les éléments pour écrire notre modèle filaire. Le problème approché est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } E^\epsilon(x,y,z,t),\ I^\epsilon(z,t),\ Q^\epsilon(z,t) \text{ tels que} \\ \epsilon_0 \partial_{tt} E^\epsilon + \dfrac{1}{\mu_0} \text{ rot rot} E^\epsilon = -\partial_t I^\epsilon\ \delta_\epsilon(r)\ \hat{z}, \\ \partial_t Q^\epsilon + \partial_z I^\epsilon = 0 \\ \displaystyle\int\int E^\epsilon \cdot \hat{z}\ \delta_\epsilon(r) r dr d\theta = L_\epsilon\ (\partial_t I^\epsilon + c_0^2 \partial_z Q^\epsilon). \\ E^\epsilon(t=0) = E_0,\ \partial_t E^\epsilon(t=0) = E_1,\ Q^\epsilon(t=0) = 0,\ I^\epsilon(t=0) = 0. \end{array} \right. \tag{46}$$

Ce système d'équations est à la base de notre modèle de fil. La singularité en $r = a$ a été régularisée par le biais de la fonction δ_ϵ et le comportement au voisinage du fil du champ tangent est imposé, au moins en moyenne, comme variant à la manière d'un champ statique.

3.2 Éléments d'analyse du modèle approché

Le modèle que nous avons construit est loisible pour un fil d'extension infinie. Dans le cas d'un fil de longueur finie 2ℓ, on choisit de garder le même système d'équations auquel on adjoint les conditions aux limites $I(\pm\ell, t) = 0$. Bien sûr, ce modèle ne tient pas compte du comportement particulier du champ aux voisinage des pointes. Ceci constitue le point faible des modèles filaires. Toutefois si la longueur du fil n'est pas trop petite devant la longueur d'onde, l'approximation s'avère satisfaisante au moins loin des pointes.

On peut donner différentes formulations de ce modèle par exemple en réintroduisant le champ magnétique. À l'équation du second ordre en temps pour E^ϵ, on substitue deux équations du premier ordre. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \partial_t E^\varepsilon - \text{ rot} H^\epsilon = -\delta_\epsilon(r) I^\epsilon \\ \mu_0 \partial_t H^\varepsilon + \text{ rot} E^\epsilon = 0 \\ \partial_t Q^\epsilon + \partial_z I^\epsilon = 0 \\ \displaystyle\iint E^\epsilon \cdot \hat{z}\ \delta_\epsilon(r) r dr d\theta = L_\epsilon\ (\partial_t I^\epsilon + c_0^2 \partial_z Q^\epsilon). \\ E^\epsilon(t=0) = E_0,\ H^\epsilon(t=0) = H_0,\ Q^\epsilon(t=0) = 0,\ I^\epsilon(t=0). \end{array} \right. \tag{47}$$

On peut également éliminer la charge et obtenir une système de 2 équations du second ordre en temps couplées. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \partial_{tt} E^\epsilon + \dfrac{1}{\mu_0} \text{ rot rot} E^\epsilon = -\partial_t I^\epsilon\ \delta_\epsilon(r)\ \hat{z}, \\ L^\epsilon \partial_{tt}^2 I^\epsilon - c_0^2 L^\epsilon \partial_{zz}^2 I^\epsilon = \displaystyle\iint (\delta_\epsilon(r) \partial_t E \cdot \hat{z}) r dr d\theta, \end{array} \right. \tag{48}$$

complété avec des conditions initiales en temps adéquates.

Une propriété intéressante de ce modèle est la conservation de l'énergie

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{E}^\epsilon(t) = & \displaystyle\int \frac{1}{2}\epsilon_0 |\partial_t E^\epsilon|^2 dv + \frac{1}{2\mu_0}\int |\mathrm{rot} E^\epsilon|^2 dv \\ & \displaystyle + \frac{L^\epsilon}{2}\int_{-\ell}^{+\ell} |\partial_t I^\epsilon|^2 dz + \frac{c_0^2 L^\epsilon}{2}\int_{-\ell}^{+\ell} |\partial_z I^\epsilon|^2 dz \end{array} \right. \tag{49}$$

Celle-ci s'obtient facilement en multipliant la première équation par $\partial_t E$ et en intégrant sur tout l'espace puis en multipliant la seconde équation par $\partial_t j$ et en intégrant en z. En ajoutant les deux équations, le terme de couplage disparaît et ne reste que la dérivée en temps de l'énergie qui s'avère nulle.

La loi de conservation de l'énergie est importante car elle implique que notre modèle filaire est bien posé dès que L^ϵ est positif. L'unicité des solutions est immédiate car le modèle est linéaire et la différence entre deux solutions de mêmes conditions initiales à une énergie nulle en $t = 0$ et donc pour tout temps $t > 0$. De même l'existence de solutions fortes ou faibles peut s'obtenir à l'aide des techniques classiques utilisées pour l'équation des ondes ordinaire dont les solutions vérifient également une loi de conservation de l'énergie [5].

Signalons pour finir que ce caractère bien posé ne dépend pas du choix de la formulation (48). En effet le système (47) conserve également une énergie à savoir

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{E}^\epsilon(t) = & \displaystyle\frac{1}{2}\int \epsilon_0 |E^\epsilon|^2 dv + \frac{1}{2}\int \mu_0 |H^\epsilon|^2 dv \\ & \displaystyle + \frac{L^\epsilon}{2}\int_{-\ell}^{+\ell} {I^\epsilon}^2 dz + \frac{c_0^2 L^\epsilon}{2}\int_{-\ell}^{+\ell} {Q^\epsilon}^2 dz \end{array} \right. \tag{50}$$

Cette énergie est très parlante car elle est la somme de l'énergie électromagnétique classique et d'une énergie portée par le fil. Bien sûr, si l'on fait tendre ϵ vers 0, avec a fixé, comme $L_\epsilon = 0$ dés que le support de δ_ϵ est situé à l'intérieur du disque de rayon a, l'énergie classique se conserve.

Un autre aspect intéressant est d'analyser ce que devient le modèle lorsque le champ incident est une onde plane portée par Oz . C'est ce que nous ferons dans la section 5.

4 Discrétisations du modèle filaire

Dans cette section, nous proposons deux schémas numériques adaptés à notre modèle filaire. Tous deux reposent sur une semi-discrétisation en espace construite à partir d'une formulation variationnelle que l'on approche à l'aide d'éléments finis de Nédelec, [11]. Les deux schémas diffèrent par la stratégie de discrétisation en temps utilisée. Le premier schéma conduit, après condensation de la masse, au schéma de Holland qui s'avère être un cas particulier de notre formulation. Le second schéma est un petit peu plus compliqué à intégrer mais a l'immense avantage d'être stable sous la même condition qu'en absence de fil. Au final, tous ces schémas dépendent de la donnée d'un opérateur de "valeur moyenne'´ sur le fil et du paramètre d'inductance linéique artificielle. Une analyse précise du cas du fil horizontal attaqué par une onde polarisée électriquement le long de l'axe du fil montre que l'inductance artificielle doit être choisie précisément si l'opérateur de moyenne est donné.

La section suit un plan très classique. On commence par donner la formulation variationnelle du modèle filaire, puis on décrit les éléments finis retenus pour la semi-discrétisation en espace. Chacun des deux schémas en temps est décrit dans une section qui lui est dévolue. L'analyse de la stabilité du second schéma est ensuite réalisée. Enfin, le choix de l'inductance linéique est discutée. Il s'appuie sur l'analyse du cas 2-D qui fera l'objet de la section 5.

4.1 Formulation variationnelle

On introduit les espaces

$$\begin{aligned} H_0^1(-\ell,\ell) &= \left\{\varphi(z)\in L^2(-\ell,\ell),\ \partial_z\varphi(z)\in L^2(-\ell,\ell),\ \varphi(\pm\ell)=0\right\} \\ H(div,\mathbb{R}^3) &= \left\{H\in L^2(\mathbb{R}^3),\ div(H)\in L^2(\mathbb{R}^3)\right\} \end{aligned} \tag{51}$$

et on construit la formulation faible du système (47) suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver}\quad (E^\epsilon(t),H^\epsilon(t))\in H(rot,\mathbb{R}^3)\times H(div,\mathbb{R}^3) \\ \qquad\quad (I^\epsilon(t),Q^\epsilon(t))\in H_0^1(-\ell,\ell)\times L^2(-\ell,\ell)\ \text{tels que} \\ (1)\ \forall E^t\in H(rot,\mathbb{R}^3),\ \epsilon_0\partial_t<E^\epsilon,E^t>-a(H^\epsilon,E^t)+b^\epsilon(E^t,I^\epsilon)=0 \\ (2)\ \forall H^t\in H(div,\mathbb{R}^3),\quad \mu_0\partial_t<H^\epsilon,H^t>+a(H^t,E^\epsilon)=0 \\ (3)\ \forall I^t\in H_0^1(-\ell,\ell),\quad b^\epsilon(E^\epsilon,I^t)-L^\epsilon\partial_t(I^\epsilon,I^t)+L^\epsilon c_0^2 d(Q^\epsilon,I^t)=0 \\ (4)\ \forall Q^t\in L^2(-\ell,\ell),\quad \partial_t(Q^\epsilon,Q^t)+d(Q^t,I^\epsilon)=0 \end{array}\right. \tag{52}$$

que l'on complète avec des conditions initiales adéquates. Dans cette formulation le crochet $<\cdot,\cdot>$ désigne le produit scalaire L^2 usuel sur $\mathbb{R}^3$, $(.,.)$ le produit scalaire L^2 sur le segment $[-\ell,\ell]$ tandis que les formes bilinéaires a, b^ϵ, d sont définies par

$$\left\{\begin{array}{l} a(H,E)=\iiint_{\mathbb{R}^3} rotE\ H\,dv \\ b^\epsilon(E,I)=\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}\left(\iint_{D^\epsilon}\delta^\epsilon(\sqrt{(x-x_f)^2+(y-y_f)^2})E\cdot\hat{z}dxdy\right)I(z)dz \\ d(Q,I)=\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}\partial_z I\ Qdz, \end{array}\right. \tag{53}$$

D^ϵ désignant un petit disque contenant le support de l'approximation de l'unité et où (x_f,y_f) sont les coordonnées du fil que l'on réintroduit ici pour plus de généralité.

4.2 Discrétisation en espace

Le champ électromagnétique est recherché de manière indépendante de la géométrie du fil. Deux maillages indépendants sont choisis: un maillage régulier cubique pour le champ électromagnétique et un maillage de pas h_f pour le fil où sont définis courant et charge. Le champ électromagnétique est maillé sur des cubes identiques et est approché par des éléments finis de plus bas de degré de Nédelec, [11], [12], [3]. On notera $\mathcal{E}_h$ (resp. $\mathcal{H}_h$) l'espace d'approximation de $H(\text{rot},\mathbb{R}^3)$ (resp. $H(\text{div},\mathbb{R}^3)$). Quant au fil, il est maillé en segments, le courant est approché par des fonctions linéaires par morceaux tandis que la charge est constante sur chaque segment du maillage. On note par la suite $\mathcal{I}_{h_f}$ et $\mathcal{Q}_{h_f}$ les espaces de fonctions ainsi définies.

Les champs s'écrivent alors en tout point M

$$E^{\epsilon,h}(M,t)=\sum_a E_a^{\epsilon,h}(t)\,\hat{\phi}_a^h(M);\ \ H^{\epsilon,h}(M,t)=\sum_f H_f^{\epsilon,h}(t)\,\hat{\psi}_k^h(M) \tag{54}$$

Les fonctions $\hat{\phi}_a^h$ sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à une circulation de h sur l'arête numéro a et 0 sur les autres arêtes. De même, les fonctions $\hat{\psi}_f^h$ sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à un flux normal de h^2 à travers la face f et 0 pour les autres faces.

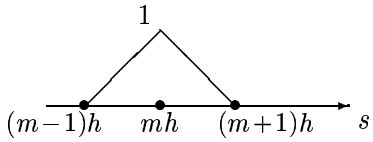
On peut préciser un peu plus. On distinguera les arêtes orientées selon x, y ou z. Si le maillage cubique est constitué des noeuds (ih, jh, kh), les arêtes sont repérées par la coordonnée de leur point milieu. Par exemple, une arête en x sera associée à un point du type $(i+\frac{1}{2}h, jh, kh)$. On est donc amené à distinguer trois familles de fonctions de base

$$\begin{aligned} a = \text{ arête selon } x &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ a = \text{ arête selon } y &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ a = \text{ arête selon } z &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}^h_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{55}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \psi^h_{i+\frac{1}{2}}(x)\,\phi^h_j(y)\,\phi^h_k(z)\;\hat{x} \\ \vec{\phi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k} &= \psi^h_{j+\frac{1}{2}}(y)\,\phi^h_k(z)\,\phi^h_i(x)\;\hat{y} \\ \vec{\phi}^h_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= \psi^h_{k+\frac{1}{2}}(z)\,\phi^h_i(x)\,\phi^h_j(y)\;\hat{z}, \end{aligned} \tag{56}$$

où $\psi^h_{m+\frac{1}{2}}(s)$ est la fonction indicatrice du segment $[mh,(m+1)h]$ et $\phi^h_m(s)$ est la fonction chapeau

$\phi^h_m(s) =$ 

Chaque fonction de base a donc son support constitué par les quatre cubes qui s'appuient sur l'arête associée.

Pour les fonctions de base de $\mathcal{H}_h$, on distingue trois familles de fonctions de base selon la nature de la normale à la face qui leur est associée. On repère chaque face par les coordonnées de son centre. À une face de normale orientée selon $\pm\hat{x}$ correspond un point du type $(ih, (j+\frac{1}{2})h, (k+\frac{1}{2})h)$. Les fonctions de bases sont alors

$$\begin{aligned} f = \text{ face selon } x &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \\ f = \text{ face selon } y &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\ f = \text{ face selon } z &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}. \end{aligned} \tag{57}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\psi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \phi^h_i(x)\psi^h_{j+\frac{1}{2}}(y)\,\psi^h_{k+\frac{1}{2}}(z)\;\hat{x} \\ \vec{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \phi^h_j(y)\psi^h_{k+\frac{1}{2}}(z)\,\psi^h_{i+\frac{1}{2}}(x)\;\hat{y} \\ \vec{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \phi^h_k(z)\psi^h_{i+\frac{1}{2}}(x)\,\psi^h_{j+\frac{1}{2}}(y)\;\hat{z} \end{aligned} \tag{58}$$

Chaque fonction de base à cette fois-ci son support constitué des deux cubes qui s'appuient sur la face associée.

Finalement, les solutions recherchées seront de la forme

$$\begin{aligned} E^{\epsilon,h}(t) &= \sum_{i,j,k} E^x_{i+\frac{1}{2},j,k}(t)\hat{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k} + E^y_{i,j+\frac{1}{2},k}(t)\hat{\phi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ &\qquad + E^z_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t)\hat{\phi}^h_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\ H^{\epsilon,h}(t) &= \sum_{i,j,k} H^x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t)\hat{\psi}^h_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + H^y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(t)\hat{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\ &\qquad + H^z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(t)\hat{\psi}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \end{aligned} \tag{59}$$

On remarquera que les composantes du champ électromagnétique sont exactement celles qui sont utilisées pour construire le schéma aux différences finies de Yee, [14]. On sera amené à faire le lien avec ce schéma dans la suite.

Le courant et la charge sont approchés par

$$I^{\epsilon,h_f}(z,t) = \sum_{\ell=1}^{N_{no}} I^{\epsilon,h_f}_\ell(t)\,\varphi^{h_f}_\ell(z);\;\; Q^{\epsilon,h_f}(z,t) = \sum_{s=1}^{N_{seg}} Q^{\epsilon,h_f}_s(t)\,\psi^{h_f}_s(z), \tag{60}$$

où N_{seg} est le nombre de segments portés par le fil, et N_{no} est le nombre de noeuds internes du maillage (internes car on doit imposer l'annulation du courant aux extrémités). L'indice supérieur h_f représente symboliquement le maillage du fil. Mais celui-ci n'est pas forcément régulier. Les fonction $\varphi^{h_f}_\ell$ sont les fonctions chapeaux (fonctions linéaires valant 1 sur le noeud ℓ et 0 sur les autres tandis que les $\psi^{h_f}_s$ désignent les fonctions indicatrices de chaque segment.

Le problème semi-discrétisé s'obtient en substituant dans la formulation variationnelle les espaces de fonctions discrètes à leurs équivalents continus. Il s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{trouver} & (E^{\epsilon,h}(t), H^{\epsilon,h}(t)) \in \mathcal{E}_h \times \mathcal{H}_h \\ & (I^{\epsilon,h_f}(t), Q^{\epsilon,h_f}(t)) \in \mathcal{I}_{h_f} \times \mathcal{Q}_{h_f} \text{ tels que} \\ (1)\;\; \forall\, E^t \in \mathcal{E}_h, & \epsilon_0 \partial_t < E^{\epsilon,h}, E^t > -a(H^{\epsilon,h}, E^t) + b^\epsilon(E^t, I^{\epsilon,h_f}) = 0 \\ (2)\;\; \forall\, H^t \in \mathcal{H}_h, & \mu_0 \partial_t < H^{\epsilon,h}, H^t > +a(H^t, E^{\epsilon,h}) = 0 \\ (3)\;\; \forall\, I^t \in \mathcal{I}_{h_f}, & b^\epsilon(E^{\epsilon,h}, I^t) - L^\epsilon \partial_t (I^{\epsilon,h}, I^t) + L^\epsilon c_0^2 d(Q^{\epsilon,h_f}, I^t) = 0 \\ (4)\;\; \forall\, Q^t \in \mathcal{Q}_{h_f}, & \partial_t (Q^{\epsilon,h_f}, Q^t) + d(Q^t, I^{\epsilon,h_f}) = 0 \end{array}\right. \tag{61}$$

En regroupant pour chaque temps t les valeurs des fonctions inconnues en chaque degré de liberté dans un même vecteur, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon_0 M^h_E \dfrac{dE^{\epsilon,h}_\cdot}{dt} + A^h H^{\epsilon,h}_\cdot + (B^{h,h_f}_\epsilon)^\star I^{\epsilon,h_f}_\cdot = 0 \\ \mu_0 M^h_H \dfrac{dH^{\epsilon,h}_\cdot}{dt} - (A^h)^\star E^{\epsilon,h}_\cdot = 0 \\ B^{h,h_f}_\epsilon E^{\epsilon,h}_\cdot - L^\epsilon M^{h_f}_I \dfrac{dI^{\epsilon,h_f}_\cdot}{dt} + L^\epsilon c_0^2 D^{h_f} Q^{\epsilon,h_f}_\cdot = 0 \\ M^{h_f}_Q \dfrac{dQ^{\epsilon,h_f}_\cdot}{dt} + (D^{h_f})^\star I^{\epsilon,h_f}_\cdot = 0 \end{array}\right. \tag{62}$$

où on peut reconnaître, les matrices de masse de type $M_{qqchose}$ qui correspondent au produit scalaire L^2 usuel, les matrices de rigidité A^h et D^h ainsi que leur transposée (notée avec le

symbole $\star$) qui renvoient aux valeurs des formes bilinéaires a et d sur un couple de fonctions de base, et enfin la matrice de couplage B_ϵ^{h,h_f} et son adjoint qui correspond à la forme b^ϵ.

L'avantage de la discrétisation du champ électromagnétique sur un maillage régulier de pas h est de pouvoir utiliser la technique de condensation de masse. Celle-ci consiste à user d'une formule de quadrature, exacte pour toute fonction linéaire, dont les points d'appuis coïncident avec les degrés de liberté pour évaluer les intégrales intervenant dans les expressions des coefficients matriciels. On montre que cette manière d'approcher les intégrales ne fait pas perdre de précision (le schéma reste d'ordre 2). Cette méthode permet d'obtenir des matrices de masse diagonales

$$M_E = h^3 Id;\ \ M_H = h^3 Id \tag{63}$$

Pour être plus précis, si l'on considère par exemple la ligne de M_E correspondant à l'arête $i+\frac{1}{2}, j, k$, utilisant les expressions (56) on trouve

$$\begin{aligned}
(M_E \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\phi}^h_{i'+\frac{1}{2},j',k'}) &= \Lambda_i^{i'}\ \Xi_j^{j'}\ \Xi_k^{k'} \\
(M_E \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\phi}^h_{i',j'+\frac{1}{2},k'}) &= 0 \\
(M_E \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\phi}^h_{i',j',k'+\frac{1}{2}}) &= 0
\end{aligned} \tag{64}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Lambda_m^{m'} &= \int \psi^h_{m+\frac{1}{2}}(s)\psi^h_{m'+\frac{1}{2}}(s)ds = h\delta_m^{m'} \\
\Xi_m^{m'} &= \int \phi^h_m(s)\phi^h_{m'}(s)ds = \sum_k \int_{kh}^{(k+1)h} \phi^h_m(s)\phi^h_{m'}(s)ds
\end{aligned} \tag{65}$$

où $\delta_m^{m'}$ vaut 1 si $m = m'$ et 0 sinon.

Le terme $\Xi_m^{m'}$ est toujours nul sauf si $|m' - m| \leq 1$ auquel cas

$$\Xi_m^m = \frac{2}{3}h, \qquad \Xi_m^{m\pm1} = \frac{1}{6}h. \tag{66}$$

Si l'on en reste là, la matrice de masse M_E n'est pas diagonale puisqu'elle couple les noeuds du plan ih aux noeuds des plans voisins immédiats. Mais si l'on substitue au calcul exact de l'intégrale la formule de quadrature

$$\int_{kh}^{(k+1)h} f(s)ds \quad \rightarrow \quad \frac{h}{2}(f((k+1)h) + f(kh)) \tag{67}$$

on trouve

$$\Xi_m^{m'} = h\delta_m^{m'},\ \text{ et } (M_E \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\phi}^h_{i'+\frac{1}{2},j',k'}) = h^3 \delta_i^{i'}\,\delta_j^{j'}\,\delta_k^{k'} \tag{68}$$

En procédant de même avec les autres fonctions de base, on montre que M_E et M_H deviennent des matrices diagonales grâce à la condensation.

De la même façon, la matrice A^h va devenir beaucoup plus creuse. Par exemple, partant des expressions (56), on a

$$\begin{aligned}
\text{rot}\ \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \psi_{i+\frac{1}{2}}(x)\phi_j(y)(\psi_{k-\frac{1}{2}}(z) - \psi_{k+\frac{1}{2}}(z))\hat{y} \\
&\quad -\psi_{i+\frac{1}{2}}(x)\phi_k(z)(\psi_{j-\frac{1}{2}}(y) - \psi_{j+\frac{1}{2}}(y))\hat{z}
\end{aligned} \tag{69}$$

(la dérivée d'une fonction chapeau est la différence de deux fonctions indicatrices). D'où les expressions

$$\begin{aligned}
(A^h \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\psi}^h_{i',j'+\frac{1}{2},k'+\frac{1}{2}}) &= 0 \\
(A^h \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\psi}^h_{i'+\frac{1}{2},j',k'+\frac{1}{2}}) &= -\tfrac{1}{h}\Lambda^{i'}_i \ \Xi^{j'}_j \ (\Lambda^{k'}_{k+1} - \Lambda^{k'}_k) \\
(A^h \vec{\phi}^h_{i+\frac{1}{2},j,k}, \vec{\phi}^h_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'}) &= \tfrac{1}{h}\Lambda^{i'}_i \ \Xi^{k'}_k \ (\Lambda^{j'}_{j+1} - \Lambda^{j'}_j)
\end{aligned} \tag{70}$$

Là encore la substitution (67) est utilisée qui permet d'écrire $\Xi^{m'}_m = \Lambda^{m'}_m = h\delta^{m'}_m$. Finalement l'arête $i+\frac{1}{2}, j, k$ n'est couplée par A_h qu'aux quatre faces qui la contient. Après tout calcul on trouve

$$A^h = h^3(\frac{1}{h}\mathbb{R}), \tag{71}$$

avec, si E est décomposé suivant (59)

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{h}\mathbb{R}E)^x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h}(E^z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - E^z_{i,j,k+\frac{1}{2}}) \\
&\quad -\frac{1}{h}(E^y_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - E^y_{i,j+\frac{1}{2},k})
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{h}\mathbb{R}E)^y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h}(E^x_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - E^x_{i+\frac{1}{2},j,k}) \\
&\quad -\frac{1}{h}(E^z_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E^z_{i,j,k+\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{h}\mathbb{R}E)^z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{1}{h}(E^y_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - E^y_{i,j+\frac{1}{2},k}) \\
&\quad -\frac{1}{h}(E^x_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - E^x_{i+\frac{1}{2},j,k})
\end{aligned} \tag{74}$$

On reconnaît le rotationnel discret qui est utilisé dans le schéma de Yee classique (cf [14]): le schéma variationnel avec condensation de masse sur grille régulière s'avère coïncider avec ce schéma aux différences finies. Cette remarque est importante car elle permet de coupler des techniques type différences finies avec d'autres adaptées aux éléments finis.

