Université de Tunis El Manar (Tunisie)
École Nationale d'Ingénieurs de Tunis
École Doctorale de l'École Polytechnique (France)
École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

THÈSE en Cotutelle

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée en vue de l'obtention du

DIPLÔME de DOCTORAT

par

Chokri BEN AMAR

intitulée

Etude théorique et numérique de processus de retournement temporel

Soutenue le 23 Juin 2007 devant le jury composé de :

Mohamed Jaoua	Président
Belhassen Dehman	Rapporteur
Yves Dermenjian	Rapporteur
Chrysoula Tsogka	Rapporteur
Nabil Gmati	Directeur de thèse
Christophe Hazard	Directeur de thèse
Josselin Garnier	Examinateur
Karim Ramdani	Examinateur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Nabil Gmati pour m'avoir encadré durant cette thèse et durant mon stage de DEA. Je tiens à souligner l'intérêt croissant qu'il a apporté à ce travail. Sa très grande disponibilité et ses conseils m'ont permis de mener à bien cette thèse. Il a toujours su m'encourager et me proposer des idées passionnantes et variées. C'est aussi grâce à lui que j'ai pu rencontrer des personnes d'horizons si différents et m'enrichir auprès d'eux. Pour toutes ces raisons, je lui en dit de tout cœur MERCI.

Je tiens à exprimer à la hauteur de l'effort fourni, tous mes remerciements à Christophe Hazard, qui a proposé et coencadré cette thèse. Sa disponibilité, son encouragement, sa confiance et ses conseils m'ont été d'un grand soutien tout au long de ce travail. Il m'a toujours donné de très bonnes idées, et m'a fait partager sa façon de sentir les problèmes et les solutions. Il m'a appris aussi l'exigence et la patience nécessaires au chercheur. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitudes.

Je remercie Mohamed Jaoua de m'avoir acceuilli au sein du LAMSIN, où l'ambiance de travail est très agréable, de m'avoir orienté vers cet axe de recherche qui est l'étude des phénomènes de propagation d'ondes et d'avoir accepté de présider ce jury.

J'exprime mes profonds remerciements à Karim Ramdani pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement afin de finaliser ce travail. Son oeil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je remercie vivement Belhassen Dehman, Yves Dermenjian et Chrysoula Tsogka pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail.

C'est une grande joie pour moi de remercier Josselin Garnier d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier Pierre-Jean Alet et Xavier Epiard qui ont collaboré à ce travail pendant leur stage au Lamsin du 18 avril au 18 juin 2004 dans le cadre de leur Projet Personnel en Laboratoire (PPL) de l'ENSTA.

Que tous les membres du laboratoire LAMSIN qui m'ont apporté une aide scientifique ou morale, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude. Je profite aussi de l'occasion qui m'est offerte pour remercier tous les membres du laboratoire POEMS (anciennement LMA)

de l'ENSTA pour leur acceuil durant les différents séjours que j'ai effectués pendant ma thèse.

Un grand remerciement à Kamel Berriri et Mohamed Kossentini pour m'avoir aidé à trouver un logement à Paris durant mes stages à l'ENSTA ainsi qu'à tous mes collègues de l'ISI pour m'avoir remplacé.

Enfin, je termine par dédier ce mémoire à tous ceux qui m'aiment ...

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Motivation 11

1.2 Contexte général du retournement temporel 12

1.2.1 Principe du retournement temporel 12

1.2.2 Application du retournement temporel à la focalisation sur les obstacles 17

1.2.3 Notre contexte 19

1.3 Contenu de la thèse 20

I Retournement temporel en régime harmonique **23**

2 Modélisation de Miroirs à Retournement Temporel **25**

2.1 Modélisation mathématique de MRT non intrusifs 26

2.1.1 Premier modèle : mesure de la pression 26

2.1.2 Second modèle : mesure de la vitesse 28

2.1.3 Troisième modèle : mesure de la pression et de la vitesse 29

2.2 Modélisation mathématique de MRT intrusifs 30

2.2.1 Introduction 33

2.2.2 A model of non penetrable intrusive mirror 35

2.2.3 Proof of Theorem 1 36
2.2.4 An approximate model 40
2.2.5 Two-dimensional numerical simulation 43

3 Retournement temporel dans un guide d'onde 51

3.1 Diffraction dans un guide 52
3.1.1 Présentation du problème 52
3.1.2 Condition de rayonnement 53
3.1.3 Problème réduit au domaine borné 55
3.1.4 Résultat d'existence et d'unicité 56
3.2 Fonction de Green et représentation intégrale dans le guide 61
3.2.1 Fonction de Green du guide 61
3.2.2 Principe de réciprocité 62
3.2.3 Formule de représentation intégrale 62
3.3 Etude du processus de retournement temporel 63

4 Résultats numériques 65

4.1 Construction de la matrice de retournement temporel 65
4.1.1 Méthode de couplage 66
4.1.2 Discrétisation du problème (4.4) 67
4.1.3 Matrice de retournement temporel 70
4.2 Résultats numériques 70
4.2.1 Disques disposés selon une horizontale 70
4.2.2 Disques disposés selon une verticale 75
4.2.3 Cas d'obstacles de grande taille 76

II Retournement temporel en régime transitoire **89**

Introduction au régime transitoire **91**

5 Etude du modèle "Champ lointain" en régime transitoire **93**

5.1 Propagation d'ondes dans l'espace libre 93

5.1.1 Formulation mathématique 94

5.1.2 Formulation condensée 95

5.1.3 Représentation spectrale de l'opérateur $\mathbb{A}$ 97

5.1.4 Développement en fonctions propres généralisées 98

5.1.5 Comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ 100

5.1.6 Comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $t \to \pm\infty$ 103

5.2 Propagation d'ondes dans l'espace perturbé (en présence d'obstacles) 104

5.2.1 Opérateurs d'ondes et opérateur de diffusion 105

5.3 Processus de retournement temporel 109

5.3.1 Modèle "Champ lointain" en transitoire 109

5.3.2 Modèle "Champ lointain" en harmonique 110

5.3.3 Lien entre le régime transitoire et le régime harmonique 113

6 Optimisation de l'énergie diffractée **115**

6.1 Motivation 115

6.2 Formulation du problème 116

6.3 Algorithme pour produire le champ optimal 116

6.3.1 Algorithme 116

6.3.2 Convergence de l'algorithme 117

Conclusion et perspectives **127**

A Calcul de la fonction de Green du guide **129**

A.1 Décomposition modale de la fonction de Green 130

A.2 Extraction de la singularité et amélioration de la convergence 130

A.2.1 Calcul des dérivées partielles de la fonction de Green 132

Bibliographie **133**

Table des figures

1.1 Focalisation par retournement temporel. 13

1.2 Cavité ouverte d'ouverture Γ. 15

1.3 Retournement temporel dans un guide d'ondes. 16

1.4 Cycle du processus de retournement temporel. 18

2.1 Bounded domain Ω' 44

2.2 Geometry of the problem 45

2.3 Emission of the first eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$). . . 47

2.4 Emission of the second eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$). . 47

2.5 Emission of the third eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$). . 47

2.6 Emission of the first eigenvector for $k = 0.325$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$). . 48

2.7 Emission of the second eigenvector for $k = 0.325$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$). 48

2.8 Emission of the first eigenvector for $k = 0.875$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$) . . 48

2.9 Emission of the second eigenvector for $k = 0.875$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$) 48

2.10 First model : 4 largest eigenvalues of T according to k. 49

2.11 Second model : 4 largest eigenvalues of T according to k. 49

2.12 The first two eigenvalues for the 2 models. 49

2.13 Analysis of the interactions between obstacles. 49

3.1 Guide d'ondes infini. 52

3.2 Solutions de $\lambda(k) = k^2$. 61

4.1 Maillage du domaine de calcul et du domaine d'observation. 71

4.2 4 premières valeurs propres de T en fonction de k (disques disposés selon une horizontale dans l'espace libre). 72