Pour le fil, on utilisera également la formule d'intégration numérique (67) pour le calcul de $M^{h_f}_I$, cette matrice devenant alors diagonale. Si on suppose le fil discrétisé en segments de longueur constante, on a même

$$M^{h_f}_I = M^{h_f}_Q = h_f Id, \tag{75}$$

la matrice $M^{h_f}_Q$ étant toujours diagonale. Pour finir, on a la formule

$$D^{h_f} = -h_f \ (\frac{1}{h_f}\mathbb{D}), \tag{76}$$

où $\mathbb{D}$ est l'opérateur de différences finies $(\mathbb{D}Q)_\ell = Q_{s^+(\ell)} - Q_{s^-(\ell)}$, où $s^+(\ell)$ et $s^-(\ell)$ sont les deux segments ayant le noeud ℓ comme extrémité. De même $\mathbb{D}^\star$ est l'opérateur $(\mathbb{D}^\star I)_k = I_{\ell^-(s)} - I_{\ell^+(s)}$ où $\ell^\pm(s)$ sont les deux noeuds définissant le segment s avec des I_ℓ nuls aux extrémités du fil.

Le système (62) étant une approximation interne du problème continu (méthode de Galerkin), le passage du continu au semi-discret en espace se fait en conservant la propriété de conservation de l'énergie dont l'expression est

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f}(t) = & \frac{\epsilon_0}{2} h^3 \sum_a |E^{\epsilon,h}_a|^2(t) + + \frac{\mu_0}{2} h^3 \sum_f |H^{\epsilon,h}_f|^2(t) \\ & + \frac{L^\epsilon}{2} h_f \sum_\ell (I^{\epsilon,h_f}_\ell)^2(t) + \frac{c_0^2 L^\epsilon}{2} h_f \sum_s |Q^{\epsilon,h_f}_s|^2(t) \end{array} \right. \tag{77}$$

On a ainsi

$$\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f}(t) = \mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f}(0), \quad \forall t \geq 0. \tag{78}$$

Cette égalité peut se dériver directement. en sommant les équations obtenues par produit scalaire des 4 équations du système (62) par un vecteur bien choisi (celui dont la dérivée en temps apparaît). Tous les termes faisant intervenir les matrices A^h, B^{h,h_f}_ϵ et D^{h_f} disparaissent et ne reste que la dérivée de l'énergie dont l'expression est donnée ci-dessus lorsque la condensation de masse est effectuée.

4.3 Première discrétisation en temps. Lien avec le modèle de Holland

On présente ici une première façon de discrétiser l'équation en temps.

4.3.1 Description du schéma

Si Δt est le pas de temps, on choisit de discrétiser

- $E^{\epsilon,h}_\cdot$ et $Q^{\epsilon,h_f}_\cdot$ aux pas de temps n
- $H^{\epsilon,h}_\cdot$ et $I^{\epsilon,h_f}_\cdot$ aux pas de temps $n+\frac{1}{2}$,

et on construit le schéma en approchant les dérivées en temps de manière centrée suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 M^h_E \dfrac{(E^{\epsilon,h}_\cdot)^{n+1} - (E^{\epsilon,h}_\cdot)^n}{\Delta t} + A^h (H^{\epsilon,h}_\cdot)^{n+\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad + (B^{h,h_f}_\epsilon)^\star (I^{\epsilon,h_f}_\cdot)^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \\ \mu_0 M^h_H \dfrac{(H^{\epsilon,h}_\cdot)^{n+\frac{1}{2}} - (H^{\epsilon,h}_\cdot)^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (A^h)^\star (E^{\epsilon,h}_\cdot)^n = 0 \\ \\ B^{h,h_f}_\epsilon (E^{\epsilon,h}_\cdot)^n - L^\epsilon M^{h_f}_I \dfrac{(I^{\epsilon,h_f}_\cdot)^{n+\frac{1}{2}} - (I^{\epsilon,h_f}_\cdot)^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ \qquad\qquad + L^\epsilon c_0^2 D^{h_f} (Q^{\epsilon,h_f}_\cdot)^n = 0 \\ \\ M^{h_f}_Q \dfrac{(Q^{\epsilon,h_f}_\cdot)^{n+1} - (Q^{\epsilon,h_f}_\cdot)^n}{\Delta t} + (D^{h_f})^\star (I^{\epsilon,h_f}_\cdot)^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{array} \right. \tag{79}$$

ou encore, plus simplement

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon_0 \dfrac{(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n}{\Delta t} + \dfrac{1}{h}\mathbb{R}(H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{h^3}(B_\epsilon^{h,h_f})^\star (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \mu_0 \dfrac{(H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} - (H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \dfrac{1}{h}\mathbb{R}^\star (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n = 0 \\ \dfrac{1}{h_f} B_\epsilon^{h,h_f} (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - L^\epsilon \dfrac{(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} - (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ \qquad\qquad - L^\epsilon c_0^2 \dfrac{1}{h_f}\mathbb{D}(Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n = 0 \\ \dfrac{(Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} - (Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n}{\Delta t} - \dfrac{1}{h_f}\mathbb{D}^\star (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{array}\right. \tag{80}$$

Cet algorithme présente l'avantage d'être explicite, chaque inconnue se calculant par récurrence en appliquant une simple formule.

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & (H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} = (H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t}{h\mu_0}\mathbb{R}^\star E_h^n \\ (2) & E_{fdtd}^{n+1} = (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - \dfrac{\Delta t}{\epsilon_0 h}\mathbb{R}(H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1/2} \\ (3) & (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{L_\epsilon}\dfrac{1}{h_f}\mathbb{B}_\epsilon^{h,h_f}(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n \\ & \qquad\qquad - \dfrac{\Delta t}{h_f}c_0^2\mathbb{D}(Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n \\ (4) & (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} = E_{fdtd}^{n+1} - \dfrac{\Delta t}{\epsilon_0 h^3}\mathbb{B}_\epsilon^{h,h_f\,\star}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1/2} \\ (5) & (Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} = (Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n + \dfrac{\Delta t}{h_f}\mathbb{D}^\star (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1/2} \end{array}\right. \tag{81}$$

Le schéma apparaît ainsi comme une perturbation du schéma de Yee.

4.3.2 Où l'on retrouve (presque) le schéma de Holland

Pour aller plus avant, nous allons expliciter la matrice de couplage. Pour notre fil vertical, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\mathbb{B}_\epsilon^{h,h_f}\right)^\ell_{i+\frac{1}{2},j,k} = 0 \\ \left(\mathbb{B}_\epsilon^{h,h_f}\right)^\ell_{i,j+\frac{1}{2},k} = 0 \\ \left(\mathbb{B}_\epsilon^{h,h_f}\right)^\ell_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \left(\Lambda^{h,h_f}\right)^\ell_{k+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j}, \end{array}\right. \tag{82}$$

avec

$$\left(\Lambda^{h,h_f}\right)^{\ell}_{k+\frac{1}{2}} = \int \psi^h_{k+\frac{1}{2}}(z)\phi^{h_f}_{\ell}(z)\,dz$$

$$\left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j} = \iint_{D^\epsilon} \delta^\epsilon(\sqrt{(x-x_f)^2+(y-y_f)^2})\,\phi^h_i(x)\phi^h_j(y)\,dxdy, \tag{83}$$

où on rappelle que la fonction $\psi^h_{k+\frac{1}{2}}$ est la fonction indicatrice du segment $[kh, kh+h]$ et les fonctions ϕ^{h_f}, ϕ^h_j sont les fonctions chapeaux.

La forme linéaire $\left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j}$ peut s'interpréter comme un opérateur de valeur moyenne sur la section du fil. Elle vérifie

$$\sum_{i,j}\left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j} = 1 \tag{84}$$

Son adjoint permet d'éclater la valeur d'un courant sur la grille de calcul volumique.

Supposons le fil vertical et maillé avec un pas $h_f = h$, les abscisses en z des noeuds du maillage filaire situées à mi-hauteur des cubes du maillage volumique ($z_\ell = (\ell+\frac{1}{2})h$). Un calcul simple montre que (δ^k_ℓ vaut 1 si $\ell = k$ et 0 sinon),

$$\left(\mathbb{B}^{h,h_f}_{\epsilon}\right)^{\ell}_{i,j,k+\frac{1}{2}} = h_f\ \left(\frac{1}{2}\delta^\ell_k + \frac{1}{4}\delta^{\ell+1}_k + \frac{1}{4}\delta^{\ell-1}_k\right)\ \left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j}, \tag{85}$$

Revenons à présent au schéma (80), si l'on se réfère à [8], on remarque que ce schéma est exactement le schéma proposé par Holland aux substitutions

$$\begin{cases} L_\epsilon & \rightarrow\ L_{holl} \\ \left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j} & \rightarrow\ \mathbf{B^{i,j}_{holl}} \\ \left(\frac{1}{2}\delta^\ell_k + \frac{1}{4}\delta^{\ell+1}_k + \frac{1}{4}\delta^{\ell-1}_k\right) & \rightarrow\ \delta^k_\ell \end{cases} \tag{86}$$

près, où $\mathbf{B_{holl}}$ est la forme linéaire

$$(\mathbf{B_{holl}})^{\mathbf{i,j}} == \phi^{\mathbf{h}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x_f})\phi^{\mathbf{h}}_{\mathbf{j}}(\mathbf{y_f}). \tag{87}$$

$\mathbf{B_{holl}}$ est également un opérateur de type valeur sur la section du fil. Elle utilise au plus 4 points du maillage du plan transverse: par exemple si $0 \le x_f, y_f \le h$, n'interviennent que les i, j égaux à 0 et 1.

Maintenant étant donnés $\mathbf{B_{holl}}$ et L_{holl}, il est toujour possible de trouver une infinité de fonctions δ_ϵ telles que $\mathbf{B_{holl}}$ et L_{holl} coïncident avec $\mathbf{B}^{\mathbf{h}}_\epsilon$ et L_ϵ. Ainsi notre schéma ne diffère de celui de Holland que par la condensation de la molécule $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ en z. Notons que cette condensation ne correspond pas à une formule de quadrature. Pour retrouver exactement le schéma de Holland, il faudrait approcher le courant par des fonctions constantes par morceaux et utiliser une approche différences finies variationnelles. Toutefois, on notera que les schémas sont identiques pour les ondes indépendantes de z diffractant sur un fil infini.

L'avantage de ce nouveau schéma, comme de celui de Holland, réside dans la simplicité de sa mise en oeuvre. Toutefois, il est très difficile d'obtenir des garanties quant à sa stabilité. L'étude expérimentale de la stabilité du schéma de Holland, telle que décrite dans [13], montre que la condition de stabilité du schéma dépend du rayon du fil a. Plus le rayon est gros, plus

le pas de temps (rapporté au pas d'espace) doit être choisi petit. C'est ce que l'on retrouvera dans le cas 2D de la section suivante (cf. condition (164)). Si l'on se souvient que le schéma de Yee est d'autant plus précis que le pas de temps est proche de la CFL ($c_0\Delta t = \frac{h}{\sqrt{3}}$), on convient que ce schéma peut être mal adapté aux fils épais.

4.4 Seconde discrétisation en temps

Dans cette section, on propose un autre schéma de discrétisation qui va s'avérer stable sous la condition CFL dés que L^ϵ est positif et que h_f est plus grand que $\frac{h}{\sqrt{3}}$, le prix à payer étant la résolution à chaque pas de temps d'un petit système linéaire.

4.4.1 Description du schéma

Δt est toujours le pas de temps, on choisit de discrétiser

- $E_\cdot^{\epsilon,h}$ et $I_\cdot^{\epsilon,h_f}$ aux pas de temps n
- $H_\cdot^{\epsilon,h}$ et $Q_\cdot^{\epsilon,h_f}$ aux pas de temps $n+\frac{1}{2}$,

et on construit le schéma en approchant les dérivées en temps de manière centrée suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon_0 M_E^h \dfrac{(E_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_\cdot^{\epsilon,h})^n}{\Delta t} + A^h (H_\cdot^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad + (B_\epsilon^{h,h_f})^\star (\dfrac{1}{2}(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n) = 0 \\ \mu_0 M_H^h \dfrac{(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}-(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (A^h)^\star (E_\cdot^{\epsilon,h})^n = 0 \\ B_\epsilon^{h,h_f} (\dfrac{1}{2}(E_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(E_\cdot^{\epsilon,h})^n) - L^\epsilon M_I^{h_f} \dfrac{(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+1}-(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n}{\Delta t} \\ \qquad\qquad + L^\epsilon c_0^2 D^{h_f} (Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ M_Q^{h_f} \dfrac{(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}}-(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (D^{h_f})^\star (I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n = 0 \end{array}\right. \tag{88}$$

ou encore, en utilisant les expressions des matrices de masse diagonale

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon_0 \dfrac{(E_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_\cdot^{\epsilon,h})^n}{\Delta t} + \dfrac{1}{h}\mathbb{R}(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{h^3}(B_\epsilon^{h,h_f})^\star (\dfrac{1}{2}(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n) = 0 \\ \mu_0 \dfrac{(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}-(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \dfrac{1}{h}\mathbb{R}^\star (E_\cdot^{\epsilon,h})^n = 0 \\ \dfrac{1}{h_f} B_\epsilon^{h,h_f} (\dfrac{1}{2}(E_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(E_\cdot^{\epsilon,h})^n) - L^\epsilon \dfrac{(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+1}-(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n}{\Delta t} \\ \qquad\qquad - L^\epsilon \dfrac{c_0^2}{h_f}\mathbb{D}(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \dfrac{(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}}-(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \dfrac{1}{h}\mathbb{D}^\star (I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n = 0 \end{array}\right. \tag{89}$$

Le schéma est très similaire au précédent, à ceci près que l'on a substitué des moyennes pondérées entre deux instants pour le courant et le champ électrique afin de conserver le caractère centré des équations.

4.4.2 Algorithme de résolution

La résolution de ce schéma est un peu plus complexe que dans le cas précédent, car on va avoir un système linéaire à résoudre à chaque pas de temps pour évaluer le courant qui parcourt le fil.

Les deux premières étapes consistent à actualiser le champ magnétique et la charge de manière explicite

$$\begin{cases} (1) \quad (H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} = (H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t}{h\mu_0}\mathbb{R}^{\star} E_h^n \\ (2) \quad (Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = (Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{h_f}\mathbb{D}^{\star}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n \end{cases} \tag{90}$$

Pour résoudre le schéma en courant et champ électrique on peut introduire les deux inconnues auxiliaires

$$\nu^n = \frac{\Delta t}{\epsilon_0 h^3} B_{\epsilon}^{h,h_f\,\star}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n, \quad \mu^n = \frac{1}{h_f} B^{h,h_f}(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n \tag{91}$$

La variable ν^n permet de commencer à résoudre le problème en champ électrique via

$$\begin{cases} (3) \quad E_{fdtd}^{n+1} = (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - \dfrac{\Delta t}{\epsilon_0 h}\mathbb{R}(H_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1/2} \\ (4) \quad \tilde{E}^{n+1} = E_{fdtd}^{n+1} - \dfrac{1}{2}\nu^n \end{cases} \tag{92}$$

L'étape (3) correspond au schéma de Yee classique, l'étape (4) prend en compte le courant relatif à l'instant n.

Ensuite, on commence la résolution de l'équation

$$\frac{1}{2}(\mu^n + \mu^{n+1}) - L^{\epsilon}\frac{(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} - (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n}{\Delta t} - \frac{L^{\epsilon}c_0^2}{h_f}\mathbb{D}(Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \tag{93}$$

en calculant

$$(5) \quad \tilde{\mu}^{n+1} = -\mu^n - 2\frac{L^{\epsilon}}{\Delta t}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^n + 2\frac{L^{\epsilon}c_0^2}{h_f}\mathbb{D}(Q_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \tag{94}$$

Appliquons l'opérateur B_{ϵ}^{h,h_f} à l'équation en E, on obtient

$$\epsilon_0\frac{h_f\mu^{n+1} - B_{\epsilon}^{h,h_f}\tilde{E}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2h^3}B_{\epsilon}^{h,h_f}B_{\epsilon}^{h,h_f\,\star}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} = 0, \tag{95}$$

parallèlement (94) et (93) permettent d'écrire

$$\frac{1}{2}(\mu^{n+1} - \tilde{\mu}^{n+1}) - \frac{L^{\epsilon}}{\Delta t}(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} = 0 \tag{96}$$

En inversant le système formé par (95) et (96), on déduit les deux étapes suivantes

$$\begin{cases} (6) \quad (I^{\epsilon,h_f})^{n+1} = \left(Id + \dfrac{\Delta t^2}{4\epsilon_0 L^\epsilon h_f h^3} B_\epsilon^{h,h_f} B_\epsilon^{h,h_f\,\star} \right)^{-1} F \\ \qquad \text{avec } F = \dfrac{\Delta t}{2L^\epsilon h_f} \left(B_\epsilon^{h,h_f} \tilde{E}^{n+1} - h_f \tilde{\mu}^{n+1} \right) \\ (7) \quad \mu^{n+1} = \tilde{\mu}^{n+1} + \dfrac{2L^\epsilon}{\Delta t} (I^{\epsilon,h_f})^{n+1} \end{cases} \tag{97}$$

Les deux dernières étapes sont faciles

$$\begin{cases} (8) \quad \nu^{n+1} = \dfrac{\Delta t}{h^3 \epsilon_0} B_\epsilon^{h,h_f\,\star} (I^{\epsilon,h_f})^{n+1} \\ (9) \quad (E^{\epsilon,h})^{n+1} = \tilde{E}^{n+1} - \dfrac{1}{2}\nu^{n+1} \end{cases} \tag{98}$$

Si l'on regarde les différentes étapes de l'algorithme, on voit que tout se ramène à des formules explicites, hormis l'inversion du système qui permet d'obtenir le courant à l'étape (6).

Cette inversion représente un coût marginal car la matrice du système est symétrique creuse et de petite taille égale au nombre de noeuds du maillage filaire. Elle est donnée par

$$\begin{cases} C_{\ell,\ell'} = \delta_\ell^{\ell'} + C_0 \sum_k \left(\Lambda^{h,h_f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{\ell} \left(\Lambda^{h,h_f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{\ell'} \\ C_0 = \dfrac{\Delta t^2}{4\epsilon_0 L_\epsilon h^3 h_f} \sum_{i,j} \left((\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i},\mathbf{j}} \right)^2 \end{cases} \tag{99}$$

où la matrice de couplage Λ^{h,h_f} est donnée dans (83). Supposons le pas h_f plus grand que le pas du maillage volumique h, pour un k fixé, l'intervalle $[kh, kh+h]$ n'intersecte alors qu'au plus deux supports de fonctions de base du courant et la matrice C est tridiagonale.

Du point de vue des données, cet algorithme nécessite tout d'abord deux vecteurs pour le champ électromagnétique. les étapes (3), (4) et (9) de l'algorithme permettant d'actualiser le vecteur champ électrique en n'utilisant qu'un seul tableau. De plus on utilisera, un vecteur pour la charge, un autre pour le courant, un troisième pour les ν_a^n (qui est un champ localisé sur les degrés de libertés voisin du fil) et enfin un dernier pour μ_ℓ^n qui est la moyenne du champ électrique vu du noeud ℓ sur le fil.

4.4.3 Stabilité

Nous allons dans ce paragraphe démontrer que le schéma proposé est stable sous les mêmes conditions qu'en absence de fil. La démonstration repose sur une loi de conservation d'énergie discrète.

La conservation de l'énergie et ses conséquences

Définissons,

$$\left\{\begin{array}{c}(\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^n = \frac{\epsilon_0}{2}h^3\sum_a |(E_a^{\epsilon,h})^n|^2 + \frac{\mu_0}{2}h^3\sum_f (H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}\cdot(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \\ +\frac{L^\epsilon}{2}h_f\sum_\ell((I_\ell^{\epsilon,h_f})^n)^2 + \frac{c_0^2L^\epsilon}{2}h_f\sum_s(Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}}(Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}\end{array}\right. \tag{100}$$

On va montrer que toute solution du schéma (88) vérifie

$$(\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^n = (\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^0, \quad \forall n \tag{101}$$

Admettons pour le moment ce résultat et montrons qu'il implique la stabilité sous les deux conditions

$$\frac{c_0\Delta t}{h} < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{c_0\Delta t}{h_f} < 1. \tag{102}$$

Pour cela, on remarque que le terme en $(H_f^{\epsilon,h})^{n\pm\frac{1}{2}}$ de l'énergie peut se réécrire

$$\begin{array}{c}2\mathcal{E}_H^n = \mu_0h^3\sum_f(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}\cdot(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} = \\ \mu_0h^3\frac{1}{4}\sum_f\left(\left|(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}+(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 - \left|(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}-(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2\right)\end{array} \tag{103}$$

soit, en utilisant la deuxième équation de (88)

$$\begin{array}{c}2\mathcal{E}_H^n = \mu_0h^3\sum_f\frac{1}{4}\left|(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}+(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 \\ -\frac{c_0^2\Delta t^2}{4h^2}h^3\epsilon_0\sum_f\left|\sum_a\mathbb{R}_{f,a}(E_a^{\epsilon,h})^n\right|^2\end{array} \tag{104}$$

Un calcul assez long et pénible que nous ne détaillerons pas ici montre que

$$\sum_f\left|\sum_a\mathbb{R}_{f,a}(E_a^{\epsilon,h})^n\right|^2 \le 12\sum_a\left|(E_a^{\epsilon,h})^n\right|^2 \tag{105}$$

d'où la minoration de l'énergie en H

$$2\mathcal{E}_H^n \le \mu_0h^3\sum_f\frac{1}{4}\left|(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}+(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 - \frac{3c_0^2\Delta t^2}{h^2}h^3\epsilon_0\sum_a\left|(E_a^{\epsilon,h})^n\right|^2 \tag{106}$$

La conservation de l'énergie discrète implique alors que

$$\begin{array}{c}h^3\mu_0\sum_f\left|\frac{1}{2}(H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 \le (2\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^0 \\ h^3\epsilon_0\sum_f\left|(E_a^{\epsilon,h})^n\right|^2 \le (1-\frac{3c_0^2\Delta t^2}{h^2})^{-1}\,(2\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^0\end{array} \tag{107}$$

dés que $\frac{c_0\Delta t}{h}$ est plus petit que $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

De la même façon, l'énergie pour la charge se réécrit

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_Q^n &= L_\epsilon c_0^2 h_f \sum_s (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} \, (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \\ &= L_\epsilon c_0^2 \frac{h_f}{4} \sum_s \left(\left((Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right. \\ &\qquad \left. - \left((Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} - (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{108}$$

soit, en utilisant la dernière équation de (88)

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_Q^n &= L_\epsilon c_0^2 h_f \sum_s \frac{1}{4} \left((Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\quad - L_\epsilon \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4 h_f^2} h_f \sum_s \left(\sum_\ell \mathbb{D}_{s,\ell} (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n \right)^2 \end{aligned} \tag{109}$$

Pour un noeud ℓ fixé, il n'y a que 2 coefficients $\mathbb{D}_{\ell,s}$ non nuls, égaux à ± 1. On en déduit l'inégalité

$$\sum_s \left| \sum_\ell \mathbb{D}_{s,\ell} (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n \right|^2 \leq 4 \sum_\ell \left((I_\ell^{\epsilon,h_f})^n \right)^2 \tag{110}$$

d'où la minoration de l'énergie en Q

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_Q^n &\leq L_\epsilon c_0^2 h_f \sum_s \frac{1}{4} \left((Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\quad - L_\epsilon \frac{c_0^2 \Delta t^2}{h_f^2} h_f c_0^2 \sum_\ell \left((I_\ell^{\epsilon,h})^n \right)^2 \end{aligned} \tag{111}$$

La conservation de l'énergie discrète implique alors que

$$\begin{aligned} & L_\epsilon c_0^2 h_f \sum_s \left(\frac{1}{2} (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \leq (2\mathcal{E}_{h,h_f,\Delta t}^\epsilon)^0 \\ & L_\epsilon h_f \sum_\ell \left((I_\ell^{\epsilon,h})^n \right)^2 \leq (1 - \frac{c_0^2 \Delta^2 t}{h_f^2})^{-1} \, (2\mathcal{E}_{h,h_f,\Delta t}^\epsilon)^0 \end{aligned} \tag{112}$$

dés que $\frac{c_0 \Delta t}{h_f}$ est plus petit que 1. Les estimations (107) et (112) montrent que sous les conditions (102), on a un contrôle de la norme L^2 discrète du champ électrique et du courant d'une part et de la moyenne entre deux instants du champ magnétique et de la charge d'autre part. C'est un résultat de stabilité.