4.3 4 premières valeurs propres de T en fonction de k (disques disposés selon une horizontale dans le guide). 72

4.4 Valeurs propres en fonction de k dans la plage 28.45-31.35. (disques disposés selon une horizontale dans le guide) 75

4.5 Gain associé à la première valeur propre. (disques disposés selon une horizontale) 75

4.6 Gain associé à la deuxième valeur propre. (disques disposés selon une horizontale) 75

4.7 Les valeurs propres de T en fonction de k. (2 demi-disques dans le guide) . . 77

4.8 Les valeurs propres de T en fonction de k. (un seul demi-disque dans le guide. P (resp. G) : uniquement le petit (resp. gros) obstacle est présent dans le guide.) 77

4.9 Première valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide). 78

4.10 Deuxième valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide). 78

4.11 Troisième valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide). 78

4.12 Gain apporté par l'augmentation de transducteurs (disques disposés selon une horizontale dans le guide). 78

4.13 4 premières valeurs propres de T en fonction de k. (disques disposés selon une verticale dans l'espace libre) 78

4.14 4 premières valeurs propres de T en fonction de k. (disques disposés selon une verticale dans le guide) 78

4.15 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (espace libre) 79

4.16 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (espace libre) 79

4.17 Emission du premier vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 79

4.18 Emission du second vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 79

4.19 Emission du premier vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes) 79

4.20 Emission du second vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes) 79

4.21 Emission du troisième vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes) 79

4.22 Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes) . . . 79

4.23 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 80

4.24 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 80

4.25 Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 80

4.26 Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 80

4.27 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 80

4.28 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 80

4.29 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 80

4.30 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 80

4.31 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (espace libre) 81

4.32 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (espace libre) 81

4.33 Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (espace libre) 81

4.34 Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 81

4.35 Emission du second vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 81

4.36 Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 81

4.37 Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes) 81

4.38 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 0.35$. (guide d'ondes) 82

4.39 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 0.35$. (guide d'ondes) 82

4.40 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 82

4.41 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 82

4.42 Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 82

4.43 Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 82

4.44 Champ total associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes) 82

4.45 Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 83

4.46 Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 83

4.47 Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 83

4.48 Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 83

4.49 Champ incident associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 83

4.50 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 84

4.51 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 84

4.52 Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 84

4.53 Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 84

4.54 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 84

4.55 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 84

4.56 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 84

4.57 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 84

4.58 Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 85

4.59 Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 85

4.60 Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 85

4.61 Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes) 85

4.62 Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 85

4.63 Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide) 85

4.64 Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 85

4.65 Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide) 85

4.66 Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 86

4.67 Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 86

4.68 Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 86

4.69 Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 86

4.70 Champ total associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 86

4.71 Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 87

4.72 Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 87

4.73 Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 87

4.74 Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 87

4.75 Champ incident associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes) 87

5.1 Opérateurs d'ondes et opérateur de diffusion. 108

6.1 Cas particulier 118

6.2 Cas général 123

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

La possibilité de focaliser l'énergie acoustique ou électromagnétique à la fois spatialement et temporellement constitue depuis quelques années un sujet de recherche intéressant en raison de la diversité et de l'importance des applications.

Dans le domaine des télécommunications, en particulier en acoustique sous-marine, en téléphonie mobile et dans le domaine des réseaux locaux sans fil, l'un des enjeux majeurs consiste à trouver des techniques sécurisées pour acheminer la plus grande quantité d'information possible entre un émetteur et différents utilisateurs via l'utilisation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques. Ces ondes sont susceptibles d'être réfléchies plusieurs fois entre l'émetteur et le récepteur compte tenu de la multitude des obstacles rencontrés au cours de la propagation dans les milieux concernés. Ces obstacles pouvant être les parois des immeubles, les voitures ou les meubles dans le cas de téléphonie mobile ou bien les interfaces entre l'eau et l'air ou entre l'eau et le fond marin dans le cas de l'acoustique sous-marine. L'une des questions que se posent les chercheurs dans ce domaine, est de déterminer sous quelles conditions cette diffusion multiple peut influer positivement sur la concentration d'énergie au niveau du récepteur. D'autres applications concernent le domaine de l'imagerie et de la thérapie médicale. Il s'agit par exemple de visualiser certains organes ou tissus du corps humain au moyen d'ondes ultrasonores (fréquence allant de 1 MHz à 10 MHz). On cherche également à détecter, localiser et détruire les calculs rénaux et les tumeurs du sein ou du cerveau par concentration des ondes ultrasonores d'une façon non invasive. Le champ d'applications s'étend au contrôle non destructif des matériaux, où on s'intéresse à l'observation des irrégularités dans les métaux ou encore à la géophysique pour la recherche pétrolière.

Nous nous proposons dans cette thèse de donner différents modèles de retournement temporel et d'étudier et de simuler leurs propriétés de focalisation. Après avoir dans un premier

temps expliqué le principe général du retournement temporel et différentes approches de cette technique, nous décrivons plus précisément le contexte particulier de notre étude.

1.2 Contexte général du retournement temporel

1.2.1 Principe du retournement temporel

Dans un milieu de propagation hétérogène et *non dissipatif* défini par sa compressibilité $\kappa(x)$ et par sa densité $\rho(x)$, la vitesse du son est donnée par la formule $c(x)=\sqrt{\rho(x)\kappa(x)}$ et le champ de pression acoustique $\varphi(x,t)$ vérifie l'équation des ondes [64] :

$$\nabla.(\frac{\nabla\varphi(x,t)}{\rho(x)}) - \frac{1}{\rho(x)c^2(x)}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = S(x,t) \tag{1.1}$$

où $S(x,t)$ désigne le terme source supposé à support compact.

En l'absence de source ($S(x,t)=0$), si $\varphi(x,t)$ est solution de (1.1), alors $\varphi(x,-t)$ est aussi solution : on dit que l'équation des ondes (1.1) est invariante par renversement du temps. En présence de source, $\varphi(x,-t)$ est solution de la même équation, mais avec un second membre égal à $S(x,-t)$, autrement dit, en retournant temporellement la source.

Dans le cas d'un milieu dissipatif, la présence dans l'équation de propagation des ondes de dérivée temporelle du premier ordre ($\partial\varphi/\partial t$) brise l'invariance par retournement temporel.

Le principe du retournement temporel est d'exploiter cette invariance pour focaliser spatialement et temporellement une onde acoustique. Ce principe est connu depuis longtemps mais les applications ne pouvaient être réalisées qu'après la découverte de transducteurs piézo-électriques[1] fonctionnant en temps réel. Nous allons décrire une expérience faite au Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA) de l'ESPCI en France [33]. Dans une première phase, une source acoustique ponctuelle émet une impulsion brève qu'on souhaite reconstituer. L'onde se propage dans le milieu hétérogène et non dissipatif et finit par traverser un réseau de transducteurs piézo-électriques connectés chacun à une mémoire pour enregistrer le signal reçu. Cette étape dure longtemps à cause des hétérogénéités qui génèrent des trajets multiples pour l'onde initiale. Dans un deuxième temps, la source initiale reste passive ; l'ensemble des transducteurs émet le signal reçu auparavant, mais retourné temporellement (comme une bande magnétique qui serait passée à l'envers), voir figure 1.1. L'onde ainsi créée est focalisée autour de la position de la source initiale sous la forme d'une tache focale : on parle de focalisation spatiale. De plus, le signal formé est bref : on parle alors de compression temporelle.

[1] Composant qui transforme une variation de pression, due par exemple à une onde acoustique, en signal électrique, et inversement (cette propriété caractérise les matériaux dits piézoélectriques, comme le quartz).