Où on montre la conservation de l'énergie discrète

Reste à montrer l'invariance en n de l'énergie telle que proclamée dans (101). En fait cette égalité s'obtient très simplement via les étapes suivantes

– On multiplie scalairement la première équation de (88) par la moyenne de $E^{\epsilon,h}$ entre deux instants , on trouve

$$\begin{aligned}
&\epsilon_0 h^3 \sum_a \frac{(E_a^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_a^{\epsilon,h})^n}{\Delta t} \cdot \frac{(E_a^{\epsilon,h})^{n+1} + (E_a^{\epsilon,h})^n}{2} \\
&+h^3 \sum_a \left(\sum_f \frac{1}{h} \mathbb{R}_{fa} (H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{(E_a^{\epsilon,h})^{n+1} + (E_a^{\epsilon,h})^n}{2} = \\
&-\sum_a \sum_\ell (B_\epsilon^{h,h_f})_{a,\ell} ((I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1} + (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n) \cdot \frac{(E_a^{\epsilon,h})^{n+1} + (E_a^{\epsilon,h})^n}{4}
\end{aligned} \tag{113}$$

– On fait la différence des équations en H à deux instants successifs

$$\mu_0 \frac{(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n+\frac{3}{2}} - (H_\cdot^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} - \frac{1}{h} \mathbb{R}^\star \frac{(E_\cdot^{\epsilon,h})^n + (E_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1}}{2} = 0 \tag{114}$$

On multiplie scalairement cette équation par $(H_\cdot^{\epsilon,h})^{n-\frac{3}{2}}$, il vient

$$\begin{aligned}
&\mu_0 h^3 \sum_f \frac{(H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{3}{2}} \cdot (H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} - (H_f^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}} \cdot (H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} \\
&-h^3 \sum_f \sum_a \frac{1}{h} \mathbb{R}_{f,a} \frac{(E_a^{\epsilon,h})^n + (E_a^{\epsilon,h})^{n+1}}{2} \cdot (H_f^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{115}$$

– On multiplie la troisième équation de (88) par la moyenne entre deux instants du courant électrique, on obtient

$$\begin{aligned}
&L_\epsilon h_f \sum_\ell \frac{(I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1} - (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n}{\Delta t} \cdot \frac{(I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1} + (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n}{2} \\
&+h_f L_\epsilon c_0^2 \sum_\ell \left(\sum_s \frac{1}{h_f} \mathbb{D}_{s,\ell} (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{(I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1} + (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n}{2} \\
&= \sum_a \sum_\ell (B_\epsilon^{h,h_f})_{a,\ell} ((I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1} + (I_\ell^{\epsilon,h_f})^n) \cdot \frac{(E_a^{\epsilon,h})^{n+1} + (E_a^{\epsilon,h})^n}{4}
\end{aligned} \tag{116}$$

– enfin on écrit les deux dernières équations du système (88) et on fait la différence, on trouve

$$\frac{(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{3}{2}} - (Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} - \frac{1}{h} \mathbb{D}^\star \frac{(I_\cdot^{\epsilon,h_f})^n + (I_\cdot^{\epsilon,h})^{n+1}}{2} = 0 \tag{117}$$

On multiplie scalairement cette équation par $(Q_\cdot^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}$, il vient

$$\begin{aligned}
&h_f \sum_s \frac{(Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{3}{2}} \cdot (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} - (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}} \cdot (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} \\
&-h_f \sum_s \sum_\ell \frac{1}{h_f} \mathbb{D}_{s,\ell} \frac{(I_\ell^{\epsilon,h_f})^n + (I_\ell^{\epsilon,h_f})^{n+1}}{2} \cdot (Q_s^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{118}$$

– On ajoute les 4 équations (113), (115) (116), (118), tous les termes croisés s'éliminent et il reste

$$\frac{(\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^{n+1} - (\mathcal{E}^{\epsilon}_{h,h_f,\Delta t})^{n}}{\Delta t} = 0, \tag{119}$$

qui la loi de conservation annoncée.

4.5 Questions relatives aux choix de l'inductance linéique

L'inductance L_{holl} telle que définie dans le papier de référence [8] est un paramètre sensible de la méthode. Par exemple, Holland propose d'abord la formule

$$L_{holl} = L_{\square}(\frac{a}{h}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\log(\frac{h}{\sqrt{2}a}) + \frac{\pi a^2}{2h^2} - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{120}$$

Cette valeur est obtenue en faisant la moyenne de $\frac{\mu_0}{2\pi}\log(\frac{r}{a})1_{r\geq a}$ sur un carré de longueur h.

Au vu des résultats numériques, Holland corrige ensuite (120) en

$$L_{holl} = L_{\square}(\frac{a}{h}) - L_{\square}(0.06). \tag{121}$$

On remarque que dans cette formule, l'inductance linéique artificielle ne dépend pas de la position du fil à l'intérieur du maillage. Par exemple, la même valeur de L est utilisée que le fil coupe une colonne verticale de cube en son milieu ou qu'il soit aligné le long d'une ligne verticale du maillage volumique.

Les expériences numériques présentées dans son papier montrent que l'erreur numérique sur le courant est très sensible à la valeur retenue pour L. Dans la section suivante, nous allons calculer précisément la solution numérique correspondant au cas d'un fil infini attaqué par une onde incidente de type $(E_z^{inc}(x,y),\ H_x^{inc}(x,y),\ H_y^{inc}(x,y))$. En supposant que $h = h_f$ et que le maillage du fil coïncide avec les noeuds de cote $(\ell+\frac{1}{2})h$ (qui est la situation imaginée par Holland), le problème discrétisé se ramène à un problème bi-dimensionnel qu'il n'est pas trop difficile de résoudre "à la main".

Pour le moment nous n'entrons pas dans le détail des calculs mais nous nous contentons de résumer les résultats obtenus. Nous allons exhiber une valeur de L qui minimise l'erreur numérique et discuter les conséquences d'un choix autre que celui de cette valeur optimale.

L'erreur que nous analysons porte sur l'inverse de la transformée de Fourier du courant (qui est une simple fonction du temps puisque le problème est choisi indépendant de z). Pour le cas continu et dans le cadre de l'approximation quasi-statique on a

$$\frac{\hat{E}_z^{inc}(\omega, x_f, y_f)}{\hat{I}(\omega)} \approx -\frac{i\omega\mu_0}{2\pi}\left(-\log\frac{\omega a e^{\gamma}}{2c_0} + i\frac{\pi}{2}\right) \tag{122}$$

à des termes petits comme $x^2|\log x|$ près, $x = \omega a c_0^{-1}$. Pour le schéma numérique, on pose

$$\hat{I}^h(\omega) = \Delta t \sum_n (I^{\epsilon,h})^n e^{i\omega n\Delta t} \tag{123}$$

et on suppose que la fonction δ_ϵ a toujours son support inclus dans un nombre fini de mailles. On montre alors (γ est la constante d'Euler)

$$\frac{\hat{E}_z^{inc}(\omega, x_f, y_f)}{\hat{I}^h(\omega)} \approx -\frac{i\omega\mu_0}{2\pi}\left(-\log\frac{\omega a e^{\gamma}}{2c_0} - K^{\epsilon,h} + \frac{2\pi}{\mu_0}L_\epsilon + i\frac{\pi}{2}\right), \tag{124}$$

les termes négligés étant petits comme $x^2 \log x$, $x = \omega h c_0^{-1}$.

La constante $K^{\epsilon,h}$ ne dépend que de l'opérateur de valeur sur la section du fil. On a

$$K^{\epsilon,h} = \sum_{p,q} \sum_{i,j} (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i,j}} \, (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{p,q}} \mathbf{C_{p-i,q-j}}, \tag{125}$$

où les $C_{p,q}$ sont des constantes numériques dont les expressions sont données en annexe. Elles proviennent du développement limité de la fonction de Green sortante de l'équation d'Helmoltz discrétisée. Si

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} G^h_{p,q} + (\Delta_h G^h)_{p,q} = \frac{1}{h^2} \, \delta^0_p \, \delta^0_q \tag{126}$$

avec

$$(\Delta_h G^h)_{p,q} = \frac{1}{h^2} \left(G^h_{p-1,q} + G^h_{p,q-1} + G^h_{p+1,q} + G^h_{p,q+1} - 4 G^h_{p,q} \right) \tag{127}$$

alors on a

$$(G^h)_{p,q} = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(e^{C_{p,q}} \frac{\omega h}{c_0}) + O(\frac{\omega^2 h^2}{c_0^2} \log \frac{\omega h}{c_0}), \tag{128}$$

où le grand O est uniforme sur tout ensemble de couples (p, q) bornés. On a par exemple

$$C_{0,0} = -\gamma - \frac{3}{2} \log 2, \quad C_{0,1} = C_{0,0} + \frac{\pi}{2}, \quad C_{1,1} = C_{0,0} + 2 \tag{129}$$

À partir de ces expressions, on peut calculer l'erreur relative sur le courant. On a

$$\left| \frac{\hat{I}(\omega)}{\hat{I}^h(\omega)} - 1 \right| = \frac{2\pi}{\mu_0} \, \frac{L^\epsilon - L^{opt}}{\left| \log^2(\frac{\omega a e^{-\gamma}}{2c_0}) + \frac{\pi^2}{4} \right|^{\frac{1}{2}}} \tag{130}$$

avec

$$L^{opt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\log \frac{h}{a} + K^{\epsilon,h} \right). \tag{131}$$

Ainsi, si la valeur optimale n'est par retenue, l'erreur relative tend vers 0 comme l'inverse du logarithme du rayon rapporté à la longueur d'onde. Cette convergence est très lente d'où l'importance de choisir la valeur optimale de L. Remarquons pour finir qu'une mauvaise valeur de l'inductance engendre une erreur du même ordre que celle entrainée par une erreur sur le rayon du fil.

De l'expression du L optimal, on peut déduire les points suivantes.

- La valeur de L^{opt} dépend du rayon du fil par une relation simple du type $L = C_1 - C_2 \log \frac{a}{h}$.
- Si l'on change la position du fil relativement à la maille, on doit changer la valeur du L utilisé. Par exemple, choisissons l'opérateur de Holland pour $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ tel que donné par (87) et imaginons le fil localisé sur une ligne du maillage. D'après (125), la valeur de $K^{\epsilon,h}$ doit être prise égale à $C_{0,0}$ = -1.616936436, tandis que si le fil passe par le centre d'une face d'un cube du maillage, on doit prendre $K^{\epsilon,h} = \frac{1}{4} C_{0,0} + \frac{1}{2} C_{0,1} + \frac{1}{4} C_{1,1} = 0.7178187$.
- Pour un opérateur de valeur sur la section du fil $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ donné, il existe un rayon maximal de fil à partir duquel L^{opt} devient négatif. On a donc une plage de rayon de fil que l'on peut modéliser, plage d'autant plus grande que l'opérateur $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ est étalé sur la grille. Toutefois, il existe un compromis, car si cet opérateur est trop étalé, les erreurs négligées (les $O(h^2 \log h)$) peuvent devenir prépondérentes.

Nous reviendrons sur tout ceci lors de la présentation des résultats numériques.

Signalons enfin que ces conclusions sont également valables pour tous les schémas dont nous avons parlé (modèle de Holland inclus). En effet, pour les schémas centrés, la discrétisation en temps induit une erreur en $O(\omega^2 \Delta t^2)$, qui est négligeable par rapport à l'erreur décrite ci-dessus. L'erreur numérique n'est pas de nature dispersive mais est principalement due à la géométrie. Par contre, les conclusions ne sont (a priori) plus valides si le fil n'est pas parallèle aux axes du maillage. On pourrait calculer les valeurs optimales de L dans le cas où le fil est orienté suivant des diagonales (c.à.d. lorsque qu'il existe un problème discret bi-dimensionnel sous-jacent) mais nous ne savons pas si les valeurs trouvées coïncideraient avec celles relatives aux cas d'un fil parallèle aux axes.

5 Le problème bidimensionnel et ses conséquences sur le choix de l'inductance artificielle

5.1 Le problème bidimensionnel

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème bidimensionnel de la diffraction d'une onde par un petit disque circulaire de rayon a. Ce problème correspond à un cas particulier du cas 3D traité dans les sections précédentes. En effet, toute onde incidente de la forme

$$E_z^{inc}(x,y,t), \quad H_x^{inc}(x,y,t), \quad H_y^{inc}(x,y,t) \tag{132}$$

donne naissance par diffraction sur un fil infini d'axe Oz à un champ diffracté

$$E_z^{d}(x,y,t), \quad H_x^{d}(x,y,t), \quad H_y^{d}(x,y,t), \tag{133}$$

la composante électrique du champ $E = E_z = E_z^{inc} + E_z^d$ vérifiant le système

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} E - \Delta E = 0, \ \sqrt{x^2+y^2} \geq a \\ E = 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} = a \\ E(t=0) = E^0, \quad E(t=0) = E^1. \end{cases} \tag{134}$$

On reconnaît les équations qui régissent la diffraction plane d'une onde par un disque D_a de frontière C_a.

En suivant la démarche de la section précédente, on va construire un modèle approché qui, après discrétisation, aboutit à un schéma numérique qui s'avèrera être un cas particulier du schéma 3D étudié précédemment. Ce modèle 2D, plus simple, va nous permettre d'analyser précisément l'influence de l'inductance linéique artificielle L_ϵ sur la précision des résultats fournis par le schéma.

Pour mener à bien les calculs, il s'avère nécessaire de caractériser le comportement de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz discrétisée sur une grille régulière avec un Laplacien à 5 points. À notre connaissance, ce calcul n'avait pas été encore effectué. Le calcul, long et technique quoique élémentaire sera détaillé dans une section autonome.

5.1.1 Construction du modèle approché

On commence par écrire le problème satisfait par le prolongé de E par 0 à l'intérieur du disque. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}E - \Delta E = -\mu_0 2\pi a \partial_t j_z \, \frac{\delta_{C_a}}{2\pi a}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ E = 0, \quad \text{sur } C_a \\ E(t=0) = E^0, \quad E(t=0) = E^1. \end{array}\right. \tag{135}$$

la fonction $2\pi a \partial_t j_z(\theta, t)$ est la densité de courant porté par la frontière du disque égale à la dérivée normale de E sur l'extérieur du disque.

La première étape pour l'obtention de notre modèle approché consiste à négliger les variations du champ incident au voisinage du fil. On substitue à la condition de Dirichlet sur la frontière du disque la condition

$$\check{E}^d_{/r=a} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E^{inc}(a,\theta,t)d\theta = 0, \quad (\check{E}^d \approx E - E^{inc}) \tag{136}$$

le champ incident E^{inc} étant solution de l'équation des ondes dans l'espace libre avec les mêmes conditions initiales que E.

Le problème satisfait par $\check{E}_d$ devenant invariant par rotation, $\check{E}^d$ est une fonction du temps et de la seule variable radiale r. De même, la densité de courant est une fonction dépendant uniquement du temps. On pose

$$\dot{I}(t) = 2\pi a \partial_t j_z(t) \tag{137}$$

et le problème approché

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}\check{E}^d - \Delta \check{E}^d = -\mu_0 \dot{I} \, \frac{\delta_{C_a}}{2\pi a}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \check{E}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E^{inc}(\theta, a, t)d\theta, \quad \text{sur } C_a \\ \check{E}^d(t=0) = 0, \quad \check{E}^d(t=0) = 0, \end{array}\right. \tag{138}$$

se résout à l'aide de la transformée de Fourier-Laplace en temps. Les calculs sont identiques à ceux du cas 3D. On trouve

$$\left\{\begin{array}{l} \check{E}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_{inc}(\omega)\frac{H_0^{(1)}(\omega r c_0^{-1})}{H_0^{(1)}(\omega a c_0^{-1})}e^{-i\omega t}d\omega, \quad r > a \\ \check{E}^d = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_{inc}(\omega)\frac{J_0(\omega r c_0^{-1})}{J_0(\omega a c_0^{-1})}e^{-i\omega t}d\omega, \quad r < a \\ \tilde{e}_{inc}(\omega) = \displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E^{inc}(a,\theta,t)d\theta\right) e^{i\omega t}\, d\omega \end{array}\right. \tag{139}$$

et enfin

$$\begin{array}{l} \mu_0 \dot{I} = \partial_r \check{E}^d{}_{r=a^+} - \partial_r \check{E}^d_{r=a^-} = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\dot{I}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \\ \tilde{\dot{I}}(\omega) = \dfrac{\tilde{e}_{inc}(\omega)}{\mu_0 J_0(\omega a c_0^{-1})\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\omega a c_0^{-1})} \end{array} \tag{140}$$

En particulier, on a la relation

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Si } r > a,\ \check{E}^d(r,t) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} E^{inc}(a,\theta,t)d\theta \\ = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\frac{\omega a}{c_0}) - \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\frac{\omega r}{c_0})\Big)\, J_0(\omega a c_0^{-1})\tilde{\dot{I}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \end{array}\right. \tag{141}$$

Supposons que le champ incident ait une fréquence de coupure ω^+ pour laquelle $\omega^+ r^+ c_0^{-1}$ soit très inférieur à 1. Pour r variant à de a à r^+, on peut substituer à l'intégrande son développement limité. À l'aide de (40), les fonctions de Bessel disparaissent et ne subsiste plus qu'un terme constant proportionnel à $\log\frac{r}{a}$ et donc indépendant de ω. On obtient par transformation inverse

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Si } r^+ > r > a, \\ E(r,\theta,t) \approx\ \check{E}^d(r,t) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} E^{inc}(a,\theta,t)d\theta \approx \mu_0 \log(\frac{r}{a})\dot{I}(t) \end{array}\right. \tag{142}$$

C'est l'approximation statique.

Pour achever la construction de notre modèle approché, il ne reste plus qu'à moyenner la relation (142) à l'aide d'une approximation de l'unité δ_ϵ telle que celle définie dans (38) avec $r_\epsilon^+ < r^+$ et à régulariser la masse de Dirac, toujours à l'aide de cette même fonction δ_ϵ.

On obtient le modèle

$$\left\{\begin{array}{l} c_0^{-2}\partial_{tt}E^\epsilon - \Delta E^\epsilon = -\mu_0 \dot{I}^\epsilon\ \delta_\epsilon \\ \displaystyle\int \delta_\epsilon E^\epsilon = L_\epsilon \dot{I} \\ E^\epsilon(t=0) = E^0, \quad \partial_t E^\epsilon(t=0) = E^1 \end{array}\right. \tag{143}$$

où L^ϵ est toujours donné par

$$L_\epsilon = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_a^{r_\epsilon^+} \log(\frac{r}{a})\delta_\epsilon(r)2\pi r dr. \tag{144}$$

qui est à la base de notre étude. Comparé au cas 3D on voit que la charge a disparu et que le courant est maintenant une fonction de la seule variable temps.

Il ne serait pas difficile de montrer que le modèle (143) correspond à un problème bien posé dans l'espace

$$(E,I) \in C^1(0,T,L^2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}) \cap C^0(0,T,H^1(\mathbb{R})\times\mathbb{R}) \tag{145}$$

où $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonction qui sont, ainsi que leur gradient, de carré intégrable sur Ω. Tout repose sur la conservation de l'énergie

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad \forall t > 0 \tag{146}$$

avec

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2c_0^2}|\partial_t E^\epsilon|^2 dx + + \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\text{rot } E^\epsilon|^2 dx + \frac{\mu_0}{2}L^\epsilon \dot{I}^2, \tag{147}$$

égalité qui se démontre directement: on multiplie l'équation des ondes par $\partial_t E$ et on intègre. Puis on dérive l'équation de contrainte par rapport au temps, on la multiplie par $\dot{I}$, après addition, le terme croisé disparaît et ne reste plus que la dérivée en temps de l'énergie qui est égale à zéro.

5.1.2 Deux discrétisations du modèle approché

La discrétisation des équations du modèle filaire bidimensionnel s'appuie sur les mêmes techniques que celles utilisées dans le cas 3D. On commence par écrire le problème sous forme d'un système variationnel évolutif que l'on approche à l'aide d'éléments finis. Le système d'équations différentielles obtenu s'intègre à l'aide d'un schéma aux différences finies.

La formulation variationnelle de (143) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } (E^\epsilon, \dot{I}^\epsilon) \in C^0(0,T,H^1(\mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}) \cap C^1(0,T,L^2(\mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}) \\ \qquad \text{tel que } \forall F \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ \dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\iint E^\epsilon F + \iint \vec{\nabla} E^\epsilon \cdot \vec{\nabla} F = -\mu_0 \dot{I}^\epsilon \iint \delta_\epsilon F \\ \text{avec } \displaystyle\iint \delta_\epsilon E^\epsilon = L^\epsilon \dot{I}^\epsilon \end{array}\right. \tag{148}$$

On approche ce problème par des éléments finis P^1 construits sur une grille régulière de pas h. Si $\mathcal{P}_h$ est l'espace des fonctions dont la restriction sur chaque carré du réseau est linéaire par rapport à chacune des deux variables d'espace, on notera $\left\{\varphi^h_{i,j}\right\}_{i,j}$ l'ensemble des fonctions de base de $\mathcal{P}_h$, où la fonction $\varphi^h_{i,j}$ est l'élément de $\mathcal{P}_h$ qui prend la valeur 1 sur le noeud (ih, jh) et 0 sur les autres. On a

$$\varphi^h_{i,j}(x,y) = \phi^h_i(x)\phi^h_i(y) \tag{149}$$

où les $\phi^h_i(s)$ sont les fonctions chapeaux.

La solution approchée est recherchée sous la forme

$$E^{\epsilon,h}(x,y,t) = \sum_{i,j} E^{\epsilon,h}_{i,j}(t)\varphi^h_{i,j}(x,y) \tag{150}$$

comme la solution du problème variationnel

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } (E^{\epsilon,h}, \dot{I}^{\epsilon,h}) \in C^\infty(0,T,\mathcal{P}_h\times\mathbb{R}) \\ \qquad \text{tel que } \forall F^h \in \mathcal{E}_h \\ \dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\iint E^{\epsilon,h} F^h + \iint \vec{\nabla} E^{\epsilon,h} \cdot \vec{\nabla} F^h = -\mu_0 \dot{I}^{\epsilon,h} \iint \delta_\epsilon F^h \\ \text{avec } \displaystyle\iint \delta_\epsilon E^{\epsilon^h} = L^\epsilon \dot{I}^{\epsilon,h}. \end{array}\right. \tag{151}$$

En regroupant les composantes de $E^{\epsilon,h}(t)$ dans un vecteur, on obtient le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c_0^2} M^h \dfrac{d^2 E^{\epsilon,h}_\cdot}{dt^2}(t) + A^h E^{\epsilon,h}_\cdot(t) + \mu_0 (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}. \\ \text{avec } \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}} \mathbf{E}^{\epsilon,\mathbf{h}}_\cdot(\mathbf{t}) - \mathbf{L}^\epsilon \dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{152}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} (M^h)_{i,j}^{i',j'} = \iint \varphi_{i,j}^h(x,y)\varphi_{i',j'}^h(x,y)dxdy \\ (A^h)_{i,j}^{i',j'} = \iint \left(\dfrac{\partial \varphi_{i,j}^h}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi_{i',j'}^h}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_{i,j}^h}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi_{i',j'}^h}{\partial y} \right) dxdy \\ (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i,j}} = \displaystyle\iint_{\mathbf{D}_\epsilon} \varphi_{\mathbf{i,j}}^{\mathbf{h}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\delta_\epsilon(\sqrt{\mathbf{x^2}+\mathbf{y^2}})\mathbf{dxdy} \end{array}\right. \tag{153}$$

En utilisant la formule de quadrature pour calculer les intégrales intervenant dans les expressions des matrices, on diagonalise la matrice de masse et A_h est h^2 fois le Laplacien à 5 points

$$(A_h u^h)_{i,j} = 4u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h - u_{i-1,j}^h - u_{i,j+1}^h - u_{i+1,j}^h \tag{154}$$

Le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{h^2}{c_0^2}\dfrac{d^2 E_{\cdot}^{\epsilon,h}}{dt^2}(t) + A^h E_{\cdot}^{\epsilon,h}(t) + \mu_0(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}. \\ \text{avec } \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\mathbf{E}_{\cdot}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{t}) - \mathbf{L}^\epsilon \dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{155}$$

Il ne reste plus qu'à discrétiser en temps. On distinguera deux schémas. Le premier évalue à la fois le champ électrique et le courant à des instants entiers du type $n\Delta t$. Le second décale le courant d'un demi-pas de temps. Le premier schéma s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} h^2 \dfrac{(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} - 2(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-1}}{c_0\Delta t^2} + A^h(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n \\ \qquad\qquad +\mu_0(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star(\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \\ \text{avec } \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{E}_{\cdot}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}} - \mathbf{L}^\epsilon(\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{156}$$

tandis que le second est

$$\left\{\begin{array}{l} h^2 \dfrac{(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} - 2(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-1}}{c_0^2\Delta t^2} + A^h(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n \\ \qquad +\mu_0(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\right) = \mathbf{0} \\ \text{avec } \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{E}_{\cdot}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n+1}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{E}_{\cdot}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{L}^\epsilon(\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{157}$$

Ces deux schémas sont centrés, le premier est plus naturel que le second. Toutefois ce dernier a l'immense avantage de conserver une énergie qui implique une condition de stabilité indépendante du fil à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_{n+\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} = \mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t}, \quad \forall n \geq 0 \\ 2\mathcal{E}_{n+\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} = h^2 \displaystyle\sum_{i,j} \left| \frac{(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_{i,j}^{\epsilon,h})^n}{c_0\Delta t} \right|^2 + \mu_0 L_\epsilon \left| (\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 \\ \quad + h^2 \displaystyle\sum_{i,j} \frac{(E_{i,j+1}^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}}{h} \frac{(E_{i,j+1}^{\epsilon,h})^n - (E_{i,j}^{\epsilon,h})^n}{h} \\ \quad + h^2 \displaystyle\sum_{i,j} \frac{(E_{i+1,j}^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}}{h} \frac{(E_{i+1,j}^{\epsilon,h})^n - (E_{i,j}^{\epsilon,h})^n}{h} \end{array}\right. \tag{158}$$

d'où l'on déduit les inégalités

$$\left\{\begin{array}{l} h^2\sum_{i,j}\left|\dfrac{(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n}}{c_0\Delta t}\right|^2 \;\leq\; \left(1-\dfrac{2c_0^2\Delta t^2}{h^2}\right)^{-1}\; 2\mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} \\ \left|(\mu_0\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 \leq \mu_0 L_\epsilon^{-1}\; 2\mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} \end{array}\right. \tag{159}$$

dés que la condition

$$\frac{c_0\Delta t}{h} < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{160}$$

est satisfaite. On en déduit que le schéma (157) est stable sous la même condition qu'en l'absence de fil.