Remarque 1.2.1 *Le dispositif expérimental constitué du réseau de transducteurs capables de fonctionner en deux modes (mode réception : microphone et mode émission : haut-parleur) et de retourner temporellement les signaux est appelé "Miroir à Retournement Temporel" (MRT) du fait que le retourné temporel d'un signal enregistré est exactement l'image par un miroir de ce signal.*

Remarque 1.2.2 – *On dit que le retournement temporel est exact lorsque le signal reconstitué au point focal (position de la source originelle) est exactement égal au signal émis par la source.*
– *On rappelle que la tache focale est un voisinage du point focal tel que l'amplitude du signal reçu en dehors de ce voisinage est négligeable devant celle à l'intérieur.*

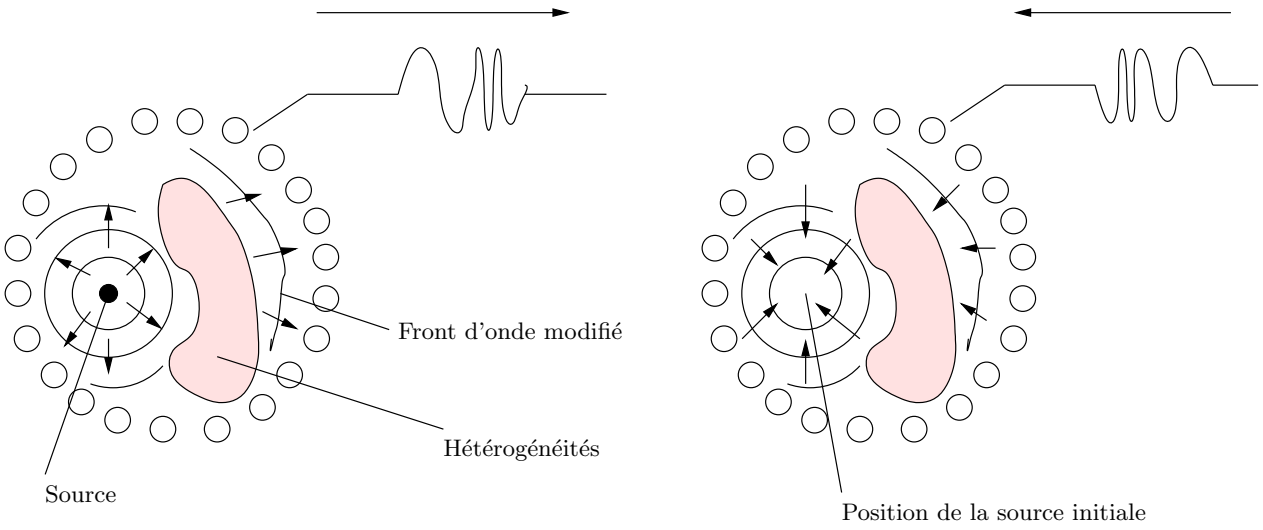


FIG. 1.1 – Focalisation par retournement temporel.

Pour bien comprendre les causes de la présence de la tache focale, le concept de cavité à retournement temporel a été étudié expérimentalement et théoriquement par D. R. Jackson et D. R. Dowling [50] et par D. Cassereau et M. Fink [19] : on enferme la source acoustique dans une cavité. Celle-ci est tapissée de transducteurs pour mesurer le champ émis par la source. Il s'agit alors de créer le "renversé temporel" de ce champ émis par la source uniquement à partir du contrôle des conditions aux limites sur la surface de la cavité. Les auteurs ont montré qu'il n'est pas possible de générer ce signal. En effet, la génération du champ initial n'a pu se faire qu'en introduisant la source dans le milieu (le terme $S(x,t)$ dans l'équation (1.1)). Il se pose donc un problème à partir du moment où l'onde retournée arrive au point focal : l'énergie de celle-ci n'est pas dissipée au point focal et l'onde continue son chemin après avoir passé le point focal. On peut donc observer autour du point focal un phénomène

d'interférence entre l'onde convergente liée directement au retournement temporel et l'onde divergente "initiale" : ce phénomène va entraîner l'apparition d'une tache focale dont la taille est de l'ordre de $\lambda/2$ où λ est la longueur d'onde. Cette tache de largeur non nulle est alors la conséquence de l'absence d'un objet correspondant au retourné temporel de la source acoustique (le terme $S(x,-t)$ dans le second membre de l'équation (1.1)). Julien de Rosny a pu construire cet objet correspondant au retournement temporel d'une source acoustique [78]. Grâce à ce "puits acoustique", il a pu obtenir des taches focales ayant des largeurs de l'ordre de $\lambda/1000$.

L'étude des propriétés de la forme spatiale et temporelle du signal focalisé sur le lieu de la source originelle a été faite pour différents types de milieux de propagation : les milieux *aléatoirement inhomogènes* largement étudiés par l'équipe de G. Papanicolaou à Stanford [9, 10, 12, 14] ainsi que par d'autres auteurs [4, 37, 38], les milieux à *géométrie chaotique*[2] étudiés expérimentalement par C. Draeger et M. Fink [29, 30] et théoriquement par C. Bardos [8], les milieux homogènes à bords "réguliers" tel qu'un guide d'ondes [50, 63] et les milieux *dissipatifs* [82, 83, 84].

De nombreuses expériences réalisées au L.O.A. (cf. [27]) montrent que la focalisation spatiale et temporelle est de bien meilleure qualité lorsque le milieu homogène contient des diffuseurs répartis aléatoirement : on parle de super-résolution. P. Blomgren et al. [10] ont exploré analytiquement et numériquement le phénomène de super-résolution dans le retournement temporel et sa dépendance vis à vis des réalisations du milieu aléatoire. Ils se situent dans un régime qui garantit que la diffusion multiple est significative. Ce régime est tel que :
- La distance de propagation L (distance entre le MRT et la source) est beaucoup plus grande que la longueur de corrélation des inhomogénéités (corrélation des fluctuations aléatoires de la vitesse de propagation) qui est plus grande ou comparable à la longueur d'onde λ.
- Ces fluctuations sont faibles de sorte que les ondes refractées ont une direction voisine de celle de l'onde émise par la source.
- L'ouverture du MRT est suffisamment grande pour que l'effet du milieu aléatoire et donc l'effet de la diffusion multiple puisse être ressenti.

En calculant les statistiques du signal focalisé dans le domaine fréquentiel par utilisation des équations de transport et de Wigner, ils ont montré la décorrélation statistique des composantes de Fourier pour des fréquences différentes qui est la clé de l'auto-moyennisation du signal focalisé dans le domaine temporel. Ils en déduisent qu'une condition nécessaire de stabilité statistique du signal focalisé, autrement dit son indépendance du milieu aléatoire est l'étalement du spectre fréquentiel du signal émis par la source.

Dans ce cas de figure, la taille de la tache focale est inversement proportionnelle à la taille de l'ouverture du MRT a $(= \lambda L/a)$ [15]. P. Blomgren et al. ont dérivé une formule pour l'ouverture effective du MRT dans le milieu aléatoire qui est plus grande que sa taille, ce qui permet de justifier selon les auteurs, la super-résolution. D'autres approches qui concernent l'étude de la super-résolution dans les milieux aléatoires ont été développées [4].

[2] Dans ce cas, le chemin d'un rayon géométrique d'une onde est extrêmement sensible aux conditions initiales.

Dans le cas d'un milieu *déterministe*, l'enjeu majeur est la configuration optimale du MRT (conditions aux limites sur le MRT, temps d'observation,...) qui permet d'avoir une meilleure focalisation. C. Bardos [8] a étudié le retournement temporel dans un milieu à *géométrie chaotique* tel qu'une cavité ouverte d'ouverture Γ jouant le rôle de MRT (voir aussi [29, 30]). Pendant la première étape, le MRT mesure le champ incident défini dans tout l'extérieur du domaine K pendant une durée T. Ensuite, le signal mesuré est retourné temporellement puis utilisé pour générer le "renversé temporel" du champ incident mais uniquement dans la cavité fermée $\mathcal{C}$ (voir figure 1.2). C. Bardos a montré que si l'on suppose qu'il n'y a pas de rayons captifs[3], autrement dit que tout rayon géométrique rencontre le MRT alors la décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur permet de montrer que le retournement temporel est exact modulo un terme exponentiellement petit en temps (en dimension 3), c'est à dire que l'énergie de la différence entre le champ initial défini dans la cavité $\mathcal{C}$ et du signal transmis par le MRT après retournement temporel du signal observé est exponentiellement décroissante en T. En présence de rayons captifs, la décroissance en temps est plus lente (elle est au moins logarithmique [18]).