Pour le schéma (157), l'énergie conservée est

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_{n+\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} = \mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t}, \quad \forall n\geq 0 \\ 2\mathcal{E}_{n+\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} = h^2\sum_{i,j}\left|\dfrac{(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n}}{c_0\Delta t}\right|^2 + \mu_0 L_\epsilon(\dot{I}^{\epsilon,h})^n(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+1} \\ \quad +h^2\sum_{i,j}\dfrac{(E_{i,j+1}^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}}{h}\dfrac{(E_{i,j+1}^{\epsilon,h})^{n}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n}}{h} \\ \quad +h^2\sum_{i,j}\dfrac{(E_{i+1,j}^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}}{h}\dfrac{(E_{i+1,j}^{\epsilon,h})^{n}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n}}{h} \end{array}\right. \tag{161}$$

Écrivons la décomposition

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 L_\epsilon(\dot{I}^{\epsilon,h})^n(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+1} & = & \dfrac{L_\epsilon}{\mu_0}\left|\mu_0\,\dfrac{(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+1}+(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n}}{2}\right|^2 \\ & & -\dfrac{\mu_0 c_0^2\Delta t^2}{4L_\epsilon}\left|L_\epsilon\,\dfrac{(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+1}-(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n}}{c_0\Delta t}\right|^2 \end{array} \tag{162}$$

puis utilisons la relation liant le courant au champ via $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$. À l'aide d'une inégalité de Cauchy-Swartz, on aboutit à l'estimation

$$\left\{\begin{array}{l} h^2\sum_{i,j}\left|\dfrac{(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n+1}-(E_{i,j}^{\epsilon,h})^{n}}{c_0\Delta t}\right|^2 \\ \qquad \leq \left(1-\dfrac{2c_0^2\Delta t^2}{h^2}-\dfrac{\mu_0 c_0^2\Delta t^2}{4L_\epsilon h^2}(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star\right)^{-1}\; 2\mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} \\ \left|\dfrac{1}{2}\mu_0(\dot{I}^{\epsilon,h})^n+\dfrac{1}{2}\mu_0(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+1}\right|^2 \leq \mu_0 L_\epsilon^{-1}\; 2\mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^{\epsilon,h,\Delta t} \end{array}\right. \tag{163}$$

si la condition

$$c_0\Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{2}}\left(1+(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star\frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{8L}_\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{164}$$

est satisfaite. Cette condition s'avère expérimentalement nécessaire pour la stabilité. On voit que le schéma est stable sous une condition qui dépend de la nature du fil (fil très mince

ou épais), ce qui est gênant puisque l'on peut être amené à devoir utiliser un tout petit pas de temps pour pouvoir prendre en compte le petit disque conducteur dans le milieu 2D. Le schéma (157) est donc de loin préférable.

La résolution du schéma (157) peut se faire en introduisant les inconnues scalaires intermédiaires

$$\lambda^n = \mu_0 \frac{(\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} + (\dot{I}^{\epsilon,h})^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \quad \nu^n = \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}(\mathbf{E}_{\cdot}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}} \tag{165}$$

On commence par une première étape de différences finies classiques

$$(1) \quad (E_{\cdot}^{df})^{n+1} = 2(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n - (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n-1} - \frac{c_0^2\Delta t^2}{h^2} A^h (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^n \tag{166}$$

On a

$$h^2 \frac{(E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} - (E_{\cdot}^{df})^{n+1}}{c_0^2\Delta t^2} + (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \lambda^{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \tag{167}$$

et donc, en appliquant $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ on obtient la première égalité

$$h^2 \frac{\nu^{n+1} - (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{E}_{\cdot}^{\mathbf{df}})^{\mathbf{n+1}}}{c_0^2\Delta t^2} + (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \lambda^{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \tag{168}$$

qui, jointe à l'équation

$$\frac{1}{4}(\nu^{n+1} + 2\nu^n + \nu^{n-1}) = \frac{L_\epsilon}{\mu_0}\lambda^n \tag{169}$$

forme un système linéaire en les deux inconnues ν^{n+1} et λ^n que l'on résoud en

$$\left\{ \begin{array}{ll} (2) & E_{fil}^n = \dfrac{1}{4}\left((\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{E}_{\cdot}^{\mathbf{df}})^{\mathbf{n+1}} + \mathbf{2}\nu^{\mathbf{n}} + \nu^{\mathbf{n-1}}\right) \\ (3) & \lambda^n = \left(\dfrac{L_\epsilon}{\mu_0} + \dfrac{c_0^2\Delta t^2}{4h^2}\,(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star\right)^{-1} E_{fil}^n \\ (3) & \nu^{n+1} = -2\nu^n - \nu^{n-1} + \dfrac{4L_\epsilon}{\mu_0}\lambda^n \end{array} \right. \tag{170}$$

et on termine par

$$(4) \qquad (E_{\cdot}^{\epsilon,h})^{n+1} = (E_{\cdot}^{df})^{n+1} - \frac{c_0^2\Delta t^2}{h^2}(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \lambda^{\mathbf{n}}. \tag{171}$$

Avant de clore ce paragraphe, soulignons le lien entre ces deux schémas 2-D et les schémas présentés pour le cas Maxwell 3-D. On considère un fil infini maillé avec un pas $h = h_f$ et tel que les noeuds du maillage filaire soient situés à mi-hauteur des cubes du maillage volumique. On regarde les solutions de (89), resp. (80), avec $E^x_{i+\frac{1}{2},j,k}$, $E^y_{i,j+\frac{1}{2},k}$ et $H^z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$ nuls et les autres composantes électromagnétiques indépendantes de l'indice k. Après élimination des composantes magnétiques, on vérifie sans peine que la charge n'intervient plus et que le champ $E^z_{i,j,k+\frac{1}{2}} = E^z_{i,j}$ vérifie le schéma 2-D (156), resp. (157) aux substitutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}} \;\rightarrow\; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h_f}}\mathbb{B}^{\epsilon,\mathbf{h}} \\ (\dot{I}^{\epsilon,h})^n \rightarrow \dfrac{(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+\frac{1}{2}} - (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \;\text{ schéma (80),} \\ (\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \dfrac{(I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n+1} - (I_{\cdot}^{\epsilon,h_f})^{n}}{\Delta t} \;\text{ schéma (89),} \end{array} \right. \tag{172}$$

près.

5.1.3 Résolution du problème approché et calcul de l'inductance artificielle optimale

On se propose dans cette section de résoudre explicitement le problème discrétisé. On s'intéresse principalement à dériver une formule valable à des termes négligeables près et reliant les valeurs de la transformée de Fourier en temps du courant avec celles du champ incident moyen autour du fil. Cela nous permet de calculer les valeurs optimales de L^ϵ et de discuter du choix de la fonction δ_ϵ.

Le problème que nous envisageons est le schéma (157) complété avec les conditions initiales en temps, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} (E^{\epsilon,h}_{i,j})^0 = E^0(ih,jh) \\ \\ (E^{\epsilon,h}_{i,j})^1 = E^0(ih,jh) + \Delta t E^1(ih,jh) - \dfrac{c_0^2\Delta t^2}{2h^2} A_h E^0(ih,jh) \end{array} \right. \tag{173}$$

On commence par introduire le champ incident, solution du schéma en l'absence de fil

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2\, \dfrac{(E^{\epsilon,h}_{inc})^{n+1} - 2(E^{\epsilon,h}_{inc})^n - (E^{\epsilon,h}_{inc})^{n-1}}{c_0^2\Delta t^2} + A^h (E^{\epsilon,h}_{inc})^n = 0 \\ (E^{\epsilon,h}_{inc})^0 = (E^{\epsilon,h}_{\cdot})^0, \quad (E^{\epsilon,h}_{inc})^1 = (E^{\epsilon,h}_{\cdot})^1 \end{array} \right. \tag{174}$$

La solution du schéma s'écrit

$$(E^{\epsilon,h}_{\cdot})^n = (E^{\epsilon,h}_{inc})^n + (E^{\epsilon,h}_{D})^n \tag{175}$$

où $(E^{\epsilon,h}_{D})^n$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2\, \dfrac{(E^{\epsilon,h}_{D})^{n+1} - 2(E^{\epsilon,h}_{D})^n - (E^{\epsilon,h}_{D})^{n-1}}{c_0^2\Delta t^2} + A^h (E^{\epsilon,h}_{D})^n \\ \qquad\qquad + \mu_0 (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \right) = \mathbf{0} \\ \text{avec } \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}} \left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{E}^{\epsilon,\mathbf{h}}_{\mathbf{D}})^{\mathbf{n+1}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{E}^{\epsilon,\mathbf{h}}_{\mathbf{D}})^{\mathbf{n}} \right) - \mathbf{L}^\epsilon (\dot{\mathbf{I}}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{1}{2} \left((e^{\epsilon,h}_{inc})^{n+1} + (e^{\epsilon,h}_{inc})^n \right) \\ (E^{\epsilon,h}_{D})^0 = (E^{\epsilon,h}_{D})^1 = 0 \end{array} \right. \tag{176}$$

où $(e^{\epsilon,h}_{inc})^n$ est le champ incident moyen vu du fil

$$(e^{\epsilon,h}_{inc})^n = \mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}} (\mathbf{E}^{\epsilon,\mathbf{h}}_{\mathbf{inc}})^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i,j}} (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i,j}} (\mathbf{E}^{\epsilon,\mathbf{h}}_{\mathbf{inc}})^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i,j}} \tag{177}$$

Le schéma étant d'ordre 2, il est bien connu que si les conditions initiales sont assez régulières, chaque $(E^{\epsilon,h}_{inc})^n_{i,j}$ va approcher le champ incident du problème continu. Comme $(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})$ appliqué à un vecteur consiste à évaluer sa valeur au centre du fil de manière centrée (δ_ϵ ne dépend que de r). On peut donc supposer que $(e^{\epsilon,h}_{inc})^n$ approche la valeur vraie du champ incident au centre du fil à des termes petits comme $(\omega h)^2$. Cette erreur est uniquement due à la dispersion du schéma que l'on suppose maitrisée (en d'autres termes des erreurs de type $O((\omega h)^2$ seront négligées dans l'analyse à venir.

Afin de résoudre (176), on introduit les transformées de Fourier-Laplace discrètes suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} (\hat{E}_D^{\epsilon,h})(\omega) = \Delta t \sum_{n\geq 0} (E_D^{\epsilon,h})^n \ e^{i\omega n\Delta t} \\ \hat{\dot{I}}^{\epsilon,h}(\omega) = \Delta t \sum_{n\geq 0} (\dot{I}^{\epsilon,h})^{n+\frac{1}{2}} \ e^{i\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} \\ (\hat{e}_{inc}^{\epsilon,h})(\omega) = \Delta t \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2}\left((e_{inc}^{\epsilon,h})^n + (e_{inc}^{\epsilon,h})^{n+1}\right) \ e^{i\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} \end{array}\right. \tag{178}$$

Ces transformées sont définies analytiques sur $\omega > 0$ dès que le schéma est stable (i.e. $c_0\Delta t\sqrt{2} \leq h$). De plus, on peut construire une équation type Helmholtz discret en procèdant de la manière suivante: on multiplie l'équation des ondes discrètes par $e^{i\omega n\Delta t}$ et on somme sur n de 1 à l'infini puis on multiplie la seconde équation par $e^{i\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}$ et on somme sur n. À l'aide d'intégrations par parties discrètes qui utilisent les conditions initiales nulles en $n = 0$ et $n = 1$, on aboutit à

$$\left\{\begin{array}{l} h^2\frac{\omega_{\Delta t}^2}{c_0^2}(\hat{E}_D^{\epsilon,h}) - A_h(\hat{E}_D^{\epsilon,h}) = \mu_0 \cos(\frac{\omega\Delta t}{2})(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^\star \hat{\dot{\mathbf{I}}}^{\epsilon,\mathbf{h}} \\ (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})(\hat{\mathbf{E}}_\mathbf{D}^{\epsilon,\mathbf{h}})\cos(\frac{\omega\boldsymbol{\Delta t}}{\mathbf{2}}) - \mathbf{L}^\epsilon \hat{\dot{\mathbf{I}}}^{\epsilon,\mathbf{h}} = -(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{inc}}^{\epsilon,\mathbf{h}}) \end{array}\right. \tag{179}$$

où $\omega_{\Delta t}$ est donné par

$$\omega_{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \omega(1 + O(\omega^2\Delta t^2)) \tag{180}$$

On peut résoudre explicitement ce système d'équation à l'aide de la fonction de Green discrète. Si $G_{p,q}^h$ vérifie

$$\frac{\omega_{\Delta t}^2 h^2}{c_0^2}\, G_{p,q}^h - A_h G_{p,q}^h = \delta_p^0\delta_q^0 \tag{181}$$

alors $(\hat{E}_D^{\epsilon,h})$ est relié à $\hat{\dot{I}}^{\epsilon,h}$ par la relation

$$(\hat{E}_D^{\epsilon,h})_{p,q} = \mu_0\cos(\frac{\omega\Delta t}{2})\sum_{p,q} G_{p-i,q-j}^h (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i,j}}\, \hat{\dot{\mathbf{I}}}^{\epsilon,\mathbf{h}} \tag{182}$$

Maintenant la seconde équation du système (179) s'écrit

$$(\hat{e}_{inc}^{\epsilon,h}) = \left(L_\epsilon - \mu_0\cos^2(\frac{\omega\Delta t}{2})\sum_{i,j}\sum_{p,q} G_{p-i,q-j}^h (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i,j}}(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{p,q}}\right)\ \hat{\dot{I}}^{\epsilon,h}. \tag{183}$$

Dans cette équation apparaît une double somme portant sur les noeuds du maillage qui intersectent le support de δ_ϵ. Supposons que nous choisissions ce support de l'ordre de quelques mailles, seuls vont alors intervenir les valeurs de $G_{p,q}^h$ pour p et q petits. Pour avancer un peu plus dans les calculs, nous allons admettre un résultat que nous démontrerons dans la section suivante. On a

$$\begin{array}{rcl} G_{p,q}^h & = & -\frac{1}{2\pi}\left(-\log(\frac{\omega_{\Delta t}h}{c_0}) + \log 2 - \gamma - C_{p,q} + i\frac{\pi}{2}\right) \\ & & +O\left(\frac{\omega_{\Delta t}^2 h^2}{c_0^2}\log(\frac{c_0}{\omega_{\Delta t}h})\right) \end{array} \tag{184}$$

où $C_{p,q}$ est une suite de nombres dont la définition précise est donnée par (208). Notons que ce comportement asymptotique est valable uniformément sur tout ensemble de couples d'entiers borné.

Choisissons $\frac{c_0 \Delta t}{h}$ constant et faisons tendre à la fois ϵ et h vers 0 de telle façon à ce que le support de δ_ϵ soit toujours inclus dans un nombre fini de mailles. On peut alors à l'aide du résultat précédent obtenir le développement limité.

$$\begin{aligned}(\hat{e}_{inc}^{\epsilon,h}) = &\left(L_\epsilon + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i,j} \sum_{p,q} \left(-\log(\frac{\omega h}{c_0}) + \log 2 - \gamma \right.\right. \\ &\left.\left. -C_{p,q} + i\frac{\pi}{2} \right) (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{p},\mathbf{q}} (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \varepsilon \right) \quad \hat{\dot{I}}^{\epsilon,h} \\ \varepsilon = &\, O\left(\frac{\omega^2 h^2}{c_0^2} \log(\frac{c_0}{\omega h}) \right)\end{aligned} \tag{185}$$

Comme

$$\sum_{p,q} (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \iint \left(\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \varphi^{\mathbf{h}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) \delta_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathbf{dxdy} = \iint \delta_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathbf{dxdy} = \mathbf{1} \tag{186}$$

(185) se simplifie en

$$(\hat{e}_{inc}^{\epsilon,h}) = \left(L_\epsilon + \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\log(\frac{\omega h}{c_0}) + \log(2) - \gamma + i\frac{\pi}{2} - K^{\epsilon,h} + \varepsilon \right) \right) \quad \hat{\dot{I}}^{\epsilon,h} \tag{187}$$

Avec

$$K^{\epsilon,h} = \sum_{p,q} \sum_{i,j} (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{i},\mathbf{j}} \, (\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{\mathbf{p},\mathbf{q}} \mathbf{C}_{\mathbf{p}-\mathbf{i},\mathbf{q}-\mathbf{j}} \tag{188}$$

C'est cette formule que nous allons comparer au cas continu pour lequel d'après (140)

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{inc}(\omega) &= \mu_0 J_0(\omega a c_0^{-1}) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega a c_0^{-1}) \tilde{\dot{I}}(\omega) \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\log(\frac{\omega a}{c_0}) + \log 2 - \gamma + i\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\omega^2 a^2}{c_0^2} \log(\frac{c_0}{\omega a}) \right) \right) \tilde{\dot{I}}(\omega)\end{aligned} \tag{189}$$

La comparaison montre que

$$\begin{aligned}\frac{(\hat{e}_{inc}^{\epsilon,h})}{\hat{\dot{I}}^{\epsilon,h}} - \frac{\tilde{e}_{inc}}{\tilde{\dot{I}}} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\log(\frac{h}{a}) - K_{\epsilon,h} + \frac{2\pi L^\epsilon}{\mu_0} \right) \\ &\quad + O\left(\frac{\omega^2 a^2}{c_0^2} \log(\frac{c_0}{\omega a}) \right) + O\left(\frac{\omega^2 h^2}{c_0^2} \log(\frac{c_0}{\omega h}) \right)\end{aligned} \tag{190}$$

Ainsi, si la condition

$$L_\epsilon = \frac{\mu_0}{2\pi} \log(\frac{h}{a}) + \frac{\mu_0}{2\pi} K^{\epsilon,h} \tag{191}$$

est satisfaite, la relation champ incident moyen courant est identique à des termes petits comme $x^2 \log(x)$ où x est $\omega h c_0^{-1}$ ou $\omega a c_0^{-1}$. Par contre, si cette condition n'est pas remplie, il existe une erreur approximativement constante entre modèle numérique et modèle continu. Ce qui implique une erreur relative sur le courant qui varie comme l'inverse du logarithme de $\omega a c_0^{-1}$. Cette quantité tend bien vers zéro mais à une vitesse très très lente d'où la nécessité de satisaire la condition (191).

5.2 Analyse de la fonction de Green discrète au voisinage du point source

Le but de cette section est d'établir le comportement de la fonction de Green du schéma à 5 points pour l'équation d'Helmoltz au voisinage de la source lorsque le pas de discrétisation est petit. Ce calcul s'effectue à l'aide de la transformation de Fourier discrète.

Si $u_{p,q}$ est une suite de carré intégrable, on définit

$$(A_h(z).u)_{p,q} = 2zu_{p,q} + (u_{p,q-1} + u_{p,q+1} + u_{p-1,q} + u_{p+1,q} - 4u_{p,q}), \tag{192}$$

$A_h(z)$ définit un opérateur de ℓ^2 dans lui même pour tout z complexe. De plus, comme

$$\Im m \sum_{p,q} (A_h(z).u)_{p,q}.\overline{u_{p,q}} = \Im m 2z \sum_{p,q} |u_{p,q}|^2, \tag{193}$$

$A_h(z)$ est coercif sur ℓ^2 pour tout z de partie imaginaire positive et par voie de conséquence est inversible sur ℓ^2.

Posons $x = \omega^2 h^2/2$, le but de ce qui va suivre est de déterminer la fonction de Green

$$G^{\epsilon,h}_{p,q} = A_h(x + i\epsilon)^{-1}.(\delta^p_0\ \delta^q_0), \tag{194}$$

puis de calculer

$$G^h_{p,q} = \lim_{\epsilon \downarrow 0^+} G^{\epsilon,h}_{p,q}. \tag{195}$$

En particulier, on s'intéressera au comportement asymptotique lorsque ωh tend vers 0 de $G^h_{p,q}$.

5.2.1 Calcul par transformation de Fourier

On pose $x_\epsilon = x + i\epsilon = \frac{1}{2}\omega^2 h^2 + i\epsilon$. Le problème satisfait par $G^{\epsilon,h}$ s'écrit

$$2x_\epsilon G^{\epsilon,h}_{p,q} + \left(G^{\epsilon,h}_{p,q-1} + G^{\epsilon,h}_{p,q+1} + G^{\epsilon,h}_{p-1,q} + G^{\epsilon,h}_{p+1,q} - 4G^{\epsilon,h}_{p,q}\right) = \delta^p_0\ \delta^q_0. \tag{196}$$

On définit la transformation de Fourier de $G^{\epsilon,h}$ dans la direction p,

$$\hat{G}^{\epsilon,h}_p = \sum_q G^{\epsilon,h}_{p,q}\, e^{i\xi q}. \tag{197}$$

Après multiplication par $e^{i\xi q}$ des égalités (196) et sommation sur q, $\hat{G}^{\epsilon,h}_p$ doit satisfaire

$$2(x_\epsilon + \cos\xi - 2)\hat{G}^{\epsilon,h}_p + \hat{G}^{\epsilon,h}_{p-1} + \hat{G}^{\epsilon,h}_{p+1} = \delta^p_0. \tag{198}$$

L'équation (198) est une récurrence à deux niveaux d'équation caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2(2 - x_\epsilon - \cos\xi)X + 1 = 0. \tag{199}$$

Définissons

$$\Delta^\epsilon(\xi) = (2 - x_\epsilon - \cos\xi)\sqrt{\frac{(3 - x_\epsilon - \cos\xi)}{(2 - x_\epsilon - \cos\xi)}}\sqrt{\frac{(1 - x_\epsilon - \cos\xi)}{(2 - x_\epsilon - \cos\xi)}} \tag{200}$$

$$\begin{cases} r^\epsilon(\xi) = (2 - x_\epsilon - \cos\xi) - \Delta^\epsilon(\xi) \\ (\Rightarrow \dfrac{1}{r^\epsilon(\xi)} = (2 - x_\epsilon - \cos\xi) + \Delta^\epsilon(\xi)), \end{cases} \tag{201}$$

où les racines carrées sont définies via la détermination principale du logarithme. C'est à dire que $\Re e\sqrt{z} > 0$ pour tout z non situé sur la coupure $z \in \mathrm{R}^-$. Admettons pour le moment le lemme

Lemme *La fonction $r^\epsilon(\xi)$ est définie analytique sur la bande*

$$B^\epsilon = \{\xi \in C/\ |\Im m\xi| < \arg\sinh\epsilon\}\,,$$

où elle vérifie

$$|r^\epsilon(\xi)| < 1, \quad P(r^\epsilon(\xi)) = P(r^\epsilon(\xi)^{-1}) = 0.$$

Comme $\hat{G}_p^{\epsilon,h}$ doit être une suite ℓ^2 pour tout ξ, nécessairement

$$\hat{G}_p^{\epsilon,h} = \hat{G}_0^{\epsilon,h}\ (r^\epsilon)^{|p|},$$

car la deuxième solution $(1/r^\epsilon)^{|p|}$ explose lorsque $|p|$ tend vers l'infini.

L'équation écrite en $p = 0$ permet d'obtenir

$$(r^\epsilon - 1/r^\epsilon)\hat{G}_0^{\epsilon,h} = 1,$$

d' où

$$\hat{G}_p^{\epsilon,h} = -\frac{(r^\epsilon)^{|p|}}{2\Delta^\epsilon}. \tag{202}$$

L'utilisation de la transformation de Fourier inverse donne alors

$$G_{p,q}^{\epsilon,h} = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iq\xi}\ (r^\epsilon)^{|p|}}{\Delta^\epsilon(\xi)} d\xi. \tag{203}$$

En particulier et en utilisant la parité de $\cos\xi$,

$$G_{p,q}^{\epsilon,h} = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\cos q\xi\ (r^\epsilon)^{|p|}}{\Delta^\epsilon(\xi)} d\xi. \tag{204}$$

Il reste à montrer le lemme. La seule difficulté est de montrer que le choix de la racine carré est celui qui assure que le module de $r^\epsilon(\xi)$ est plus petit que 1 pour tout ξ. On va décomposer la preuve en plusieurs étapes. Tout d'abord, on remarque que si ξ est dans B^ϵ, alors le module de la partie imaginaire de $\cos\xi$, qui est toujours plus petite que $|\sinh(\Im m\xi)|$, est strictement bornée par ϵ. En particulier B^ϵ ne peut contenir de point ξ tels que P admette deux racines $e^{\pm i\theta}$ de module unité. En effet, pour un tel point on a

$$\Im m\,(-\cos(\xi) + 2 - x - i\epsilon + 2\cos(\theta)) = 0$$

et la partie imaginaire de $\cos\xi$ coïncide avec ϵ. Tout cela pour dire que sur B^ϵ on a soit $|r^\epsilon| < 1$ soit $|r^\epsilon| > 1$. Maintenant, pour montrer que l'on est dans le premier cas, il suffit de le vérifier en un point de B^ϵ (par exemple ξ =0) et de s'assurer de l'analycité de la fonction r^ϵ sur B^ϵ. En effet, si ces deux propriétés sont satisfaites comme B^ϵ est connexe par arc, s'il existait un point $\xi^\star$ tel que le module de r^ϵ était plus grand que 1 on pourrait relier ce point à 0 par un arc et par continuité on aurait l'existence d'un point intermédiaire dans B^ϵ pour lequel le module de r^ϵ serait 1, d'où une contradiction. Vérifions tout d'abord l'analycité. Si a et b sont deux complexes, la fonction

$$z \quad \rightarrow \quad exp^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)},$$

est définie analytique sur le plan complexe privé des points z tels que

$$\frac{z-a}{z-b} = -\lambda, \quad \lambda \geq 0,$$

soient

$$z = \frac{1}{1+\lambda}a + \frac{\lambda}{1+\lambda}b, \quad \lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow \; z \in [a,b].$$

Prenons $a = 3 - x - i\epsilon,\ b = 3 - x - i\epsilon$ puis $a = 2 - x - i\epsilon,\ b = 1 - x - i\epsilon$, comme $[a,b] \subset \{z,\ \Im mz = \epsilon\}$ on vérifie que B^ϵ n'intersecte pas les singularités de Δ^ϵ et r^ϵ est bien analytique. Reste le calcul en $\xi = 0$. On a

$$r^\epsilon(\xi = 0) = f(x) = (1 - x - i\epsilon)\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{1-x-i\epsilon}}\sqrt{1 + \frac{1}{1-x-i\epsilon}}\right).$$

On vérifie que $|f(x)|$ tend vers 0 à l'infini et est continue pour x réel. $|f(x)|$ est donc plus petit que 1 à l'infini. Cela entraîne qu'il doit en être de même en $x = 0$ (toujours pareil, sinon, par continuité il y a existence d'un point intermédiaire tel que $|f(x)| = |r^\epsilon(x=0)| = 1$ ce qui est impossible sur B^ϵ).

5.2.2 Passage à la limite par absorption limite

Le principe d'absorption limite consiste à faire tendre ϵ vers 0 par valeurs positives, x restant fixé dans l'expression

$$G^{\epsilon,h}_{p,q} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos q\xi\ (r^\epsilon)^{|p|}}{\Delta^\epsilon(\xi)} d\xi, \tag{205}$$

où Δ^ϵ est donné par (200) Pour simplifier, on ne regarde que le cas $x < 1$.

Il nous faut regarder la limite d'une racine carré lorsque (au moins pour des ξ petits) on s'approche d'une coupure. On distingue deux cas selon que $\cos\xi$ est compris entre -1 et $\cos\phi = 1 - x$. ou entre $\cos\phi$ et 1

Dans le premier cas, tous les termes situés sous les radicaux tendent vers un réel positif (grâce à l'hypothèse $x < 1$). Il n'y a alors aucune difficulté pour le passage à la limite et le résultat est indépendant du signe de ϵ. Dans le second cas, l'un des termes situés sous les radicaux tend vers un nombre négatif et le résultat du passage à la limite dépend du signe de ϵ. Plus précisément, si $\lambda = -1 + x + \cos\xi,\ \mu = 2 - x - \cos\xi > 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{-\lambda - i\epsilon}{\mu - i\epsilon}} &\sim \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu} - i\epsilon\frac{\lambda+\mu}{\mu^2} + O(\epsilon^2)} \\ &\sim -i\ \mathrm{Signe}(\lambda+\mu)\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = -i\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \quad \epsilon \to 0^+.\end{aligned}$$

Finalement, si $x < 1$, $\cos\phi = 1 - x$, on définit

$$r^h_p(\xi) = (2 - x - \cos\xi) - \sqrt{(3 - x - \cos\xi)(1 - x - \cos\xi)}$$

$$r^h_m(\xi) = (2 - x - \cos\xi) + i\sqrt{(3 - x - \cos\xi)(\cos\xi - 1 + x)},$$

et la fonction de Green discrète est donnée par

$$\begin{aligned} G^h_{p,q} &= \lim_{\epsilon\downarrow 0^+} G^{\epsilon,h}_{p,q} \\ &= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{\phi} \frac{\cos(q\xi)(r^h_m(\xi))^q d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(\cos\xi-1+x)}} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{\phi}^{\pi} \frac{\cos(q\xi)(r^h_p(\xi))^q d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(1-x-\cos\xi)}}. \end{aligned} \tag{206}$$

5.2.3 Comportement pour h petit

On rappelle que dans cette formule, x est égal à $\omega^2 h^2/2$. Si on regarde p et q comme deux paramètres fixés et que l'on fait tendre h vers 0, le point $(ph,\, qh)$ va tendre vers $(0,0)$ et l'on peut s'attendre à ce que $G^h_{p,q}$ approche $G_r(ph, qh)$, où G_r est la fonction de Green du problème continu

$$\omega^2 G_r + \Delta G_r = \delta$$

qui est donnée par

$$G_r(r) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega r),\ r = \sqrt{x^2+y^2},$$

Au voisinage de $r = \sqrt{p^2+q^2}\, h \sim 0$, on utilise le développement asymptotique (γ est la constante d'Euler)

$$G_r(r) = -\frac{1}{2\pi}\left(-\log(\omega r) + \log(2) - \gamma + i\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\omega r \log(\frac{1}{\omega r})\right)$$

qui montre une singularité logarithmique de la fonction que l'on cherche à approcher. A partir des formules précédentes on va montrer le résultat suivant

Proposition : *Soit $G^h_{p,q}$ la fonction de Green sortante (c.à.d. la suite donnée par (206) avec $x = \omega^2 h^2/2$), alors on a le développement asymptotique*

$$\begin{aligned} G^h_{p,q} &= -\frac{1}{2\pi}\left(-\log(\omega h) + \log 2 - \gamma - C_{p,q} + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + O\left(\omega^2 h^2 \log(\tfrac{1}{\omega h})\right) \end{aligned} \tag{207}$$

où $C_{p,q}$ est la suite définie par

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= -\frac{3}{2}\log 2 - \gamma \\ C_{0,q} &= C_{0,0} + \int_{-1}^{1} \frac{f_q(\eta)}{\sqrt{(3-\eta)(1+\eta)}} d\eta \\ C_{1,q} &= 2C_{0,q} - \frac{1}{2}C_{0,q+1} - \frac{1}{2}C_{0,q-1},\ \ (q \neq 0) \\ C_{p,q} &= 4C_{p,q-1} - C_{p+1,q-1} - C_{p-1,q-1} - C_{p,q-2},\ \ \forall p \geq 2 \\ C_{p,q} &= C_{|p|,|q|} \end{aligned} \tag{208}$$

avec

$$f_q(\eta) = \left(\frac{cos(qu)-1}{cosu-1}\right)_{/\eta=\cos u}. \tag{209}$$

Avant de démontrer ce résultat, on va faire quelques remarques sur l'interprétation de ce résultat. Définissons

$$C_{p,q} = e^{\xi_{p,q}} \tag{210}$$

les propriétés du logarithme nous permettent de réécrire (207) sous la forme

$$G^h_{p,q} = -\frac{i}{4}H^{(1)}_0(\omega h \xi_{p,q}) + O\left(\omega^2 h^2 \log\frac{1}{\omega h}\right) \approx G_r(h\xi_{p,q}) \tag{211}$$

Cette égalité signifie que, à des termes négligeables près, la fonction de Green discrète au point (ph, qh) s'identifie à la fonction de Green continue évaluée sur un rayon $\xi_{p,q}h$ distinct de (ph, qh). Par exemple

$$\begin{aligned} &\xi_{0,0}h \approx 0.198506h, \quad \xi_{1,0}h \approx .9549081h, \qquad \xi_{2,0}h \approx 1.9469204h \\ &\xi_{3,4}h \approx 5.01416h, \quad \xi_{2,2}h \approx 2.02012\,\sqrt{2}h, \end{aligned} \tag{212}$$

Apparemment on trouve que

$$\xi^h_{p,q} \approx \sqrt{p^2+q^2}, \quad \text{si } p^2+q^2 \to \infty \tag{213}$$

mais nous ne montrerons pas ici cette conjecture.

Pour montrer la proposition, on commence par regarder ce qui se passe en $p = q = 0$. On a

$$\begin{aligned} G^h_{0,0} &= -\frac{i}{2\pi}I^h_{0,0} - \frac{1}{2\pi}J^h_{0,0} \\ I^h_{0,0} &= \int_0^\phi \frac{d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(\cos\xi-1+x)}} \\ J^h_{0,0} &= \int_\phi^\pi \frac{d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(1-x-\cos\xi)}}. \end{aligned} \tag{214}$$

Effectuons les changements de variables

$$\begin{aligned} \cos\xi &= -\frac{\eta^2 x + 2 - 2x}{\eta^2 x - 2} \qquad \text{dans } I^h_{0,0} \\ \cos\xi &= -\frac{(6-5x+x^2)\eta^2 - 2}{(-2+x)\eta^2 - 2} \quad \text{dans } J^h_{0,0} \end{aligned} \tag{215}$$

après quelques calculs pénibles, on trouve

$$\begin{aligned} I^h_{0,0} &= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta^2 x(1-x/4))}} \\ J^h_{0,0} &= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-(1-x/2)^2\eta^2)}} \end{aligned} \tag{216}$$

Ces intégrales sont des intégrales elliptiques de première espèce. on peut écrire

$$G^h_{0,0} = -\frac{i}{2\pi}K\left(\sqrt{x(1-\frac{1}{4}x)}\right) - \frac{1}{2\pi}K\left(1-\frac{1}{2}x\right), \; x = \frac{\omega^2 h^2}{2} \tag{217}$$

Le comportement de la fonction elliptique K d'argument petit ou proche de l'unité est connu, [15] pages 535 formule 10.3 et 559 formule 10.12. On obtient

$$\begin{aligned} K(u) &= \frac{\pi}{2} + O\left(u^2 \log \frac{1}{u}\right), \quad u \sim 0 \\ K\left(1 - \frac{1}{2}x\right) &= \frac{1}{2}\log \frac{1}{1-(1-\frac{x}{2})^2} + 2\log 2 + O\left(x \log \frac{1}{x}\right) \end{aligned} \tag{218}$$

d'où l'on déduit (207) pour $(p,q) = (0,0)$ avec $C_{0,0} = -\gamma - \frac{3}{2}\log(2)$.

Maintenant, on passe aux indices (p,q) de la forme $(0,q)$. On écrit

$$\begin{aligned} G^h_{0,q} &= G^h_{0,0} + \frac{i}{2\pi}\tilde{I}^h_{0,q} + \frac{1}{2\pi}\tilde{J}^h_{0,q} \\ \tilde{I}^h_{0,q} &= \int_0^\phi \frac{(1-\cos(q\xi))d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(\cos\xi - 1 + x)}} \\ \tilde{J}^h_{0,q} &= \int_\phi^\pi \frac{(1-\cos(q\xi))d\xi}{\sqrt{(3-x-\cos\xi)(1-x-\cos\xi)}}. \end{aligned} \tag{219}$$

Comme x est supposé plus petit que 1, on a les majorations

$$\tilde{I}^h_{0,q} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \sup_{\xi\in[-\pi,\pi]} \left(\frac{1-\cos q\xi}{1-\cos\xi}\right) \int_0^\pi \frac{1-\cos\xi}{\sqrt{\cos\xi - 1 - x}}\, d\xi \tag{220}$$

or,

$$\sup_{\xi\in[-\pi,\pi]} \left(\frac{1-\cos q\xi}{1-\cos\xi}\right) = \sup_{\xi\in[-\pi,\pi]} \left(\frac{\sin^2 q\frac{\xi}{2}}{\sin^2\frac{\xi}{2}}\right) \leq \frac{\pi q^2}{2} \tag{221}$$

(le $\frac{\pi}{2}$ n'est pas optimal mais nous suffira ici), et

$$\begin{aligned} \int_0^\Phi \frac{1-\cos\xi}{\sqrt{\cos\xi - 1 - x}}\, d\xi &= \int_{1-x}^1 \frac{1-u}{\sqrt{(u-1-x)(1-u^2)}}\, du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \int_{1-x}^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u-1-x}}\, du = \frac{\pi x}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{222}$$

d'où on déduit

$$\tilde{I}^h_{0,q} = O(x) \tag{223}$$

Pour traiter $\tilde{J}^h_{0,q}$, on fait le changement de variable $\eta = \cos\xi$

$$\tilde{J}^h_{0,q} = \int_{-1}^{1-x} f_p(\eta) \sqrt{\frac{1-\eta}{1+x-\eta}}\, \frac{d\eta}{\sqrt{(3-x-\eta)(1+\eta)}} \tag{224}$$

où $f_p(\eta)$ est défini dans (209) et on effectue la décomposition

$$\tilde{J}^h_{0,q} = \int_{-1}^1 \frac{f_q(\eta)d\eta}{\sqrt{(3-\eta)(1+\eta)}} + J^h_1 + J^h_2 + J^h_3 \tag{225}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1^h &= \int_{-1}^{1-x} \frac{f_q(\eta)}{\sqrt{1+\eta}} \sqrt{\frac{1-\eta}{1-x-\eta}} \left(\frac{1}{\sqrt{3-x-\eta}} - \frac{1}{\sqrt{3-\eta}} \right) d\eta \\ J_2^h &= \int_{-1}^{1-x} f_q(\eta) \left(\sqrt{\frac{1-\eta}{1-x-\eta}} - 1 \right) \frac{d\eta}{\sqrt{(3-\eta)(1+\eta)}} \\ J_3^h &= -\int_{1-x}^{1} \frac{f_q(\eta)}{\sqrt{(3-\eta)(1+\eta)}} d\eta \end{aligned} \tag{226}$$

La majoration (221) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} &\sup_{\eta\in[-1,1]} \left(f_q(\eta)\sqrt{1-\eta} \right) \leq \sqrt{2}\, \frac{q^2\pi}{2} \\ &\sup_{\eta\in[-1,1]} \left(\frac{1}{\sqrt{3-x-\eta}} - \frac{1}{\sqrt{3-\eta}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x}{2} \end{aligned} \tag{227}$$

d'où

$$J_1^h \leq \sqrt{2}\, \frac{q^2\pi}{4}\, x \int_{-1}^{1-x} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-x-\eta)(1+\eta)}} = \sqrt{2}\, \frac{q^2\pi^2}{4}\, x \tag{228}$$

de même on a facilement

$$|J_3^h| \leq \frac{q^2\pi}{2} \sup_{\eta\in[1-x,1]} \frac{1}{\sqrt{(3-\eta)(1+\eta)}} \int_{1-x}^{1} d\eta = \frac{q^2\pi}{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \tag{229}$$

Le plus délicat est le terme en J_2^h. On commence par la majoration

$$\begin{aligned} J_2^h &\leq \sup_{\eta\in[-1,1-x]} \frac{f_q(\eta)}{\sqrt{3-\eta}}\, A(x) \;\leq \frac{q^2\pi}{2\sqrt{2-x}} A(x) \\ A(x) &= \int_{-1}^{1-x} \left(\frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-x-\eta}} - 1 \right) \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta}} \end{aligned} \tag{230}$$

On découpe $A(x)$ en deux morceaux, on a

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{0} \left(\frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-x-\eta}} - 1 \right) \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta}} \\ &\quad \leq \sup_{\eta\in[-1,0]} \left(\frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-x-\eta}} - 1 \right) \int_{-1}^{0} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta}} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right) \end{aligned} \tag{231}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{0}^{1-x} \left(\frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-x-\eta}} - 1 \right) \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta}} \\ &\quad \leq \sup_{\eta\in[0,1]} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \right) \int_{0}^{1-x} \left(\frac{1-\eta}{\sqrt{(1-\eta)(1-x-\eta)}} - 1 \right) d\eta \end{aligned} \tag{232}$$

Le sup vaut 1 et l'intégrale se calcule à la main, on trouve

$$T = \int_{0}^{1-x} \frac{(1-\eta)d\eta}{\sqrt{(1-\eta)(1-x-\eta)}} = \int_{0}^{1-x} \frac{(1-\eta)d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2\eta(1-\frac{x}{2}) + 1 - x}} \tag{233}$$

soit

$$\begin{aligned} T = & -\frac{1}{2}\int_0^{1-x} \frac{2\eta - 2(1-\frac{x}{2})}{\sqrt{\eta^2 - 2\eta(1-\frac{x}{2}) + 1 - x}} d\eta \\ & + \frac{x}{2}\int_0^{1-x} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2\eta(1-\frac{x}{2}) + 1 - x}} \end{aligned} \tag{234}$$

ou encore

$$\begin{aligned} T &= -\left[\sqrt{(1-\eta)(1-x-\eta)}\right]_0^{1-x} + \frac{x}{2}\int_0^{1-x} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - (1-\frac{x}{2}))^2 - \frac{x^2}{4}}} \\ &= \sqrt{1-x} + \frac{x}{2}\int_1^{\frac{2}{x}-1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \sqrt{1-x} + \frac{x}{2}\operatorname{arg\,cosh}(\frac{2}{x} - 1) \end{aligned} \tag{235}$$

Finalement

$$A(x) \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) + \sqrt{1-x} + \frac{x}{2}\operatorname{arg\,cosh}(\frac{2}{x} - 1) - 1 + x \tag{236}$$

Un développement limité donne alors

$$A(x) = \frac{1}{2} x \log\frac{1}{x}(1 + o(1)) \tag{237}$$

Finalement, J_1^h et J_2^h sont asymptotiquement petits comme x et J_2^h est petit d'ordre $x \log\frac{1}{x}$. En injectant ces résultats dans (225), on obtient le développement pour $\tilde{J}_h$ qui joint au développement (223) pour $\tilde{I}_h$ donne le développement pour $G_{0,q}^h$ via (219).

A partir du comportement asymptotique pour $G_{0,q}^h$, on déduit facilement par récurrence les formules pour $G_{p,q}^h$ quelquonques. En effet, on a

$$\omega^2 h^2 G_{p,q}^h + \left(G_{p,q-1}^h + G_{p,q+1}^h + G_{p-1,q}^h + G_{p+1,q}^h - 4G_{p,q}^h\right) = \delta_0^p\ \delta_0^q. \tag{238}$$

En particulier par symétrie,

$$\omega^2 h^2 G_{0,q}^h + \left(2G_{1,q}^h + G_{0,q-1}^h + G_{0,q+1}^h - 4G_{0,q}^h\right) = \delta_0^q. \tag{239}$$

On peut ainsi déduire le comportement asymptotique de $G_{1,q}^h$ a partir de celui des $G_{0,q}^h$ Le terme en $\omega^2 h^2 G_{0,q}^h$ étant négligeable, on tombe sur le développement annoncé.

Le développement relatif à (p, q), $q \geq 2$ se déduit de la même manière à partir de celui des $G_{p-1,q}^h$ et $G_{p-2,q}^h$. Enfin, le cas $q < 0$ s'obtient immédiatement par symétrie.

6 Expériences numériques

Nous présentons et analysons dans cette section des résultats d'expériences numériques 2-D et 3-D. Pour ces expériences, on a utilisé un code 2-D d'équation des ondes discrétisée par le schéma classique à 5 points que l'on a complété par des conditions absorbantes d'ordre élevé sur les bords ainsi qu'avec les modifications apportées par les différents schémas pour le fil. Le code 3-D est un schéma de Yee classique, avec couches de Bérenger en guise de conditions absorbantes, et augmenté des quelques étapes nécessaires à la prise en compte du fil.

La section est organisée se la manière suivante. On commence par analyser les valeurs de l'inductance artificielle pour différents choix de fonctions δ_ϵ, ou telle que celles données par Holland, en les comparant systématiquement à la valeur optimale obtenue théoriquement (section 6.1). Puis, aprés avoir décrit les conditions expérimentales des simulations du cas bidimensionnel, (section 6.2), on regarde successivement les points suivants :

- Influence de la grosseur du fil (section 6.3)
- Influence de l' inductance artificielle (section 6.4)
- Influence de la position du fil par rapport au maillage (section 6.5)
- Influence de l'étalement de la fonction δ_ϵ (section 6.6)

Les conclusions que nous dégagerons (cf, section 6.7) sont les suivantes

1. Le schéma de Holland souffre de problèmes de stabilité qui le rend inopérant dans le cas de fils trop épais, ce qui n' est pas le cas pour le nouveau schéma.
2. Le choix de la valeur théorique (131) pour l' inductance artificielle est crucial pour obtenir une précision correcte.
3. Si ce choix est retenu, l' erreur relative sur le courant est de l' ordre de 1 à quelques pour cent dans les cas les plus difficiles.

Faute de temps, le cas tridimensionnel n' a pas donné lieu à une étude aussi poussée. Néanmoins, les deux expériences numériques présentées (section 6.8) montrent des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus par des méthodes de référence (équations intégrales surfaciques ou filaires).

6.1 Questions relatives à l'inductance

6.1.1 Comparaison du L^ϵ avec l'inductance optimale

Il a été démontré dans les sections précédentes que si l'inductance L^ϵ était différente d'une valeur, notée par la suite L_{opt}, alors une erreur systématique existait entre modèle numérique et modèle continu. La valeur de L_{opt} est donnée par

$$L_{opt} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\log\frac{h}{a} + K^{\epsilon,h}\right) \tag{240}$$

où $K^{\epsilon,h}$ est défini par l'équation (125).

Nous allons dans un premier temps regarder s'il existe un type de fonctions δ_ϵ permettant de réaliser la condition $L_\epsilon = L_{opt}$. La fonction δ_ϵ doit en particulier vérifier les relations suivantes

$$\begin{cases} 2\pi\displaystyle\int_0^\infty \delta_\epsilon(r) r\, dr = 1 & (1) \\ L_\epsilon = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\displaystyle\int_S \delta_\epsilon(r)\log\left(\left(\dfrac{r}{a}\right)\right) ds = L_{opt} & (2) \end{cases} \tag{241}$$

Nous allons par la suite considérer deux types de fonctions qui sont notées

- $\delta_{\epsilon 1}(r)$ définie une couronne entre $[a, R]$, positive et linéaire par morceaux. Son graphe est donné par la figure 1. On remarque qu'une fois R fixé, la pente de $\delta_{\epsilon 1}(r)$ est donnée par l'équation (241-1). Il va donc s'avérer difficile de réaliser l'équation (241-2).