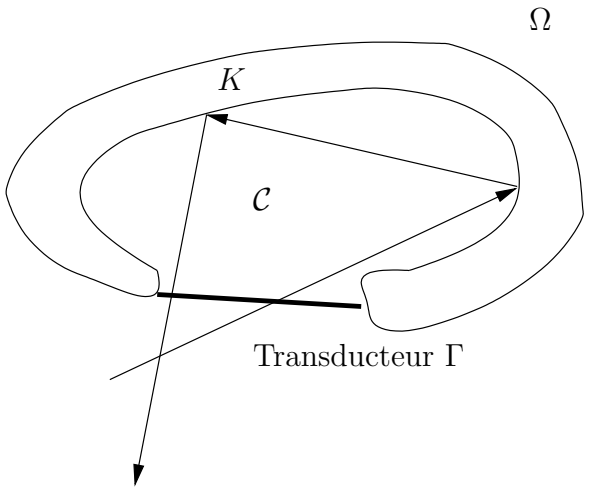


FIG. 1.2 – Cavité ouverte d'ouverture Γ.

C. Bardos a étudié également la cavité introduite par Draeger et Fink [30, 29]. Il considère une action intérieure sur l'équation des ondes dans un domaine borné $\mathcal{C}$ avec condition de Dirichlet sur le bord. Il observe la solution incidente définie dans toute la cavité $\mathcal{C}$ sur un sous-ensemble de $\mathcal{C}$. La réémission s'effectue aussi sur ce sous-ensemble. Du fait de l'ergodicité[4] du milieu de propagation des ondes : après un certain temps, chaque point de la cavité contient presque toute l'information sur le champ acoustique et sur la source qui lui a donné naissance,

[3]Rayons qui restent piégées dans la cavité.

[4]L'ergodicité est une notion de base de la physique dite statistique. Mathématiquement, elle peut s'interpréter de la façon suivante : Si l'on observe l'évolution d'un système dynamique pendant un temps suffisamment grand, on trouve que le temps moyen d'être en un état A coincide avec la probabilité d'être en A à un instant donné : on dit que la moyenne temporelle est égale à la moyenne spatiale.

C. Bardos a montré que pour un temps d'observation suffisamment grand, la focalisation est parfaite.

Une autre approche, fondée également sur le contrôle des conditions aux limites sur le MRT et du temps d'observation, a été introduite dans [52]. Les auteurs ont établi un algorithme itératif pour recréer le champ initial de façon optimale dans le sens des moindres carrées.

Le retournement temporel dans des milieux à bords réguliers tel qu' un *guide d'ondes* a été également étudié [75, 56, 63, 81]. Un guide d'ondes augmente considérablement l'ouverture des transducteurs ce qui minimise les pertes d'information du champ émis par la source. Nous illustrons cela dans la figure 1.3, où nous considérons un milieu de propagation homogène borné par des interfaces fortement réfléchissantes (par exemple interface eau-air). En effet, la source ponctuelle émet une onde qui se propage à l'intérieur du guide et est réfléchie par les interfaces. Le signal reçu par un tel transducteur contient la même information que la somme de celle qui y était contenue en plus de celle de l'élément imaginaire (rectangle en pointillés) si la propagation était dans l'espace libre. Le retournement temporel dans un guide d'ondes présente par contre certains inconvénients, par exemple la durée du signal reçu devient beaucoup plus grande, ce qui nécessite une mémoire d'enregistrement beaucoup plus importante.

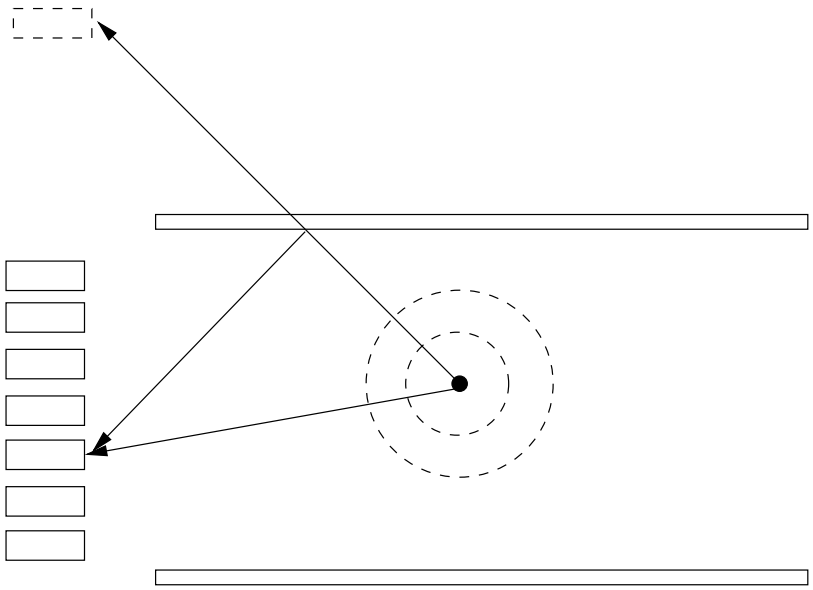


FIG. 1.3 – Retournement temporel dans un guide d'ondes.

Certaines applications, comme dans le cas de l'acoustique médicale, imposent par nature le caractère *dissipatif* du milieu de propagation, notamment le corps humain. De nombreux problèmes sont rencontrés lorsque l'on veut focaliser l'onde ultrasonore profondément dans les tissus ; il y a défocalisation du faisceau ultrasonore par :

– les hétérogénéités des tissus biologiques qui créent des variations locales de la vitesse acoustique qui peuvent induire des distorsions des faisceaux ultrasonores et dégrader la focalisation de l'onde.
– le mouvement des organes au cours du traitement [85].
– l'absorption de l'onde dans la paroi osseuse (milieu dissipatif) [82].

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir comment exploiter le retournement temporel pour focaliser globalement et sélectivement sur des obstacles diffractants contenus dans le milieu de propagation.

1.2.2 Application du retournement temporel à la focalisation sur les obstacles

Grâce à la découverte du MRT, la technique de retournement temporel semble être très utile pour focaliser une onde sur le lieu de la source originelle. Cependant, en pratique, on aimerait focaliser sur des obstacles passifs qui sont situés dans des milieux inaccessibles. L'équipe de M. Fink du laboratoire LOA a utilisé cette technique pour la focalisation sur des obstacles diffractants de forme et de position inconnues. Nous décrivons par la suite le processus permettant de focaliser sur les obstacles.

Processus de retournement temporel

Le processus de retournement temporel est décrit comme suit : le MRT émet une onde dans le milieu contenant ces obstacles. Ces derniers vont générer une onde diffractée qui va être par la suite reçue par le MRT. L'étape finale correspond à retourner temporellement le signal reçu (voir figure 1.4). La première itération de ce processus permet "d'activer" les obstacles qui deviennent "sources" d'ondes diffractées. La deuxième itération consiste à émettre le "renversé temporel" de cette onde diffractée, mesurée pendant la première itération, qui tend à focaliser autour de sa source originelle (les obstacles !) : on parle de focalisation globale sur les obstacles. Prada et al [35, 73] ont montré que dans un milieu formé de plusieurs diffuseurs bien résolus, autrement dit dont l'interaction est négligeable, l'itération du processus de retournement temporel conduit à la focalisation sélective sur le diffuseur le plus échogène, soit le plus gros s'ils ont les mêmes caractéristiques physiques.