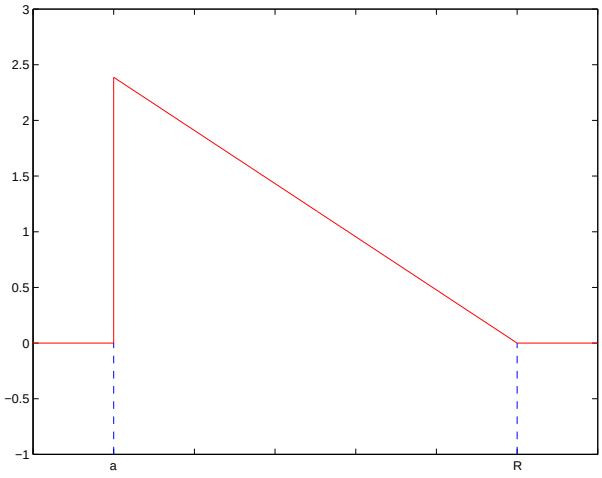


FIG. 1 – *fonction $\delta_{\epsilon 1}$ en fonction de r*

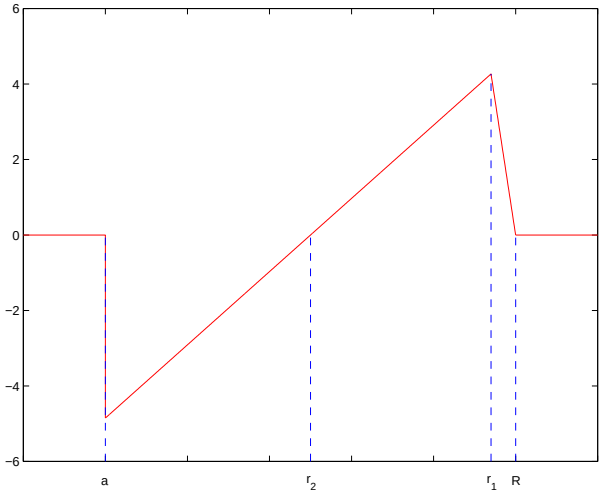


FIG. 2 – *fonction $\delta_{\epsilon 2}$ en fonction de r*

– $\delta_{\epsilon 2}(r)$ définie sur la couronne entre $[a, R]$ et linéaire par morceaux. Son graphe est donné par la figure 2. Les deux paramètres r_1 et r_2 vont donc être ajustés pour réaliser les deux équations (241).

Plaçons nous dans le cas où le fil est positionné sur un noeud du maillage. Seul un coefficient de $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ est non nul et l'inductance L_{opt} vaut

$$L_{opt} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\log\left(\frac{h}{a}\right) - \frac{3}{2}\,\log 2 - \gamma\right) \tag{242}$$

avec γ la constante d'Euler.

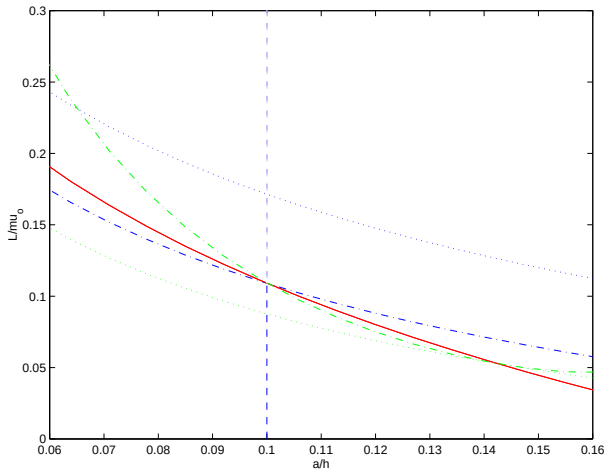


FIG. 3 – *Inductance en fonction du rapport* $\frac{a}{h}$ *lorsque le fil est positionné sur un noeud du maillage (-:*L_ϵ*, ...: avec* $\delta_{\epsilon 1}(r)$*, - .:avec* $\delta_{\epsilon 2}(r)$*)*

La figure 3 donne les valeurs de l'inductance L_{opt} en trait-plein. Les courbes en pointillé sont réalisées pour des fonctions $\delta_{\epsilon 1}(r)$ pour deux valeurs de R (cf tableau (243)).

courbe	fonction	R/h	r_1/h	r_2/h
trait foncé en pointillé	$\delta_{\epsilon 1}$	1.5		
trait foncé en discontinu	$\delta_{\epsilon 2}$	1.5	0.98	1.
trait clair en pointillé	$\delta_{\epsilon 1}$	3/4		
trait clair en discontinu	$\delta_{\epsilon 2}$	3/4	0.3	0.36

(243)

On remarque que l'inductance n'est jamais égale à L_{opt}. Les courbes en trait discontinu donnent l'inductance L_ϵ dans le cas des fonctions $\delta_{\epsilon 2}(r)$ pour deux valeurs de R. On remarque qu'il est possible de réaliser $L_\epsilon = L_{opt}$ pour un rapport $a/h = 0.1$. Mais apparemment dès que le rapport a/h change, il est nécessaire de changer de fonction $\delta_{\epsilon 2}$ pour continuer à assurer $L_\epsilon = L_{opt}$.

Plaçons dans le cas où le fil est positionné au milieu d'une maille. A ce moment là , seuls quatre coefficients sont non nuls et valent 0.25. L'expression de L_{opt} vaut $L_{opt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{0.7178\ \ h}{a}$. Les résultats sont donnés par la figure 4 et par le tableau 244

courbe	fonction	R/h	r_1/h	r_2/h
trait foncé en pointillé	$\delta_{\epsilon 1}$	1.5		
trait foncé en discontinu	$\delta_{\epsilon 2}$	1.5	0.73	1.05
trait clair en pointillé	$\delta_{\epsilon 1}$	3/4		
trait clair en discontinu	$\delta_{\epsilon 2}$	3/4	0.2	0.71

(244)

Remarquons d'abord que la courbe décrivant L_{opt} diffère sur les deux figures 3 et 4. Ainsi pour un rapport $h/a = 0.1$, on trouve que L_{opt} vaut $0.1091\mu_0$ (resp. $0.3117\mu_0$) dans le cas où le fil est positionné sur un noeud (resp. dans le cas où le fil est au centre d'une maille). La valeur de L_{opt} dépend de la position du fil.

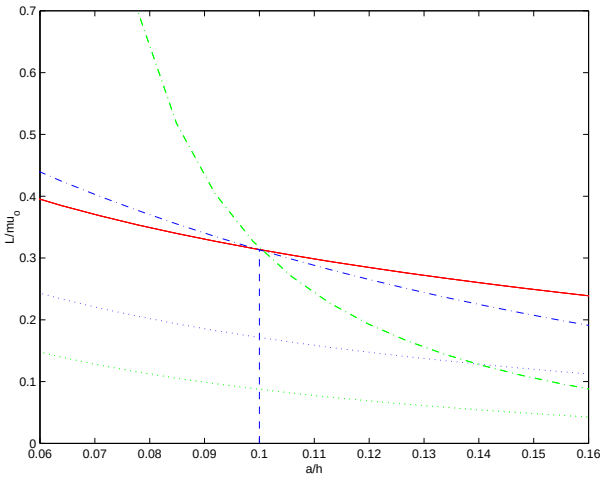


FIG. 4 – *Inductance en fonction du rapport* $\frac{a}{h}$ *lorsque le fil est positionné au milieu d'une maille (-:*L_ϵ*, ...: avec* $\delta_{\epsilon 1}(r)$*, -.:avec* $\delta_{\epsilon 2}(r)$*)*

Notons qu'il est possible de réaliser la condition $L_\epsilon = L_{opt}$ si la fonction δ_ϵ est la forme $\delta_{\epsilon 2}$. Cependant, la fonction $\delta_{\epsilon 2}$ est différente dans les deux cas traités. Elle dépend de la position du fil sur le maillage.

Conclusion: on peut donc conclure qu'il existe bien des fonctions permettant d'approcher la masse de Dirac et vérifiant $L_\epsilon = L_{opt}$. Mais ces fonctions dépendent de la position du fil sur le maillage. On verra cependant qu'en pratique, une fois l'approximation de la masse de Dirac définie et la position du fil fixée, il suffit de prendre comme inductance la valeur L_{opt} pour obtenir des résultats satisfaisants. Cette valeur peut être différente de $L_\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_S \delta_\epsilon(r)\log(\left(\frac{r}{a}\right)\, ds$.

6.1.2 Comparaison des inductances de Holland et de l'inductance optimale

Rappelons que le modèle de Holland [8] est lui aussi basé sur l'introduction d'une inductance liant le courant et le champ autour du fil. Remarquons que cette inductance ne dépend que du rapport h/a. Regardons si cette inductance est capable de réaliser $L_{holl} = L_{opt}$. Pour cela, comparons cette inductance introduite dans le modèle de Holland avec la valeur de l'inductance optimale L_{opt}. Deux expressions d'inductance choisies pour le modèle de Holland ont été retenues

$$\left\{\begin{array}{rcll} L_{holl1} & = & \dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(\dfrac{h^2}{h^2-4a^2}\log\dfrac{h}{2a}-\dfrac{1}{2}\right) & (1) \\ L_{holl2} & = & \mu_0\left(\dfrac{1}{2\pi}\log\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}a}\right)+\dfrac{a^2}{4h^2}\right) & \\ & & -\left(\dfrac{1}{2\pi}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}}{0.6}\right)+\dfrac{0.6^2}{16}\right) & (2) \end{array}\right. \tag{245}$$

Plaçons nous dans le cas particulier où le fil est positionné au sommet (k,l). La figure 5 donne les valeurs de l'inductance dans les trois cas. On remarque que la valeur de l'inductance obtenue L_{opt} est comprise entre les deux valeurs L_{holl1} et L_{holl2} et que par conséquence, les deux expressions de L_{holl} ne satisfont jamais $L = L_{opt}$. Regardons comment ces conclusions varient en fonction de la position du fil.

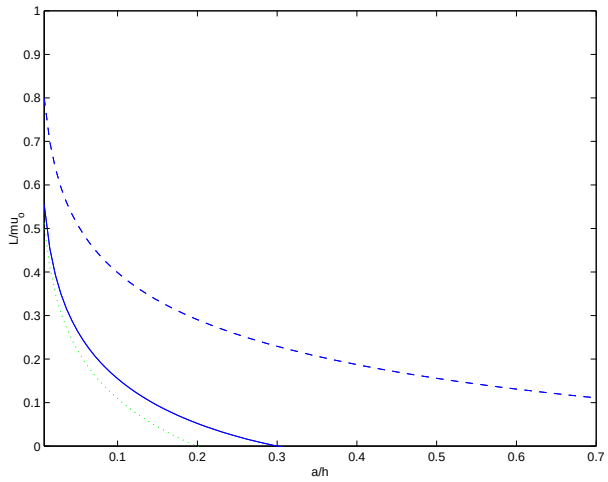


FIG. 5 – *Inductance en fonction du rapport* $\frac{a}{h}$ *(...:*L_{opt}*, - - :* L_{holl1} *, -:*L_{holl2}*)*

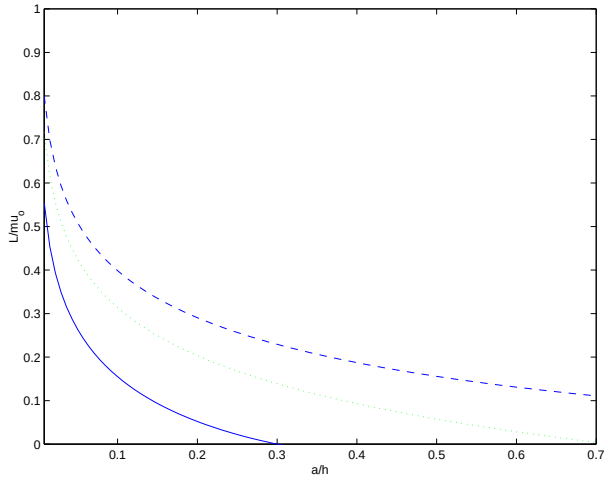


FIG. 6 – *Inductance en fonction du rapport* $\frac{a}{h}$ *(...:*L_{opt}*, - - :* L_{holl1} *, -:*L_{holl2}*)*

Plaçons nous maintenant dans le cas où le fil est positionné au centre d'une maille. La figure 6 donne les trois valeurs de l'inductance. Dans ce cas, L_{opt} est toujours inférieure aux deux valeurs données par le modèle de Holland. Les mêmes conclusions que dans le cas précédent peuvent être déduites.

Conclusion: dans les deux cas traités, il est impossible de réaliser la condition $L_{holl} = L_{opt}$. Il va donc en résulter une erreur systématique sur le courant calculé par le modèle de Holland. C'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

Nous allons maintenant introduire quatre modèles numériques qui permettent de modéliser l'interaction entre un champ électromagnétique et un fil, définis de la manière suivante

- modèle $Holl_1$ est le modèle de Holland où l'inductance L vérifie l'équation (1-245)
- modèle $Holl_2$ est le modèle de Holland où l'inductance L vérifie l'équation (2-245)
- modèle $Fict_1$ est décrit par les équations où la masse de Dirac est approchée par $\delta_{\epsilon 1}$

- modèle $Fict_2$ est le même que ce précédent mais la masse de Dirac est approchée par $\delta_{\epsilon 2}$ avec de plus $L_\epsilon = L_{opt}$

Précisons que dans le cas bi-dimensionnel, les modèles $Holl_1$ et $Holl_2$ sont décrits par le schéma (156) avec $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ donné par (87). Ils ne diffèrent que par leur inductance artificielle. Les schémas $Fict_1$ et $Fict_2$ s'appuient eux sur le schéma de discrétisation en temps (157), la matrice de couplage $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ étant calculée via (83).

Nous allons maintenant comparer ces quatre modèles et tenter de répondre aux questions suivantes

- quel est le rôle du rayon et l'influence du rapport a/h

- quelle est l'influence de la position du fil par rapport au maillage

- quel est le rôle joué par l'inductance L_ϵ

Afin de répondre à ces questions, nous allons comparer les valeurs du courant obtenus à celles du cas continu. Plus précisément, dans les paragraphes suivants, les valeurs des transformées de Fourier des courants obtenus par ces quatre modèles vont être comparées à la valeur du courant donné par le modèle continu soit

$$i\omega I_{stat}(\omega) = \frac{\tilde{e}^{inc}(\omega)}{\mu_0 \frac{i}{4} H_0^1(\frac{\omega a}{c_0}) J_0(\frac{\omega a}{c_0})} \tag{246}$$

Cette valeur sera dite pour simplifier "valeur de l'approximation quasi-statique" et sera notée I_{stat}.

6.2 Conditions expérimentales dans le cas bidimensionnel

Nous allons dans un premier temps nous placer dans le cas bidimensionnel et étudier la diffraction d'une onde électromagnétique par un petit disque de rayon a. Ce disque est éclairé par une onde plane dont la dépendance en temps $g(t)$ est donnée par

$$g(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\left(\pi F_p (t - 1/F_p)^2\right)\right)\right) \tag{247}$$

Dans tous les résultats numériques montrés, F_p est prise égale à $37.5Mhz$. Cette fonction est représentée par la figure (7). La longueur d'onde la plus petite contenue dans le signal $g(t)$ est de l'ordre de $\lambda_{min} = 4m$. Le pas en espace h est choisi tel que $h = \lambda_{min}/10$. Nous avons choisi des conditions absorbantes d'ordre élevé pour borner le domaine de calcul. Avant de comparer les modèles décrits précédemment, nous allons dans le paragraphe suivant décrire le calcul de la matrice $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$.

6.2.1 Calcul de la matrice de couplage champ électrique courant

La matrice ligne qui couple le courant électrique et le champ est donnée par

$$\left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j} = \iint \varphi_{i,j}^h(x,y)\delta_\epsilon(x - x_f, y - y_f)dxdy \tag{248}$$

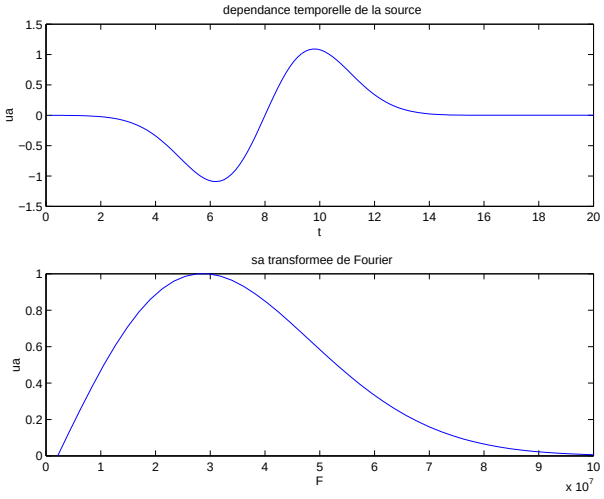


FIG. 7 – *fonction $g(t)$ et sa transformée de Fourier*

le support de cette intégrale est l'intersection entre le support de la fonction $\delta_\epsilon(r)$ et le support des fonctions de base $\varphi^h_{i,j}$ (i.e les quatre carrés dont un des sommets est le point (ih, jh)). Le calcul des coefficients $(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}})^{i,j}$ est réalisé en deux étapes

- calcul du support de l'intégrale. On détermine l'intersection de chaque carré qui compose le support de $\varphi^h_{i,j}$ avec le support de $\delta_\epsilon(r)$. Notons pour la suite cette intersection $\left(\Sigma^l_{i,j}\right)_{l=1,2,3,4}$.
- intégration numérique par exemple intégrale de Riemann

On obtient donc

$$\left(\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}\right)^{i,j} \approx \sum_{l=1}^{l=4} \sum_{p=1}^{Nriem} \varphi^h_{i,j}(x^i_p, y^l_p)\delta_\epsilon(x^l_p, y^l_p)\Delta S \tag{249}$$

où $Nriem$ est le nombre de points de Riemann et où (x^l_p, y^l_p) sont les points de Riemann appartenant à $\Sigma^l_{i,j}$

Remarque La matrice colonne transposée de cette matrice ligne n'est autre qu'un champ discret concentré autour du fil et qui approche une masse discrète de 1.

6.3 Influence de la grosseur du fil à inductance et position du fil fixés

Dans un premier temps, le disque est positionné sur un point du maillage. Deux cas sont considérés selon la valeur du rayon du fil.

6.3.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille

Nous allons considérer un disque de rayon noté a tel que $a = h/10$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\frac{6h}{10}$. Dans le cas des modèles $Fict$, le pas en temps est pris égal à $\frac{h}{\sqrt{2}c_0}$ de manière à assurer la CFL. En revanche, pour les modèles de Holland, Δt est choisi égal à $\frac{h}{2\sqrt{2}c_0} = \frac{1}{2}\Delta t_{Fict}$ pour assurer la stabilité. Les valeurs de r_1 et r_2 qui définissent la fonction

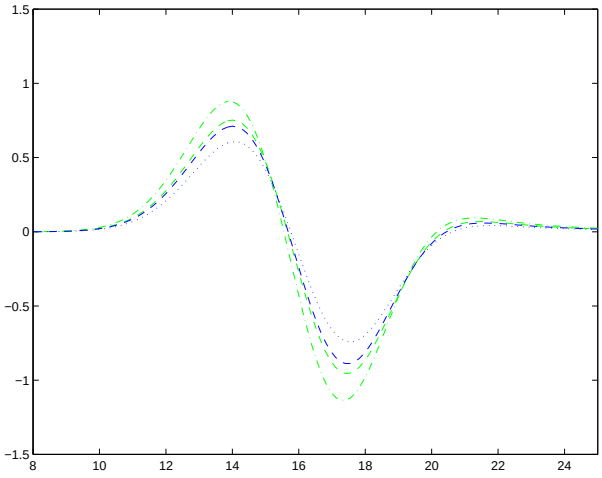


FIG. 8 – *dérivée du courant en fonction de temps pour les différents modèles (- .:Fict, -:Holl$_2$,...:Holl$_1$)*

$\delta_{\epsilon 2}(r)$ ont été choisis égaux à $r_1 = 0.33\ h$ et $r_2 = 0.52\ h$. Les valeurs des inductances sont données par la tableau suivant

	Modèles			
	$Holl_1$	$Holl_2$	$Fict_1$	$Fict_2$
L_ϵ	0.2906	0.1548	0.1587	0.3452
L_{opt}	0.1091	0.1091	0.2646	0.3452

(250)

Dans le cas des modèles $Fict_1$ et $Fict_2$, seuls neuf coefficients de la matrice $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ sont non nuls. Les valeurs de la dérivée du courant en fonction du temps sont données par la figure 8. Les courbes en trait discontinu (i.e: -.) (resp. en trait pointillé et en trait discontinu (i.e: - -)) représentent les valeurs du courant obtenues dans le cadre des modèles $Fict_1$ et $Fict_2$ (resp. $Holl_1$ et $Holl_2$). On remarque que les modèles choisis influent sur la valeur des extrema de ces courants. Mais ces quatre courbes sont relativement proches les unes des autres. Les valeurs des énergies définies par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_{cal}} \frac{1}{c_0^2}|\partial_t E^\epsilon|^2 dx + \frac{\mu_0}{2} L^\epsilon \dot{I}^2, \quad \mathcal{F}(t) = \frac{\mu_0}{2} L^\epsilon \dot{I}^2. \tag{251}$$

sont données par la figure 9 pour l'expérience $Fict_2$. On remarque que l'énergie contenue dans le domaine de calcul Ω_{cal} commence par croître au fur et à mesure que l'onde incidente entre dans le domaine de calcul, puis atteint un palier pour enfin décroître, l'énergie étant dissipée par les bords absorbants.

La transformée de Fourier de la dérivée du courant est donnée par la figure 10. Cette fonction est comparée à l'approximation statique I_{stat}. L'erreur relative entre les transformées des courants correspondants aux différents modèles et la valeur statique est donnée par la figure 11.

On remarque d'abord que les erreurs relatives croissent avec la fréquence. C'est l'effet de dispersion.

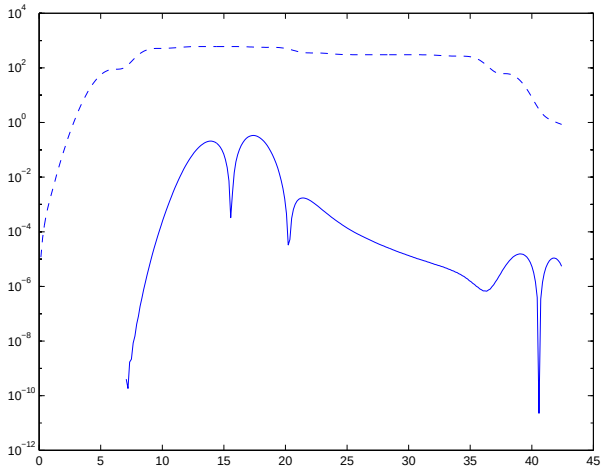


FIG. 9 – *énergie en fonction du temps (-: energie totale $\mathcal{E}(n\Delta t$,- -:énergie filaire $\mathcal{F}(n\Delta t)$*

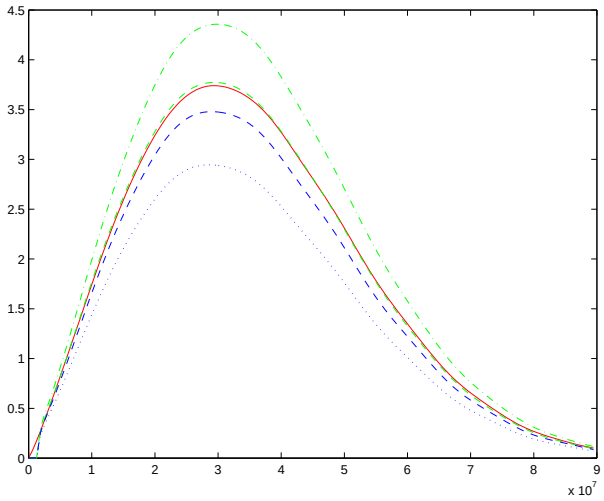


FIG. 10 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: valeur statique, -.: Fict ,- -:$Holl_2$,...: $Holl_1$)*

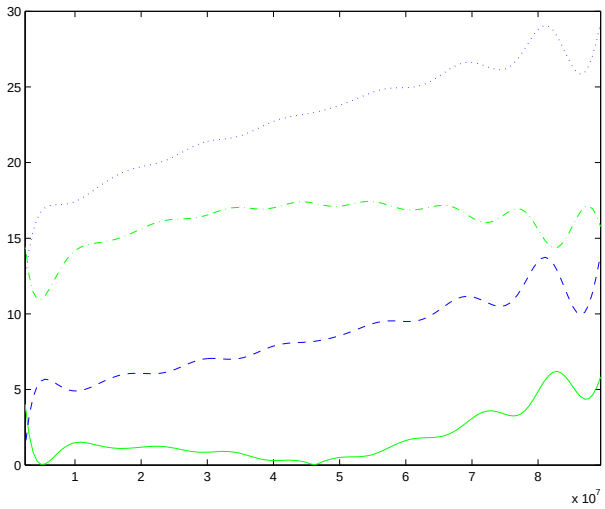


FIG. 11 – *Erreur relative en pourcentage sur les transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence (-: modèle $Fict_2$, -. : modèle $Fict_1$,....: modèle $Holl_1$,- -: modèle $Holl_2$)*

Si on compare uniquement les deux courbes obtenues pour les modèles de $Holl$, on observe principalement deux résultats

- les erreurs relatives pour les deux modèles de $Holl$ varient à peu près de la même façon et approximativement de manière linéaire en fonction de la fréquence (au moins à basse fréquence).