Méthode DORT (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel)

L'itération du processus de retournement temporel rappelle la méthode des puissances itérées pour le calcul de la plus grande valeur propre d'une matrice et le vecteur propre associé. Ceci a amené C. Prada et al [74] à étudier deux itérations successives du processus de retournement temporel ce qui constitue l'opérateur de retournement temporel. Pour étudier cet opérateur, Prada et al. ont étudié d'abord la matrice de transfert obtenue par la mesure des réponses

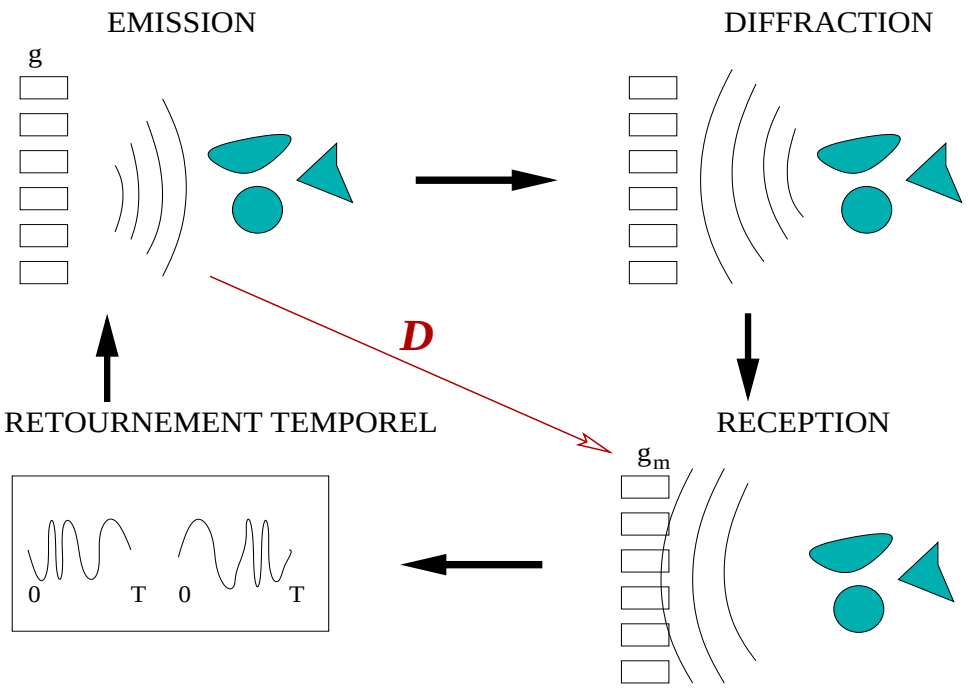


FIG. 1.4 – Cycle du processus de retournement temporel.

impulsionnelles inter-éléments captées par le réseau de transducteurs face au milieu étudié : si le réseau comporte N_t transducteurs alors on mesure $N_t * N_t$ signaux et on calcule la transformée de Fourier de ces signaux. La matrice de transfert, notée D est une matrice carrée de taille N_t qui dépend de la fréquence.

Dans le domaine fréquentiel, le retournement temporel se réduit à une simple conjugaison de phase. En effet, soit $\varphi(x,t)$ une solution harmonique en temps de l'équation de propagation des ondes (1.1) en l'absence de sources, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x,t) = Re(\varphi(x)e^{-i\omega t})$$

où ω représente la pulsation de l'onde. $\varphi(x,-t)$, qui est solution de (1.1) est égal à :

$$\varphi(x,-t) = Re(\varphi(x)e^{+i\omega t}) = Re(\overline{\varphi(x)}e^{-i\omega t})$$

Le retournement temporel en régime harmonique consiste donc à changer l'amplitude $\varphi(x)$ en $\overline{\varphi(x)}$, c'est à dire la conjuguer.

L'opérateur de retournement temporel T est défini alors par :

$$Tg = \overline{D\overline{Dg}}, \text{ ou bien, } T = \overline{D}D,$$

où g est le signal émis par le MRT.

En exploitant la linéarité des ondes acoustiques et des réseaux de transducteurs ainsi que le caractère autoadjoint de l'opérateur des ondes dans un milieu hétérogène et non dissipatif, C. Prada a montré que la matrice de transfert $D(\omega)$ est symétrique. La méthode D.O.R.T. (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel) consiste à décomposer en valeurs singulières la matrice de transfert $D(\omega)$ du système et à déterminer ainsi les valeurs et les directions propres de l'opérateur de retournement temporel $T = \overline{D}D = D^*D$ qui est une matrice hermitienne et positive [74, 70, 73]. Ces directions fixes sont simplement les invariants du processus de retournement temporel.

Dans le cas de diffuseurs ponctuels et suffisamment distants, le nombre de valeurs propres significatives de T est égal au nombre de diffuseurs ; les autres valeurs propres sont négligeables par rapport aux premières appelées significatives, et chaque vecteur propre associé à une valeur propre significative focalise sélectivement sur un diffuseur. De plus, chaque valeur propre significative traduit la réflectivité (amplitude de diffraction) du diffuseur associé à la fréquence considérée [74, 59].

C. Hazard et K. Ramdani ([44]) ont développé un modèle "champ lointain" dans le domaine fréquentiel. Ce modèle consiste en un MRT entourant entièrement les obstacles et situé à l'infini, capable de renverser le champ diffracté lointain. Ils ont montré, par une analyse asymptotique, que lorsque la taille des obstacles est négligeable devant la longueur d'ondes qui est à son tour négligeable devant la distance entre les obstacles, on peut focaliser sélectivement sur les obstacles : ce cas correspond donc aux faibles fréquences.

La méthode D.O.R.T a été appliquée dans les divers types de milieux : milieux aléatoires [14], milieux complexes (réverbérants) [69, 72, 54, 71], le guide d'ondes [56, 63, 81] etc. Elle a été également exploitée dans les domaines faisant intervenir des ondes électromagnétiques [86, 31, 61, 62, 60]. Par ailleurs, la justification théorique ainsi que numérique de cette méthode est partielle.

1.2.3 Notre contexte

Nous nous intéressons dans ce document à l'étude de la méthode D.O.R.T pour un milieu homogène non dissipatif contenant des obstacles non rayonnants. Nous montrons en particulier que les propriétés permettant de montrer que l'opérateur de retournement temporel est diagonalisable dans une base orthonormée, restent valables pour une géométrie quelconque du MRT et pour toute fréquence. Les propriétés de focalisation sélective sont par contre mises en évidence numériquement en établissant la correspondance entre les valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel et les obstacles.

En négligeant les interactions entre le MRT et les obstacles, les modèles des MRT présentés jusqu'à présent ne prenaient pas en compte leur caractère intrusif alors qu'en pratique le MRT perturbe les champs émis et mesuré. Dans notre étude, nous proposons des modèles permettant la prise en compte de ce phénomène.

En réalité, les signaux émis sont *localisés en temps* et donc leur support fréquentiel est non borné (contrairement au problème posé en régime harmonique). La question est alors de savoir comment concentrer dans le temps de l'énergie locale au voisinage de l'obstacle visé. Nous ne savons pas pour l'instant répondre à cette question. Nous commençons par proposer un modèle "champ lointain" en régime transitoire et nous établissons le lien entre celui-ci et le modèle "champ lointain" en régime harmonique étudié dans [44]. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la question de l'optimisation de l'énergie diffractée. En régime harmonique, nous savons que les maxima de cette énergie sont fournis par les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel. En régime transitoire, nous verrons que les optima sont atteints asymtotiquement (en temps long) par les éléments propres du régime harmonique. Ainsi, optimiser l'énergie diffractée par les obstacles conduit à un étalement dans le temps et non en une focalisation temporelle !

1.3 Contenu de la thèse

La thèse s'articule en deux parties. La première, qui regroupe les chapitres 2, 3 et 4, est réservée à l'analyse mathématique et l'étude numérique du retournement temporel en régime harmonique. La deuxième partie, qui contient les chapitres 5 et 6, est consacrée à l'étude du retournement temporel dans le cas du régime transitoire.