- l'erreur relative obtenue dans le cadre du modèle de $Holl_2$ est plus faible.

Les deux modèles $Holl$ ne vérifiant pas la condition $L = L_{opt}$, créent une erreur systématique sur la transformée de Fourier du courant qui se comporte comme l'inverse de $log(fa)$ (soit à basse fréquence comme f). C'est pourquoi on observe une erreur relative qui croit à peu près linéairement en échelle log. De plus, la condition $L = L_{opt}$ est moins bien vérifiée dans le cadre du modèle $Holl_1$, ce qui explique que l'erreur relative soit plus grande. Les erreurs relatives dans le cadre des modèles de $Holl$ sont toujours supérieures à celle obtenue pour le modèle $Fict_2$. Elles sont au mieux de l'ordre de 10%. De plus, elles ont nécessité d'itérer sur un plus grand nombre de pas de temps pour un même temps de simulation (condition CFL plus faible).

On remarque que le modèle $Fict_1$ conduit à des erreurs bien supérieures à celles obtenues dans le cadre du modèle $Fict_2$. Or, si on regarde attentivement ces deux modèles, on s'aperçoit qu'une différence essentielle entre les deux est le choix de l'inductance L_ϵ. La condition $L_\epsilon = L_{opt}$ n'est pas vérifiée dans le cadre du modèle $Fict_1$.

On note aussi que l'erreur relative pour le modèle $Fict_2$ change de comportement à haute fréquence et semble varier de manière parabolique. En effet, dans le cadre de ce modèle , la condition $L = L_{opt}$ est vérifiée , et la relation champ incident -courant est identique dans le cadre du modèle continu et discret à des termes de l'ordre de $f^2 log(f)$.

En conclusion, le tableau suivant permet de résumer les résultats obtenus

	Modèles			
	$Holl_1$	$Holl_2$	$Fict_1$ $R = 6h/10$	$Fict_2$ $R = 6h/10$ $r_1 = 0.35\ h$ $r_2 = 0.57\ h$
Δt	$\frac{h}{2\sqrt{2}}$	$\frac{h}{2\sqrt{2}}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$
L_ϵ	0.2906	0.1548	0.1587	0.3452
L_{opt}	0.1091	0.1091	0.2646	0.3452
erreur relative moyenne	22%	7%	15%	1%

(252)

On note que dans le cadre du modèle $Fict_2$, une erreur relative de1% a pu être obtenue.

Nous allons faire varier la taille du rayon pour étudier son influence sur les résultats précédents

6.3.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille

Nous avons considéré un disque de rayon $a = h/2$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\frac{3h}{4}$. Le choix de pas en temps Δt est identique à celui pris dans le paragraphe précédent.

Les valeurs de r_1 et r_2 qui définissent la fonction $\delta_{\epsilon 2}(r)$ ont été pris égaux à $r_1 = 0.6\ h$ et$r_2 = 0.65\ h$.

Les valeurs des inductances sont données par le tableau suivant

	Modèles			
	$Holl_1$	$Holl_2$	$Fict_1$	$Fict_2$
L_ϵ	0.06751	-0.04130	0.00656	0.119 $= L_{opt}$
L_{opt}	0.1091	0.1091	0.0844	0.119
erreur relative moyenne	34%	-	14%	1%

(253)

On remarque que l'inductance obtenue pour le modèle $Holl_2$ est négative et le schéma devient instable. Numériquement, on a observé cette instabilité. Aucun résultat n'a donc pu être obtenu dans le cadre de ce modèle.

On note que les valeurs de l'inductance sont plus faibles que dans le cas précédent (cas du rayon plus petit décrits dans 250) et que la valeur de l'inductance pour le modèle $Fict_2$ est toujours la plus importante.

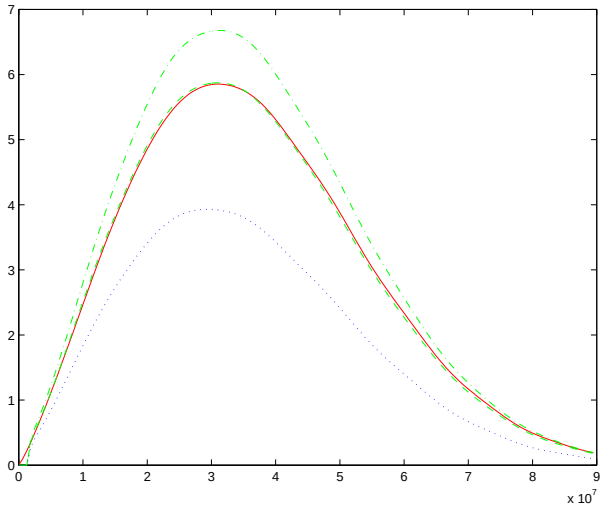


FIG. 12 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: valeur statique, -.: Fict ,- -:$Holl_2$,...: $Holl_1$)*

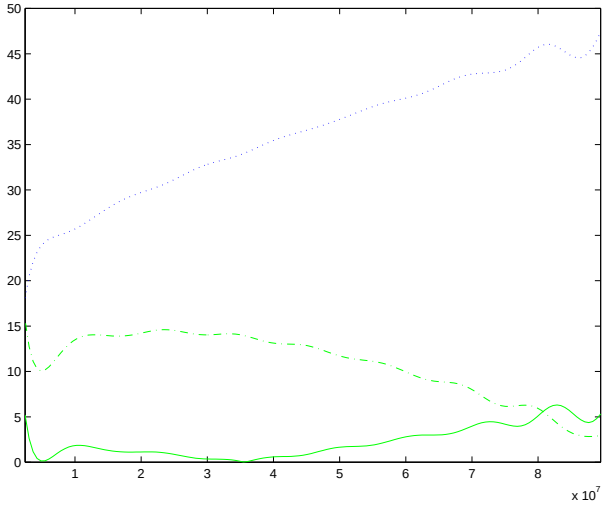


FIG. 13 – *Erreur relative en pourcentage sur la transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-:$Fict_1$, ...:$Holl_1$,-.:$Fict_2$)*

Dans le cas des modèles $Fict_1$ et $Fict_2$, seuls neuf coefficients de la matrice $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ sont non nuls.

Les courbes 12 et 13 donnent les valeurs des transformées de courant et des erreurs relatives pour les trois modèles $Fict_1$, $Fict_2$ et $Holl_1$. Les conclusions sont les mêmes que celles du paragraphe précédent. En particulier, on remarque que le modèle $Fict_2$ fournit la plus petite erreur relative (qui est inférieure à 1%).

En conclusion:

- Les erreurs relatives dans le cadre des modèles de $Holl$ sont toujours supérieures à celle obtenue pour le modèle $Fict_2$. Elles sont comprises entre 30% et 10%. Les schémas

proposés ne sont pas toujours stables. L'obtention des résultats a nécessité d'itérer sur des temps plus longs.

- Tous les modèles ne vérifiant pas la condition $L = L_{opt}$ créent une erreur systématique sur la transformée de Fourier du courant. Cette erreur est d'autant plus importante que l'écart entre les valeurs de L_ϵ et L_{opt} est grand.

- Si la condition est vérifiée alors on observe une erreur relative moyenne de l'ordre de 1%.

Rappelons que les modèles présentés dépendent du choix d'une inductance L_ϵ. Les exemples numériques décrits précédemment ont permis de conclure que la valeur de cette inductance influe énormément sur la qualité des résultats. En effet, si la relation $L_\epsilon = L_{opt}$ est vérifiée, une erreur relative de 1% est obtenue. On a noté dans le paragraphe, qu'il était difficile de définir une approximation de la masse de Dirac vérifiant la condition $L_\epsilon = \frac{\mu_o}{2\pi}\int_S \delta_\epsilon(r) log(\left(\frac{r}{a}\right)\, ds = L_{opt}$. quelque soit la position du disque et quelque soit son rayon. Dans le paragraphe suivant, nous allons observer les résultats obtenus lorsque, une fois l'approximation de la masse de Dirac définie et la position du disque fixée, on impose comme inductance la valeur L_{opt}.

6.4 Influence de l'inductance

Dans un premier temps, le disque est positionné sur un point du maillage.

6.4.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille

Nous avons considéré un disque de rayon noté a tel que $a = h/10$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\frac{6h}{10}$. Le choix du pas de temps Δt est identique au cas précédent.

On va considérer les quatre cas suivants

	Modèles			
	$Holl_2$	$Fict_1$	$Holl_{corr}$	$Fict_{1,corr}$
L_h	0.1548	0.1587	0.1091 $= L_{opt}$	0.2646 $= L_{opt}$

(254)

Dans les deux derniers cas, on impose à l'inductance de valoir exactement la valeur optimale donnée par l'équation (240). La transformée de Fourier du courant est donnée par la figure 14. L'erreur relative entre les transformées de courant pour les différents modèles et la valeur I_{stat} est donnée par la figure 15. Les erreurs relatives moyennes sont de l'ordre de 7% (resp. 15%) pour le cas $Holl_2$ (resp. pour le cas $Fict_1$). Mais lorsque l'on impose à l'inductance la valeur L_{opt} (i.e modèles $Fict_{corr}$ et $Holl_{corr}$), les erreurs relatives chutent et sont de l'ordre de 1%.

On peut observer le même phénomène lorsque le rayon est de l'ordre du pas de la maille h.

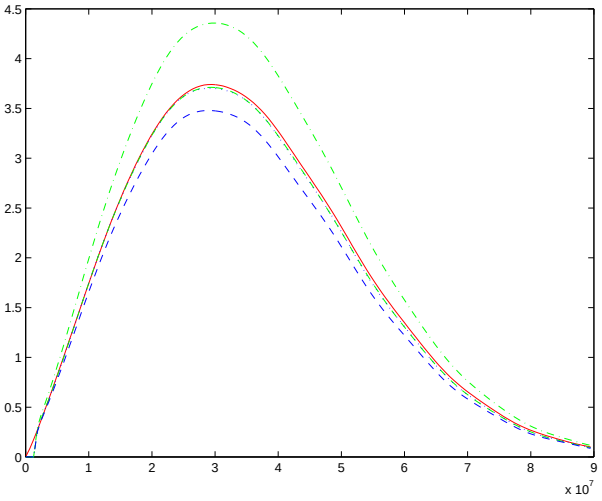


FIG. 14 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: valeur statique, ...: $Holl_{corr}$ et $Fict_{corr}$,- -:$Holl_2$, -.:$Fict_1$)*

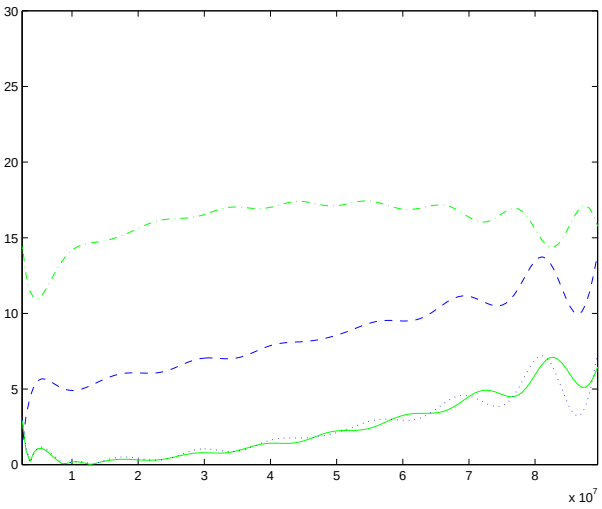


FIG. 15 – *Erreur relative en pourcentage sur la transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: $Fict_{corr}$, ...:$Holl_{corr}$, -.:$Fict_1$, - -:$Holl_2$)*

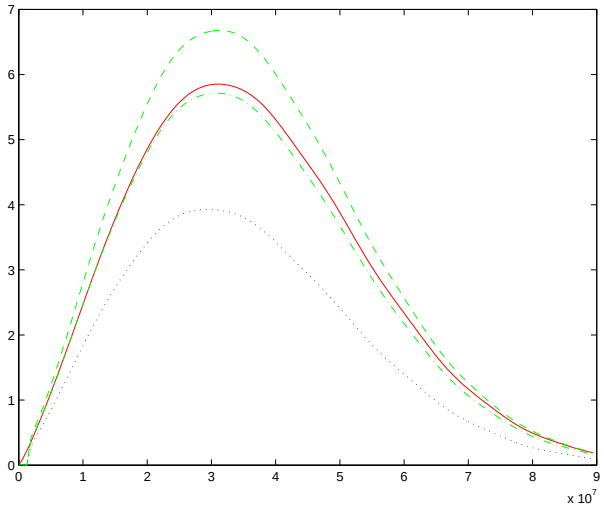


FIG. 16 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les modèles (-: valeur statique, - .: $Fict_{corr}$,- -:$Fict_1$,...:Holl)*

6.4.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille

Nous avons considéré un disque de rayon noté a tel que $a = h/2$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\frac{3h}{4}$.

On va considérer les quatre cas suivants

	Modèles			
	$Holl_1$	$Fict_1$	$Holl_{corr}$	$Fict_{1,corr}$
L_h	0.06751	0.00656	-0.1470 $= L_{opt}$	0.0844 $= L_{opt}$

(255)

Remarquons que $L_{holl,corr}$ est négative. De plus, on n'observe aucune convergence des résultats.

La transformée de Fourier du courant et les erreurs relatives sont données par les figures 16 et 17. On observe une erreur relative moyenne de l'ordre de 3.5% pour le cas $Fict_{corr}$.

Conclusion: on note qu'une fois l'approximation de la masse de Dirac définie et la position du disque fixée, si on impose comme inductance la valeur L_{opt}, les erreurs relatives sont de l'ordre de quelques pour cent. Ce résultat est indépendant de la taille de rayon.

De plus, les résultats obtenus sont comparables à ceux obtenus dans le cas où la valeur L_ϵ vérifie $L_\epsilon = \frac{\mu_o}{2\pi} \int_S \delta_\epsilon(r) log((\frac{r}{a}))\ ds = L_{opt}$.

Dans les paragraphes suivants, une fois la position du fil fixée, une approximation de la masse de Dirac sera choisie et la valeur de l'inductance sera prise égale à L_{opt}.

Regardons maintenant comment varient les résultats précédemment obtenus lorsque la position du disque est changée.

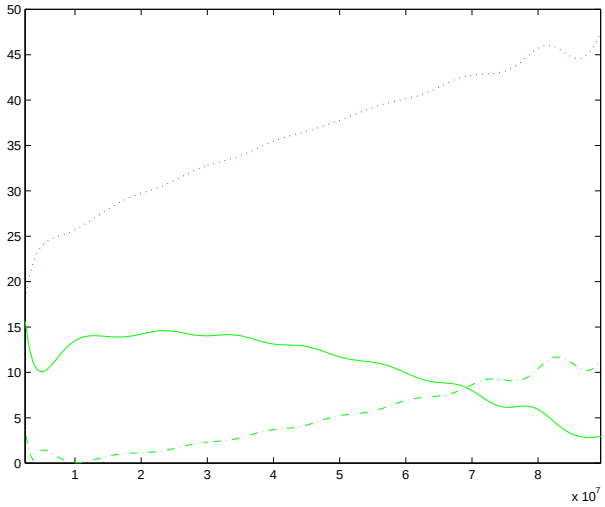


FIG. 17 – *Erreur relative en pourcentage sur la transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence (...:Holl,-:Fict,–:$Fict_{corr}$)*

6.5 Influence de la position du fil

6.5.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille

Nous avons considéré un disque de rayon noté a tel que $a = h/10$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\dfrac{h}{10}$. Le choix du pas de temps Δt est identique aux cas précédents. Le disque est maintenant positionné au milieu d'une maille. Seuls quatre coefficients $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}{}_{l,k}$ sont non nuls et valent 0.25.

Le tableau suivant résume les valeurs des inductances choisies.

	Modèles			
	$Holl_1$	$Holl_2$	$Fict_1$	$Fict_{corr,1}$
L_ϵ	0.2906	0.1548	0.132	0.3140 $= L_{opt}$
L_{opt}	0.3140	0.3140	0.314	0.3140
erreur relative moyenne	3%	28%	45%	1%

(256)

Les courbes 18 et 19 donnent les valeurs des transformées de courant et des erreurs relatives pour les trois modèles $Fict_1$, $Fict_2$ et $Holl_1$. Les mêmes conclusions que précédemment restent valables. Regardons comment évoluent ces résultats si on augmente le rayon du disque.

6.5.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille

Nous avons considéré un disque de rayon noté a tel que $a = h/2$. Le rayon de la couronne R est pris égal à $\dfrac{3h}{4}$. Le choix du pas de temps Δt est identique au cas précédents. Le disque

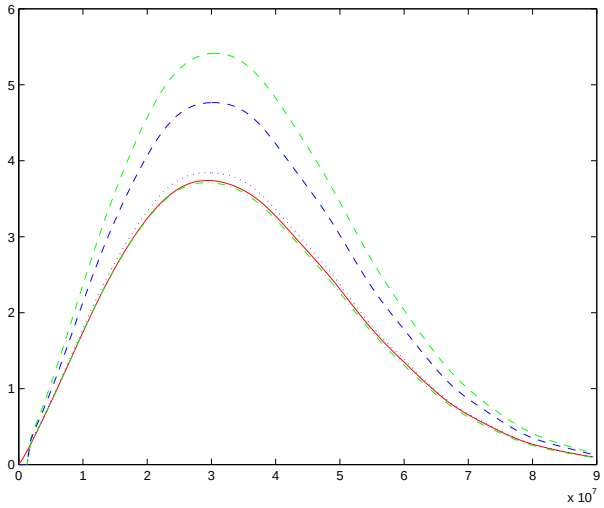


FIG. 18 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: statique ,- -:$Holl_2$,...:$Holl_1$,-.:$Fict_{1,corr}$, - -:$Fict_1$)*

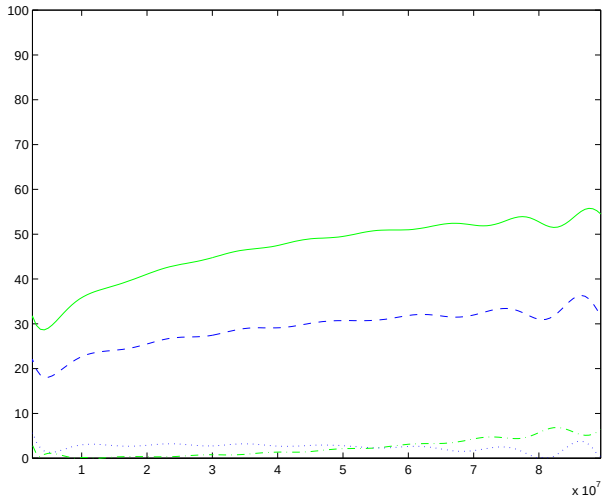


FIG. 19 – *Erreur relative en pourcentage sur la transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence pour les différents modèles (...: $Holl_1$, - -:$Holl_2$, -: $Fict_1$; -.:$Fict_{1,corr}$)*

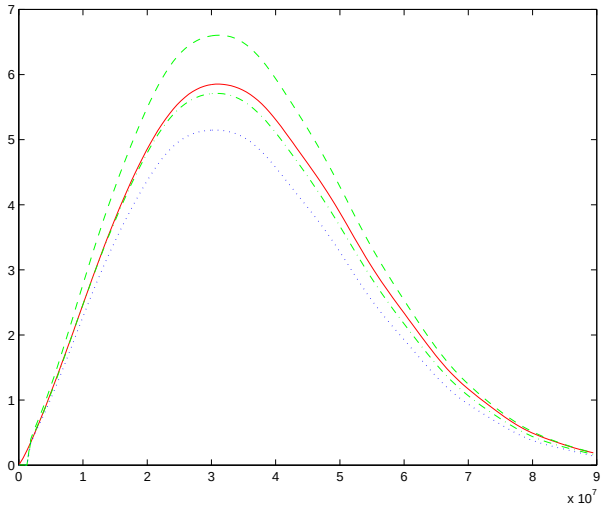


FIG. 20 – *Module de la transformée de Fourier de la dérivée du courant en fonction de la fréquence pour les différents modèles (-: statique ,...:$Holl_1$,-.:$Fict_{1,corr}$, - -:$Fict_1$)*

est maintenant positionné à $(h/4, h/4)$ d'un noeud du maillage. Seuls neuf coefficients de $\mathbf{B}^{\epsilon,\mathbf{h}}$ sont non nuls.

Le tableau suivant résume les valeurs des inductances choisies.

	Modèles			
	$Holl_1$	$Holl_2$	$Fict_1$	$Fict_{1,corr}$
L_ϵ	0.0675	-0.04130	0.00656	0.0794 $= L_{opt}$
L_{opt}	0.3140	0.3140	0.314	0.3140
erreur relative moyenne	12%	-	12%	3%

(257)

Les courbes 20 et 21 donnent les valeurs des transformées de courant et des erreurs relatives pour les trois modèles $Fict_1$, $Fict_2$ et $Holl_1$. Less conclusions sont une fois de plus les mêmes.

Nous allons regarder dans le paragraphe suivant comment ces conclusions sont modifiées si le support de $\delta_\epsilon(r)$ est modifié.

6.6 Influence de l'étalement de la fonction δ_ϵ

Nous avons considéré de nouveau le cas du disque de rayon faible (cf paragraphe 1.1.1). a est pris égal à $h/10$. On fait varier le rayon de la couronne R. On va imposer la relation $L_\epsilon = L_{opt}$ pour tous les cas.

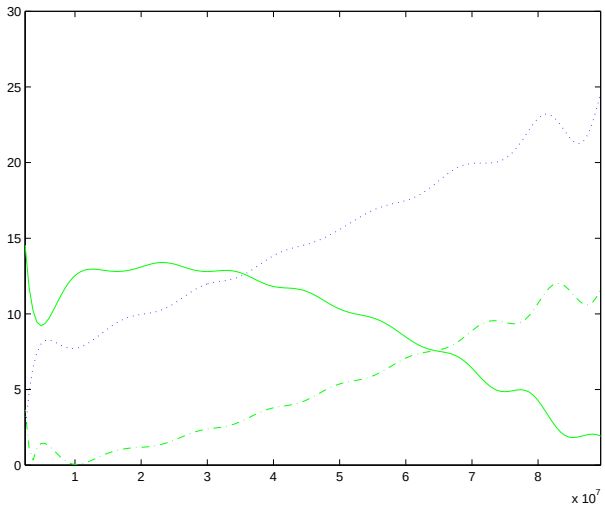


FIG. 21 – *Erreur relative en pourcentage sur la transformée de Fourier du courant en module en fonction de la fréquence pour les différents modèles (...: $Holl_1$, -: $Fict_1$; -.:$Fict_{1,corr}$)*

	Modèles			
R/h	1/10	2/10	1/2	1
L_{opt}	0.1680	0.1873	0.2469	0.3221
erreur relative moyenne	1.4%	1.4%	1.32	1.31

(258)

Les erreurs relatives sont du même ordre de grandeur. On note seulement qu'elles sont légèrement plus importantes dans le cas où la fonction δ_ϵ est peu étalée.

On observe les résultats lorsque le rayon du disque est plus important.

6.7 Conclusions pour le cas bi-dimensionnel

En conclusion: Les schémas construits à l'aide du modèles de Holland se sont avérés ne pas être toujours stables. Il est de toute façon nécessaire de choisir un pas de temps plus petit que celui déterminé à partir de la condition de CFL. Et même lorsque le pas en temps est très faible, il se peut qu'il n'y ait pas convergence des résultats en particulier lorsque le rayon du fil est important. Les erreurs relatives induites par ces modèles sont toujours assez élevées et sont de l'ordre de 20%. Elles sont toujours supérieures à celles obtenues dans le cadre des modèles *Fict*.

En revanche, les modèles *Fict* ont permis de garderle pas en temps déduit de la condition de CLF usuelle . Dès que cette condition est remplie et que l'inductance est positive, les résultats numériques obtenus pour les modèles sont toujours stables quelle que soit la taille du fil. Ils entraînent des erreurs relatives de l'ordre de 10% lorsque la valeur de l'inductance est différente de la valeur L_{opt}. Ces erreurs augmentent avec la fréquence de manière linéaire. Dans le cas où la valeur L_{opt} est retenue pour l'inductance, les erreurs relatives chutent et

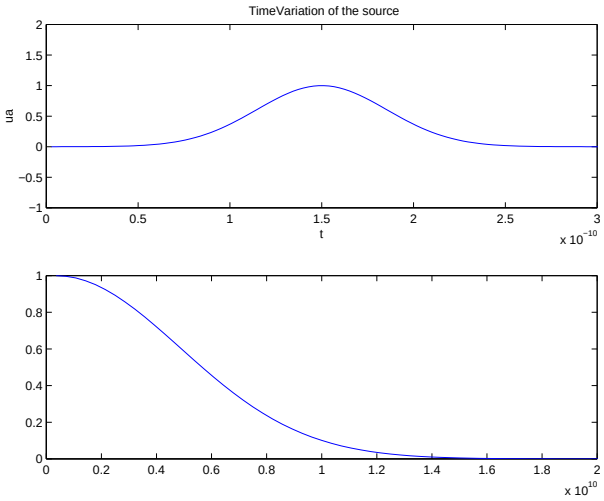


FIG. 22 – *fonction $g(t)$ et sa transformée de Fourier*

sont de l'ordre de 1%. Ces conclusions sont valables quelque soit la taille du fil et quelque soit la position du fil. Nous allons voir maintenant comment ces conclusions varient dans le cadre d'un problème en dimension trois.