Afin de mettre en évidence les propriétés de focalisation sélective, la première étape consiste à montrer que l'opérateur de retournement temporel T est digonalisable dans une base orthonormée. Pour cela nous montrons qu'il s'agit d'un opérateur intégral à noyau symétrique et suffisamment régulier, ce qui permet de montrer son caractère autoadjoint, positif et compact. Le second chapitre introduit les outils nécessaires à la description des problèmes extérieurs, notamment les fonctions de Green permettant d'expliciter leur solution à l'aide de formules de représentation intégrale ainsi que les principes de réciprocité. Dans ce chapitre, nous présentons cinq modèles de MRT non pénétrables pour lesquels nous montrons les propriétés de T. Les trois premiers concernent des MRT non intrusifs, autrement dit les champs émis et mesuré par le MRT ne tiennent pas compte de sa forme géométrique, pour lequel on néglige les interactions entre le MRT et les obstacles. Nous présentons ensuite deux modèles de MRT intrusifs qui agissent par leur surface : le premier modèle prend en compte les interactions entre le miroir et les obstacles, ils peuvent donc être proches l'un de l'autre ; le second modèle consiste à effectuer une approximation des interactions entre le miroir et les obstacles. Enfin, nous faisons une étude numérique des deux derniers modèles. Nous montrons que le nombre de valeurs propres significatives de T est égal au nombre d'obstacles et que la focalisation sélective a lieu même dans le cas où la taille des obstacles et la longueur d'onde ont le même ordre de grandeur. De plus, nous montrons les modulations des valeurs propres de T en fonction de la fréquence. Ces oscillations sont dues aux interactions entre les diffuseurs et le miroir ainsi qu'à celles entre les diffuseurs eux-mêmes. Pour la mise en oeuvre numérique, nous utilisons la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale, à l'aide du code MELINA ([57]). Cette partie constitue un article paru dans SIAM [6] repris tel quel.

Le chapitre 3 est dédié à l'étude du retournement temporel dans un guide d'ondes infini en dimension deux. Il s'agit d'un milieu homogène borné dans la direction transversale par deux interfaces. Nous supposons qu'un nombre fini de transducteurs est réparti sur la hauteur du guide. Nous considérons un MRT non intrusif et nous montrons le caractère hermitien de l'opérateur de retournement temporel - décrit par une matrice dans ce cas - grâce à la symétrie de la fonction de Green du guide.

Le chapitre 4 constitue la mise en oeuvre numérique de la méthode D.O.R.T. pour mettre en évidence la focalisation sélective. Nous montrons que les valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel dans le cas du guide sont nettement supérieures à celles obtenues dans le cas de l'espace libre, ce qui montre que le guide augmente considérablement l'ouverture du MRT. De plus, la focalisation sélective a lieu même pour un nombre limité de transducteurs contrairement au cas de l'espace libre où le nombre de transducteurs doit être suffisamment grand.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'exploitation de la méthode D.O.R.T étudiée dans le domaine fréquentiel pour l'étude du retournement temporel en régime transitoire. En effet, une onde transitoire peut être représentée par une superposition continue d'ondes harmoniques en temps ce qui nous permettra de faire le lien entre les régimes transitoire et harmonique.

Le chapitre 5 est dédié au développement et à l'étude d'un modèle "champ lointain" en régime transitoire. Nous montrons que l'onde transitoire se comporte à l'infini comme la somme de deux profils entrant et sortant. Nous supposons qu'à l'émission, le MRT émet le profil entrant de l'onde incidente et qu'à la réception, il mesure le profil sortant de l'onde diffractée par les obstacles. Nous établissons le lien entre ce modèle et le modèle "champ lointain" étudié en régime harmonique dans [44]. Nous montrons en particulier qu'à une transformation spectrale près, l'opérateur de retournement temporel dans le domaine temporel est décomposable sur la famille des opérateurs de retournement temporel à fréquence fixée.

Le sixième et dernier chapitre de la thèse aborde la question d'optimisation d'énergie diffractée par les obstacles dans le cas du modèle "champ lointain" étudié dans le chapitre 5. Nous nous sommes basés sur l'algorithme adaptatif de Cheney et al. [21] appliqué dans le cas d'un milieu contenant des hétérogénéités à support compact. Nous montrons que la meilleure onde incidente est une onde harmonique en temps ayant la fréquence qui augmente la plus grande valeur propre de l'opérateur de retournement temporel en régime harmonique.

Première partie

Retournement temporel en régime harmonique

Chapitre 2

Modélisation de Miroirs à Retournement Temporel

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le MRT est le dispositif clé dans le processus de retournement temporel permettant de focaliser sur les obstacles. Dans les modèles de MRT présentés dans la littérature, que ce soit en régime harmonique (cf. [50, 19, 69, 70, 72, 74]) ou en régime transitoire (cf. [8, 29, 30]), le MRT n'a aucune influence sur les champs émis et reçus. Notre objectif est de développer des modèles de MRT en régime harmonique capables de décrire ce qui se passe réellement dans ce processus, notamment la prise en compte des interactions entre le MRT et les obstacles diffractants et entre les obstacles eux-mêmes ainsi que de mettre en évidence le caractère hermitien de l'opérateur de retournement temporel et étudier numériquement la focalisation dans chacun des cas.

Nous considérons des MRT imperméables volumiques ou surfaciques, qui agissent par leurs bords. M étant le MRT et $\mathcal{O}$ la réunion des obstacles. On note par $\Omega_M = \mathbb{R}^n \backslash \overline{M}$, $\Omega_{\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\mathcal{O}}$ et $\Omega_{M,\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n \backslash (\overline{M} \cup \overline{\mathcal{O}})$, $n = 2$ ou 3. Dans tous les modèles que nous allons étudier, l'onde incidente φ_I, générée à l'extérieur du MRT M, s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in \Omega_M,\ \varphi_I(x) = \int_{\partial M} G_I(y,x) g(y) d\sigma(y) \tag{2.1}$$

où la densité g représente l'excitation sur le bord ∂M de M et G_I désigne la fonction de Green "à l'émission". Nous verrons que φ_D, le champ diffracté par les obstacles s'écrit alors sous la forme :

$$\forall x \in \Omega_{\mathcal{O}},\ \varphi_D(x) = \int_{\partial M} G_D(y,x) g(y) d\sigma(y) \tag{2.2}$$

où G_D représente la fonction de Green "de diffraction" et que g_R, le signal mesuré par le MRT s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in \partial M,\ g_R(x) = \int_{\partial M} G_R(y,x) g(y) d\sigma(y) \tag{2.3}$$

où G_R représente la fonction de Green "à l'étape de réception" qui s'exprime en fonction de G_D. Les fonctions de Green G_I, G_D et G_R dépendent du modèle retenu.

Nous distinguons deux cas possibles de MRT selon son influence sur les champs émis et reçus. On dit que le MRT M est *non intrusif à l'émission* si le noyau $G_I(y,.),\ y \in \partial M$ est défini et régulier sur tout l'espace $\mathbb{R}^n \backslash \{y\}$ y compris à l'intérieur de M, ainsi la présence physique de M n'a pas d'influence sur le domaine de définition et la régularité de G_I. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *intrusif à l'émission*. On dit que M est *non intrusif à la réception* si le noyau G_D n'est pas perturbé par la présence du MRT autrement dit qu'il est défini et régulier dans tout l'extérieur de $\mathcal{O}$ y compris dans M. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *intrusif à la réception*.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons des MRT non intrusifs à la fois à l'émission et à la réception. Dans la seconde partie, présentée sous forme d'un article, nous nous intéressons à l'étude de MRT intrusifs.

2.1 Modélisation mathématique de MRT non intrusifs

Dans le modèle présenté par C. Prada et al. dans [74], les transducteurs sont supposés ponctuels et l'onde incidente est une somme discrète dont le nombre total est égal au nombre de transducteurs utilisés ; en plus, la mesure est effectuée sur la pression, cela correspond au premier modèle qu'on étudiera.

Dans la suite, nous allons étudier trois modèles, où la mesure portera respectivement sur la pression, la vitesse normale (dérivée normale de la pression) et sur une combinaison linéaire des deux. Nous montrerons le caractère autoadjoint de l'opérateur de retournement temporel dans chacun de ces cas et par conséquent le fait qu'il soit diagonalisable, ce qui permet, comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, de vérifier si le MRT focalise sélectivement sur les obstacles.

2.1.1 Premier modèle : mesure de la pression

Nous supposons que $G_I = G_0$ où G_0 est la fonction de Green de l'espace libre définie par :

$$G_0(y,x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{ik|y-x|}}{4\pi|y-x|} & \text{si } n=3, \\ \dfrac{1}{4i}H_0^{(1)}(k|y-x|) & \text{si } n=2. \end{cases} \tag{2.4}$$

On vérifie bien que le fait de considèrer $G_I = G_0$ montre que le MRT est non intrusif à l'émission.

L'onde diffractée par les obstacles, notée φ_D, est définie par le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Delta\varphi_D + k^2\varphi_D & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial\varphi_D}{\partial n} & = & -\dfrac{\partial\varphi_I}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \\ \text{C.R.} & & \end{array}\right. \tag{2.5}$$

où C.R. est la condition de rayonnement de Sommerfeld donnée par

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial\varphi_D}{\partial r}(x) - ik\varphi_D(x)\right) = 0, \quad r = |x|, \tag{2.6}$$

$\partial\varphi_D/\partial r$ représente la dérivée radiale de φ_D.

Pour $x \in \Omega_{\mathcal{O}}$, si on désigne par $G_D(x,.)$ la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Delta G_D(x,.) + k^2 G_D(x,.) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial G_D}{\partial n}(x,.) & = & -\dfrac{\partial G_I}{\partial n}(x,.) \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \\ \text{C.R.} & & \end{array}\right. \tag{2.7}$$

l'onde diffractée φ_D s'écrit alors sous la forme

$$\varphi_D(x) = \int_{\partial M} G_D(y,x) g(y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega_{\mathcal{O}} \tag{2.8}$$

On suppose dans ce premier modèle que le signal mesuré g_R est identique à la valeur de φ_D sur le bord ∂M ce qui signifie que M ne perturbe pas le champ diffracté et donc que le MRT est non intrusif à la réception.

Pour tout $g \in L^2(\partial M)$, on note $Dg = g_R \in C^\infty(\partial M)$ la réponse du milieu. L'opérateur de retournement temporel est défini sur $L^2(\partial M)$ par $Tg = \overline{D\overline{Dg}}$. Nous avons le résultat suivant

Théorème 2.1.1 *T est autoadjoint positif et compact sur $L^2(\partial M)$.*

Démonstration. L'opérateur D défini sur $L^2(\partial M)$ par $Dg = \varphi_{D_{/\partial M}}$ est donné par

$$(Dg)(x) = \int_{\partial M} G_R(y,x) g(y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \partial M$$

où $G_R = G_{D_{/\partial M\times\partial M}} \in C^\infty(\partial M \times \partial M)$ ce qui montre que D est un opérateur de Hilbert-Schmidt, il est donc compact sur $L^2(\partial M)$.

Nous allons prouver dans le lemme suivant (lemme 2.1.1) la symétrie de G_D sur $\Omega_{\mathcal{O}} \times \Omega_{\mathcal{O}}$, ce qui permet de déduire la symétrie de G_R sur $\partial M \times \partial M$ et donc conclure que $D^* = \overline{D}$ puisque

$$(D^*g)(x) = \int_{\partial M} \overline{G_R(x,y)} g(y) d\sigma(y) \text{ et } (\overline{D}g)(x) = \int_{\partial M} \overline{G_R(y,x)} g(y) d\sigma(y).$$

$T = \overline{D}D$ s'écrit également $T = D^*D$, il est donc autoadjoint positif et compact sur $L^2(\partial M)$.

□

Lemme 2.1.1 *G_D est symétrique sur $\Omega_{\mathcal{O}} \times \Omega_{\mathcal{O}}$.*

Démonstration. Nous rappelons d'abord le fait que si deux fonctions φ et ψ vérifient l'équation de Helmholtz à l'intérieur d'un domaine borné Λ, ou bien à l'extérieur de Λ en plus de la condition de rayonnement (2.6), alors nous avons le principe de reciprocité [25]

$$\int_{\partial\Lambda} \left\{ \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi \right\} d\sigma = 0, \tag{2.9}$$

La représentation intégrale de $G_D(x,.)$ s'écrit ([25])

$$G_D(x,y) = \int_{\partial\mathcal{O}} \left\{ \frac{\partial G_0}{\partial n_z}(y,z) G_D(x,z) - G_0(y,z) \frac{\partial G_D}{\partial n_z}(x,z) \right\} d\sigma(z), \ \forall y \in \Omega_{\mathcal{O}}$$

où n_z est la normale extérieure à $\Omega_{\mathcal{O}}$ au point $z \in \partial\mathcal{O}$. A partir des conditions sur le bord $\partial\mathcal{O}$ vérifiées par $G_D(x,.)$ et $G_D(y,.)$, on déduit que

$$G_D(x,y) = -\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial G_D}{\partial n_z}(y,z) G_D(x,z) d\sigma(z) + \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial G_0}{\partial n_z}(x,z) G_0(y,z) d\sigma(z)$$

En appliquant le principe de réciprocité (2.9) respectivement à $G_D(x,.)$ et $G_D(y,.)$ qui vérifient l'équation de Helmholtz à l'extérieur de $\mathcal{O}$ (dans $\Omega_{\mathcal{O}}$) en plus de la condition de rayonnement puis à $G_0(x,.)$ et $G_0(y,.)$ qui vérifient l'équation de Helmholtz dans $\mathcal{O}$, nous prouvons que $G_D(y,x) = G_D(x,y)$ pour $(x,y) \in \Omega_{\mathcal{O}} \times \Omega_{\mathcal{O}}$.

□

2.1.2 Second modèle : mesure de la vitesse

Dans ce second modèle, on génère à l'extérieur de M une onde incidente φ_I sous la forme (2.1) avec $G_I = \partial G_0 / \partial n_1$, n_1 étant la normale par rapport à la première variable, autrement dit :

$$\forall x \in \Omega_M, \ \forall y \in \partial M, \ G_I(y,x) = \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(y,x) \tag{2.10}$$

où n_y est la normale unitaire extérieure à ∂M au point y et on mesure la dérivée normale du champ diffracté (la vitesse normale) $g_R = (\partial \varphi_D / \partial n)_{/\partial M}$, φ_D étant défini par l'équation (2.5). La dérivée normale est toujours prise extérieure à M.

Notons que le noyau $G_I(y,.)$ dépend de la forme géométrique de M par la présence de la dérivée normale mais il est défini et régulier dans $\mathbb{R}^n\backslash\{y\}$ y compris à l'intérieur de M. Ainsi, la présence physique de M n'a pas d'influence sur l'émission d'où le caractère non intrusif "à l'émission" de M.

L'opérateur D défini sur $L^2(\partial M)$ par $Dg = g_R = (\partial\varphi_D/\partial n)_{/\partial M}$ est donné par

$$Dg(x) = \int_{\partial M} G_R(y,x)g(y)d\sigma(y) = \int_{\partial M} \frac{\partial G_D}{\partial n_x}(y,x)g(y)d\sigma(y), \quad x \in \partial M$$

Le théorème 2.1.1 reste valable pour ce modèle ; il suffit de montrer le lemme suivant

Lemme 2.1.2 *$G_R = \partial G_D/\partial n_2$ est symétrique sur $(\partial M)^2$, n_2 étant la normale par rapport à la seconde variable, autrement dit :*

$$\forall\ (x,y) \in (\partial M)^2, \quad \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y) = \frac{\partial G_D}{\partial n_x}(y,x)$$

Démonstration. y étant fixé dans ∂M. On note par $\widetilde{G}_D(y,.)$ l'onde diffractée par les obstacles lorsque l'onde incidente est égale à $G_0(y,.)$, autrement dit $\widetilde{G}_D(y,.)$ est la solution du problème (2.7) où $G_I = G_0$. Par linéarité, on a :

$$\forall x \in \Omega_{\mathcal{O}},\ \forall y \in \partial M,\ G_D(y,x) = \frac{\partial \widetilde{G}_D}{\partial n_y}(y,x) \tag{2.11}$$

En appliquant $\partial/\partial n_x$ ($x \in \partial M$) à l'équation (2.11) et en utilisant la symétrie de $\widetilde{G}_D$ d'après le lemme 2.1.1, on déduit le lemme 2.1.2.