6.8 Deux résultats numériques dans le cas tridimensionnel

Nous allons maintenant nous placer dans le cas tridimensionnel et étudier la diffraction d'une onde électromagnétique par un fil. Le fil est supposé parallèle à un des axes soit l'axe oy. Sa longueur est notée b et son rayon a. Ce fil est éclairé par une onde plane dont la dépendance en temps $g(t)$ est donnée par

$$g(t) = \exp\left(-\left(2F_p t - 3\right)^2\right) \tag{259}$$

Dans tous les résultats numériques montrés, F_p est prise égale à $10Ghz$. Cette fonction est représentée par la figure (22). La longueur d'onde la plus petite contenue dans le signal $g(t)$ est de l'ordre de $\lambda_{min} = 2cm$. Le pas en espace h est choisi tel que $h = \lambda_{min}/12$. Le pas de temps est choisi égal à $\Delta t = \frac{h}{c_o\sqrt{3}}$. Pour borner le domaine de calcul, des couches absorbantes de type Bérenger ont été implémentées.

Une fois l'approximation de la masse de Dirac choisie et la position du fil fixée, on impose la condition $L_\epsilon = L_{opt}$

Deux cas ont été analysés suivant la taille du rayon du fil

6.8.1 Cas d'un rayon de fil de l'ordre du pas de grille

Le rayon du fil est fixé égal à $a = 2h/3 = 1mm$. Sa longueur est de $5cm$. Le fil est positionné sur un axe du maillage. La figure 23 donne les valeurs du courant en fonction du temps pour deux degrés de liberté. La transformée de Fourier de ces courants en module est décrite par la figure 24. Les pics trouvés sur cette figure sont directement liés aux fréquences de résonance du fil. La Surface Equivalente Radar rétrodiffusée (cf figure 25) est ensuite déduite. Elle est comparée à une solution dite de référence. Cette solution est calculée à l'aide

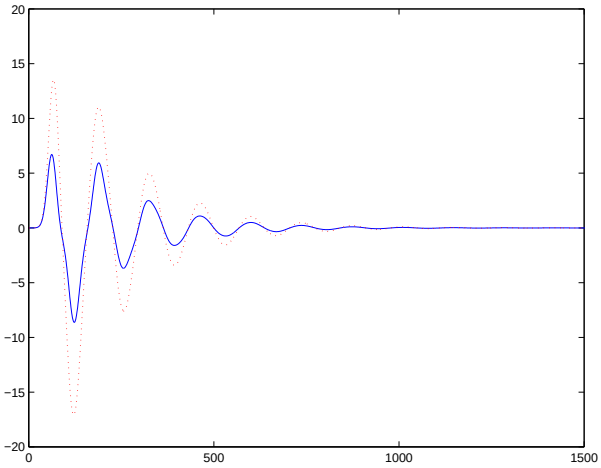


FIG. 23 – *Courant en fonction du temps pour deux degrés de liberté*

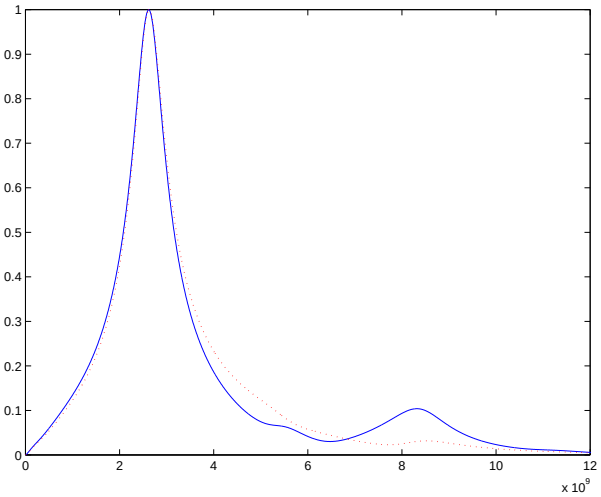


FIG. 24 – *Transformée de Fourier du courant en fonction de la fréquence*

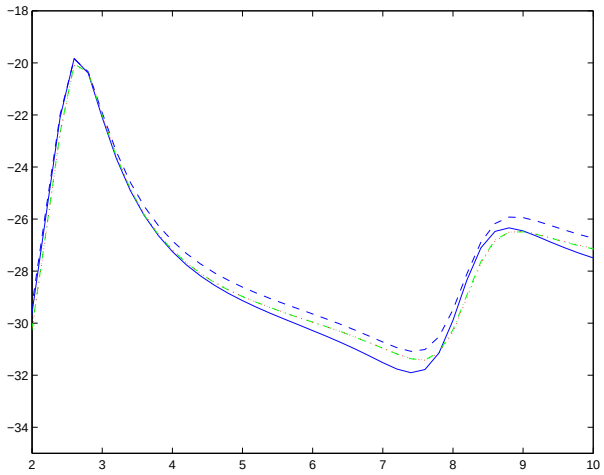


FIG. 25 – *SER rétrodiffusée en fonction de la fréquence (-:référence ,–: équations intégarles avec approximations filaires, ...: modéle avec fil positionné sur un axe du maillage ,...: modèle avec fil centré sur une maille)*

d'un code d'équations intégrales en discrétisant toute la surface du fil, [2]. On note une erreur relative moyenne de l'ordre de 6%. Nos résultats ont aussi été comparés à ceux obtenus avec un code d'équations intégrales mais utilisant une approximation filaire basée sur l'équation de Pocklington, [1]. On note une erreur relative dans ce cas-ci avec la référence de l'ordre de 6%. En conclusion, la précision des calculs avec le modèle que nous venons de construire est du même ordre de grandeur que si l'on utilise un code d'équations intégrales avec approximation filaire.

Nous avons fait varier la position du fil. On observe les mêmes résultats (cf figure 25. Nous allons faire varier le rayon du fil dans le paragraphe suivant.

6.8.2 Cas d'un rayon de fil petit devant le pas de grille

Le rayon du fil est fixé égal à $a = 2h/30 = 0.1mm$. Sa longueur est de $5cm$. Les figures (26 et 27) donne les valeurs du courant en fonction du temps pour deux degrés de liberté ainsi que la transformée de Fourier de ces courants. La SER rétrodiffusée (cf figure 28) a été aussi obtenue et est simplement comparée à la solution obtenue par un code d'équations intégrales utilisant l'approximation filaire. Comme dans le cas précédent, on trouve une erreur relative de l'ordre de 8% quelque soit la position du fil.

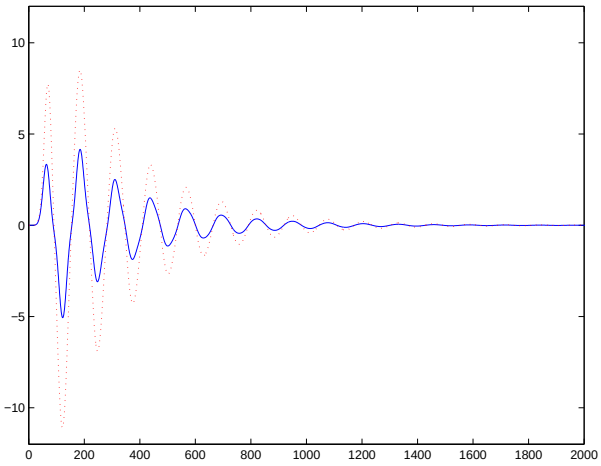


FIG. 26 – *Courant en fonction du temps pour deux degrés de liberté*

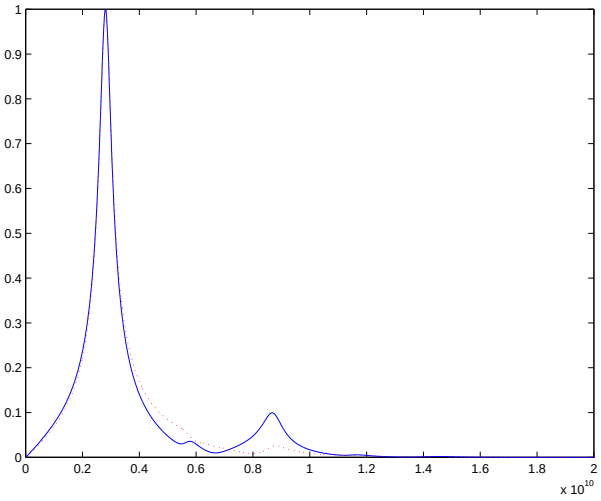


FIG. 27 – *Transformée de Fourier du courant en fonction de la fréquence*

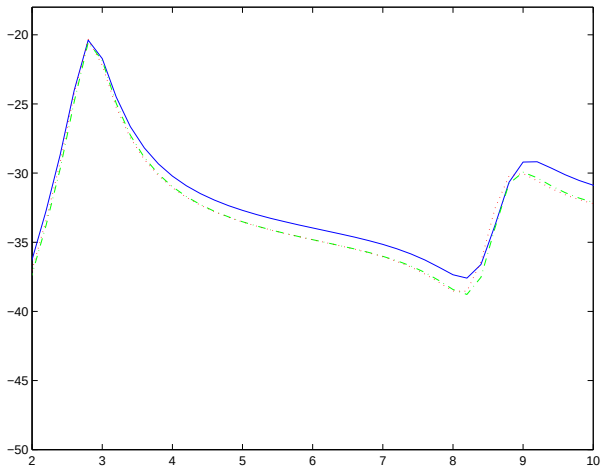


FIG. 28 – *SER rétrodiffusée en fonction de la fréquence (-: équations intégrales et approximations filaires, ...: modèle exposé où le fil est positionné sur un axe du maillage ,.-: même chose que précédemment mais le fil est positionné en dehors de tout axe du maillage)*

Références

[1] A.Mazari. *Détermination par une méthode d' équations intégrales du champ électromagn'etique par une structure filiforme* . PhD thesis, Universitée de Paris 6, 1991.

[2] A. Bendali, M.B Fares, and J. Gay. Finite element solution to impedance boundary integral equation in electromagnetic scattering. *IEEE antennas and propagation*, Accepted for publication, 1998.

[3] A. Bossavit. Simplicial finite elements for scattering problems in electromagnetism. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 76:299–316, 1989.

[4] F. Collino, S. Garcés, and P. Joly. A Fictitious Domain Method for Conformal Modeling of the Perfect Electric Conductors in the FDTD Method . *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1998.

[5] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques: Volume 8, évolution; semi-groupe variationnel.* Masson, 1988.

[6] D.Colton and R.Kress. *Inverse Acoustic and electromagnetic scattering theory.* Applied Methematical Sciences 93. Springer-Verlag, 1992.

[7] F.Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, 138(2):907–938, Dec. 1997.

[8] H. Holland and L. Simpson. Finite-difference analysis of EMP coupling tothin struts and wires . *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, EMC-23(2):88–97, May 1981.

[9] H.C. Hsio and R.E. Kleinman. Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics . *IEEE Antenna and Propagation*, 45(3):316–328, 1997.

[10] N.N. Lebedev. *Special functions and their applications.* Dover Publications, inc, 1972.

[11] J.C. Nedelec. Mixed finite elements in r^3. *Num. Math.*, 35:315–341, 1980.

[12] J.C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in r^3. *Num. Math.*, 50:57–81, 1986.

[13] S. Rodts and E.Duceau. Stabilité du schéma de holland pour la simulation de fils minces par différences finies dans le domaine temporel. In *Numélec: second Conférence européenne sur les méthodes numériques en électromagnétisme. École centrale Lyon*, pages 226–227, 1997.

[14] A. Taflove. *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method.* Artech House, 1995.

[15] Z.X. Wang and D.R. Guo. *Special functions.* World-Scientific, 19??

[16] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media . *IEEE Antenna and Propagation*, AP14:302–307, 1966.

7 Appendice

7.1 Expression des coefficients

Soit $G^h_{p,q}$ la fonction de Green "sortante" de l'équation d'Helmholtz discrétisée sur une grille régulière avec un laplacien discret sur cinq points

$$\omega^2 G^h_{p,q} + (\Delta_h G^h)_{p,q} = \frac{1}{h^2}\,\delta^0_p\,\delta^0_q \tag{260}$$

avec

$$(\Delta_h G^h)_{p,q} = \frac{1}{h^2}\left(G^h_{p-1,q} + G^h_{p,q-1} + G^h_{p+1,q} + G^h_{p,q+1} - 4G^h_{p,q} \right) \tag{261}$$

alors on a

$$(G^h)_{p,q} = -\frac{i}{4} H^{(1)}_0(\xi_{p,q}\omega h) + O(\omega^2 h^2 \log(\omega h)), \tag{262}$$

où le grand O est uniforme sur tout ensemble de couples (p,q) bornés avec

$$\xi_{p,q} = e^{C_{p,q}}. \tag{263}$$

L'objet de cet appendice est de donner les valeurs de $C_{p,q}$ telles que décrites dans la section 5.2. On rappelle que l'on a $C_{p,q} = C_{\pm p,\pm q}$.

Le programme MAPLE

```
m:= 12 ;
p := 0;
for n from 0 by 1 to m do
g := simplify( expand( (cos(n*u)-1) )/(cos(u)-1) ):
f := subs( cos(u)= x, g ):
s:=int( f/sqrt( (3-x)*(1+x) ),x=-1..1) :
h[n,0] := s - gamma - 3*log(2)/2 :
h[0,n] := h[n,0] :
lprint( `Green`, p,` `,n , ` is : `,h[n,p]); evalf( exp(h[n,p]),20) :
od:
p:=1 ;
for n from 1 by 1 to m-1 do
h[n,1] := 2*h[n,0]-1/2*h[n-1,0] -1/2*h[n+1,0] :
lprint( `Green`, p,` `,n , ` is : `,h[n,p]); evalf(exp(h[n,p]),20) :
od:
for p from 2 by 1 to m do
for n from 1 by 1 to m-p do
h[n,p] := 4*h[n,p-1]-h[n-1,p-1] -h[n+1,p-1] - h[n,p-2] :
lprint( `Green`, p,` `,n , ` is : `,h[n,p]); evalf(exp(h[n,p]),20) :
od: od:
```

permet d'obtenir les valeurs

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= -\gamma - \frac{3}{2}\log 2 \\ C_{1,0} &= C_{0,0} + 1/2\,\pi \\ C_{2,0} &= C_{0,0} - 4 + 2\,\pi \end{aligned} \tag{264}$$

$$
\begin{aligned}
C_{3,0} &= C_{0,0} - 24 + 17/2\,\pi \\
C_{4,0} &= C_{0,0} - \frac{368}{3} + 40\,\pi \\
C_{5,0} &= C_{0,0} - \frac{1880}{3} + \frac{401}{2}\,\pi \\
C_{6,0} &= C_{0,0} - \frac{49052}{15} + 1042\,\pi \\
C_{7,0} &= C_{0,0} - \frac{260848}{15} + \frac{11073}{2}\,\pi \\
C_{8,0} &= C_{0,0} - \frac{9848128}{105} + 29856\,\pi \\
C_{9,0} &= C_{0,0} - \frac{3578384}{7} + \frac{325441}{2}\,\pi \\
C_{10,0} &= C_{0,0} - \frac{884704652}{315} + 894002\,\pi \\
C_{11,0} &= C_{0,0} - \frac{4891331192}{315} + \frac{9885457}{2}\,\pi \\
C_{12,0} &= C_{0,0} - \frac{298985342672}{3465} + 27466088\,\pi
\end{aligned}
\tag{265}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,1} &= C_{0,0} + 2 \\
C_{2,1} &= C_{0,0} + 4 - 1/2\,\pi \\
C_{3,1} &= C_{0,0} + \frac{46}{3} - 4\,\pi \\
C_{4,1} &= C_{0,0} + 80 - \frac{49}{2}\,\pi \\
C_{5,1} &= C_{0,0} + \frac{6646}{15} - 140\,\pi \\
C_{6,1} &= C_{0,0} + 2468 - \frac{1569}{2}\,\pi \\
C_{7,1} &= C_{0,0} + \frac{1443874}{105} - 4376\,\pi \\
C_{8,1} &= C_{0,0} + \frac{383552}{5} - \frac{48833}{2}\,\pi \\
C_{9,1} &= C_{0,0} + \frac{135069958}{315} - 136488\,\pi
\end{aligned}
\tag{266}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,2} &= C_{0,0} + 4 - 1/2\,\pi \\
C_{2,2} &= C_{0,0} + 8/3 \\
C_{3,2} &= C_{0,0} + 4/3 + 1/2\,\pi \\
C_{4,2} &= C_{0,0} - \frac{236}{15} + 6\,\pi \\
C_{5,2} &= C_{0,0} - \frac{2236}{15} + \frac{97}{2}\,\pi \\
C_{6,2} &= C_{0,0} - \frac{36824}{35} + 336\,\pi \\
C_{7,2} &= C_{0,0} - \frac{142460}{21} + \frac{4321}{2}\,\pi \\
C_{8,2} &= C_{0,0} - \frac{13202092}{315} + 13342\,\pi \\
C_{9,2} &= C_{0,0} - \frac{11375228}{45} + \frac{160929}{2}\,\pi \\
C_{10,2} &= C_{0,0} - \frac{5205402056}{3465} + 478192\,\pi
\end{aligned}
\tag{267}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,3} &= C_{0,0} + \frac{46}{3} - 4\,\pi \\
C_{2,3} &= C_{0,0} + 4/3 + 1/2\,\pi \\
C_{3,3} &= C_{0,0} + \frac{46}{15} \\
C_{4,3} &= C_{0,0} + \frac{24}{5} - 1/2\,\pi \\
C_{5,3} &= C_{0,0} + \frac{998}{35} - 8\,\pi \\
C_{6,3} &= C_{0,0} + \frac{26924}{105} - \frac{161}{2}\,\pi \\
C_{7,3} &= C_{0,0} + \frac{654286}{315} - 660\,\pi \\
C_{8,3} &= C_{0,0} + \frac{4791352}{1365} - \frac{9681}{2}\,\pi
\end{aligned}
\tag{268}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,4} &= C_{0,0} + 80 - \frac{49}{2}\,\pi \\
C_{2,4} &= C_{0,0} - \frac{236}{15} + 6\,\pi \\
C_{3,4} &= C_{0,0} + \frac{24}{5} - 1/2\,\pi \\
C_{4,4} &= C_{0,0} + \frac{352}{105} \\
C_{5,4} &= C_{0,0} + \frac{40}{21} + 1/2\,\pi \\
C_{6,4} &= C_{0,0} - \frac{1252}{45} + 10\,\pi \\
C_{7,4} &= C_{0,0} - \frac{2624}{7} + \frac{241}{2}\,\pi \\
C_{8,4} &= C_{0,0} - \frac{1777136}{495} + 1144\,\pi
\end{aligned}
\tag{269}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,5} &= C_{0,0} + \frac{6646}{15} - 140\,\pi \\
C_{2,5} &= C_{0,0} - \frac{2236}{15} + \frac{97}{2}\,\pi \\
C_{3,5} &= C_{0,0} + \frac{998}{35} - 8\,\pi \\
C_{4,5} &= C_{0,0} + \frac{40}{21} + 1/2\,\pi \\
C_{5,5} &= C_{0,0} + \frac{1126}{315} \\
C_{6,5} &= C_{0,0} + \frac{236}{45} - 1/2\,\pi \\
C_{7,5} &= C_{0,0} + \frac{28738}{693} - 12\,\pi
\end{aligned}
\tag{270}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,6} &= C_{0,0} + 2468 - \frac{1569}{2}\,\pi \\
C_{2,6} &= C_{0,0} - \frac{36824}{35} + 336\,\pi \\
C_{3,6} &= C_{0,0} + \frac{26924}{105} - \frac{161}{2}\,\pi \\
C_{4,6} &= C_{0,0} - \frac{1252}{45} + 10\,\pi \\
C_{5,6} &= C_{0,0} + \frac{236}{45} - 1/2\,\pi \\
C_{6,6} &= C_{0,0} + \frac{13016}{3465}
\end{aligned}
\tag{271}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,7} &= C_{0,0} + \frac{1443874}{105} - 4376\,\pi \\
C_{2,7} &= C_{0,0} - \frac{142460}{21} + \frac{4321}{2}\,\pi \\
C_{3,7} &= C_{0,0} + \frac{654286}{315} - 660\,\pi \\
C_{4,7} &= C_{0,0} - \frac{2624}{7} + \frac{241}{2}\,\pi \\
C_{5,7} &= C_{0,0} + \frac{28738}{693} - 12\,\pi
\end{aligned}
\tag{272}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,8} &= C_{0,0} + \frac{383552}{5} - \frac{48833}{2}\,\pi \\
C_{2,8} &= C_{0,0} - \frac{13202092}{315} + 13342\,\pi \\
C_{3,8} &= C_{0,0} + \frac{4791352}{315} - \frac{9681}{2}\,\pi \\
C_{4,8} &= C_{0,0} - \frac{1777136}{495} + 1144\,\pi
\end{aligned}
\tag{273}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,9} &= C_{0,0} + \frac{135069958}{315} - 136488\,\pi \\
C_{2,9} &= C_{0,0} - \frac{11375228}{45} + \frac{160929}{2}\,\pi \\
C_{3,9} &= C_{0,0} + \frac{361285306}{3465} - 33188\,\pi
\end{aligned}
\tag{274}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,10} &= C_{0,0} + \frac{84085548}{35} - \frac{1529441}{2}\,\pi \\
C_{2,10} &= C_{0,0} - \frac{5205402056}{3465} + 478192\,\pi
\end{aligned}
\tag{275}
$$

$$
C_{1,11} = C_{0,0} + \frac{6678465814}{495} - 4294588\,\pi \tag{276}
$$

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Formulations pour la diffraction d'une onde par un cylindre **4**
2.1 Position du problème - Première formulation 4
2.2 Méthode des domaines fictifs. Deuxième formulation 5
2.3 Formulation avec charge et courant 7
2.4 Résolution dans un cas particulier 7

3 Modèle approché pour la structure filaire **9**
3.1 Construction du modèle. Approximation quasi-statique 9
3.2 Éléments d'analyse du modèle approché 11

4 Discrétisations du modèle filaire **12**
4.1 Formulation variationnelle 13
4.2 Discrétisation en espace 13
4.3 Première discrétisation en temps. Lien avec le modèle de Holland 18
4.3.1 Description du schéma 18
4.3.2 Où l'on retrouve (presque) le schéma de Holland 19
4.4 Seconde discrétisation en temps 21
4.4.1 Description du schéma 21
4.4.2 Algorithme de résolution 22
4.4.3 Stabilité 23
4.5 Questions relatives aux choix de l'inductance linéique 27

5 Le problème bidimensionnel et ses conséquences sur le choix de l'inductance artificielle **29**
5.1 Le problème bidimensionnel 29
5.1.1 Construction du modèle approché 30
5.1.2 Deux discrétisations du modèle approché 32
5.1.3 Résolution du problème approché et calcul de l'inductance artificielle optimale 36
5.2 Analyse de la fonction de Green discrète au voisinage du point source 39
5.2.1 Calcul par transformation de Fourier 39
5.2.2 Passage à la limite par absorption limite 41
5.2.3 Comportement pour h petit 42

6 Expériences numériques **46**
6.1 Questions relatives à l'inductance 47
6.1.1 Comparaison du L^ϵ avec l'inductance optimale 47
6.1.2 Comparaison des inductances de Holland et de l'inductance optimale . 50
6.2 Conditions expérimentales dans le cas bidimensionnel 52
6.2.1 Calcul de la matrice de couplage champ électrique courant 52
6.3 Influence de la grosseur du fil à inductance et position du fil fixés 53
6.3.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille 53
6.3.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille 57
6.4 Influence de l'inductance 59

6.4.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille 59
6.4.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille 61
6.5 Influence de la position du fil 62
6.5.1 Cas du rayon de fil petit devant le pas de grille 62
6.5.2 Cas du rayon de fil de l'ordre du pas de grille 62
6.6 Influence de l'étalement de la fonction δ_ϵ 64
6.7 Conclusions pour le cas bi-dimensionnel 65
6.8 Deux résultats numériques dans le cas tridimensionnel 66
6.8.1 Cas d'un rayon de fil de l'ordre du pas de grille 66
6.8.2 Cas d'un rayon de fil petit devant le pas de grille 68

7 Appendice **72**
7.1 Expression des coefficients 72



Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399