□

2.1.3 Troisième modèle : mesure de la pression et de la vitesse

On génère à l'extérieur du miroir M une onde incidente φ_I sous la forme (2.1) avec $G_I = \alpha G_0 + \beta\partial G_0/\partial n_1$, α et β étant deux paramètres complexes et on mesure le signal $g_R = \alpha\varphi_D + \beta\partial\varphi_D/\partial n$, φ_D étant défini par l'équation (2.5).

L'opérateur D défini sur $L^2(\partial M)$ par $Dg = g_R = \alpha(\varphi_D)_{/\partial M} + \beta(\partial\varphi_D/\partial n)_{/\partial M}$ est donné par

$$Dg(x) = \int_{\partial M} G_R(y,x)g(y)d\sigma(y) = \int_{\partial M} \left(\alpha G_D + \frac{\partial G_D}{\partial n_x}\right)(y,x)g(y)d\sigma(y), \quad x \in \partial M$$

et le théorème 2.1.1 reste également valable. En utilisant les lemmes 2.1.1 et 2.1.2, on montre le principe de réciprocité :

Lemme 2.1.3 *$G_R = \alpha G_D + \beta \partial G_D/\partial n_2$ est symétrique sur $(\partial M)^2$, autrement dit*

$$\forall\ (x,y) \in (\partial M)^2, \quad \alpha G_D(x,y) + \beta \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y) = \alpha G_D(y,x) + \beta \frac{\partial G_D}{\partial n_x}(y,x)$$

Remarque 2.1.1 – *On perd le principe de réciprocité sur G_R si on émet par exemple une onde incidente du même type que le premier modèle ($G_I = G_0$) et on mesure, comme dans le second modèle, la dérivée normale du champ diffracté ($\partial \varphi_D/\partial n$) et vice-versa. En effet, si le noyau "à l'émission" G_I tient compte de la forme géométrique de M alors le noyau "à la réception" G_R doit en tenir compte "de la même façon" et vice-versa, autrement dit, si G_I ne tient pas compte de la forme géométrique de M alors G_R ne doit pas en tenir compte également.*

– *Pour un miroir non intrusif, l'onde reçue par le MRT ne tient pas compte de sa présence, autrement dit, les interactions entre le MRT et les obstacles sont négligées et l'onde reçue est issue d'une seule diffraction sur $\mathcal{O}$.*

2.2 Modélisation mathématique de MRT intrusifs

Les propriétés de focalisation sélective des fonctions propres de l'opérateur de retournement temporel sont connues lorsque les diffuseurs sont suffisamment petits, autrement dit, lorsque leurs diamètres sont petits devant la longueur d'onde. Une telle situation correspond au cas de faibles fréquences. L'objet de cette section est d'explorer le cas de fréquences moyennes par une approche numérique, c'est à dire, lorsque les diamètres et la longueur d'onde ont le même ordre de grandeur. Nous allons présenter un modèle de MRT qui diffère des modèles présentés dans le paragraphe précédent du fait qu'il est intrusif. Dans ce modèle, les interactions entre les obstacles et le MRT sont prises en compte, ainsi le cas où les deux sont proches peut être traité. L'opérateur de retournement temporel apparaît, comme dans les cas de MRT non intrusifs comme un opérateur qui agit sur un espace L^2 représentant l'espace des excitations possibles d'énergies finies. Nous allons prouver le caractère autoadjoint et compact de cet opérateur.

Nous allons proposer également un modèle de MRT non pénétrable et intrusif dans lequel les interactions entre les obstacles et le MRT sont approximées. Nous montrons brièvement comment adapter les preuves utilisées dans le premier modèle.

Finalement, nous présentons quelques résultats numériques. Nous montrons que les propriétés de focalisation sélective sont également vérifiées pour des fréqences moyennes. De plus, nous montrons les modulations des valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel T en fonction de la fréquence. Ces oscillations sont dues aux interactions entre les obstacles et le MRT, et entre les obstacles eux-mêmes.

Cette section a été l'objet d'un article intitulé "Numerical simulation of acoustic time reversal mirrors" paru dans SIAM Journal on Applied Mathematics [6]. Nous avons choisi de le présenter tel qu'il a été publié.

Numerical simulation of acoustic time reversal mirrors

We study the time reversal phenomenon in a homogeneous and non-dissipative medium containing sound-hard obstacles. We propose two mathematical models of time reversal mirrors in the frequency domain. The first one takes into account the interactions between the mirror and the obstacles. The second one provides an approximation of these interactions. We prove, in both cases, that the time reversal operator T is selfadjoint and compact. The D.O.R.T method (french acronym for Decomposition of the Time Reversal Operator) is explored numerically. In particular, we show that selective focusing, which is known to occur for small and distant enough scatterers, holds when the wavelength and the size of these scatterers are of the same order of magnitude (medium frequency situation). Moreover, we present the behaviour of the eigenvalues of T according to the frequency and we show their oscillations due to the interactions between the mirror and the obstacles and between the obstacles themselves.

2.2.1 Introduction

During the last decade, time reversal techniques have been extensively studied, in particular for detection, localization and identification of scatterers in propagative media. In the present paper, we are concerned with one of these techniques, usually referred to as the D.O.R.T method (french acronym for Decomposition of the Time Reversal Operator). This method was first developed by Prada and Fink [70] in the context of ultrasonics (see [72] for an overview). It consists in determining the invariants of a time reversal process which can be described as follows. A time reversal mirror (TRM), composed of an array of transducers, first emits an incident wave corresponding to a given distribution of signals sent to the transducers. This wave is then scattered by the presence of obstacles in the propagative medium. In a second step, the TRM measures the scattered field and time-reverses the measure, which furnishes a new distribution of signals used to re-emit a new incident wave. In short, one cycle of the process corresponds to the succession : emission, scattering, measure, time reversal. The so-called time reversal operator T is obtained by iterating this cycle twice. The D.O.R.T method deals with the eigenvalues of T and the associated eigenvectors for a

fixed frequency, that is when time-harmonic waves are considered. In this case, time reversal simply amounts to a phase conjugation. It was shown [70, 74] and confirmed by experiments that for ideally resolved or pointlike and distant enough scatterers with different reflectivities, each eigenvector corresponding to a nonzero eigenvalue of T provides the signals to be sent to the transducers in order to focus on one scatterer. A mathematical justification of these selective focusing properties is given in [44] for a far field approach, *i.e.*, for an ideal TRM which reverses the asymptotic behaviour at large distance of the wave scattered by the obsatcles (in this case, the time reversal operator is related with the far field operator [59] well known in scattering theory). Other applications of the D.O.R.T. method, which concern this question of focusing on a selected target, have been developed : acoustic waveguides [56, 63], electromagnetic scattering [86, 61] or propagation in random media [14].

The focusing properties of the eigenvectors of the time reversal operator are known to occur for small enough scatterers, *i.e.*, when the diameters of the scatterers are small compared to the wavelength. Such a situation corresponds to a low frequency case. The object of the present paper is to explore the medium frequency case by a numerical approach, *i.e.*, when the diameters and the wavelength have the same order of magnitude. The model considered here differs from commonly used models in the fact that the TRM is intrusive : instead of an array of pointlike transducers, the TRM consists of a volumic and non penetrable object which perturbs the acoustic field. For the sake of simplicity, we consider the usual simplified model of linear electroacoustic transducers (see, e.g. [68]) : the inner behaviour of the TRM is modelled by a Robin condition on its boundary.

The paper is organized as follows. In §2.2.2, we present a mathematical model of a non penetrable intrusive TRM, which is closely related to the active sonar problem dealt with for instance in [79]. In this first model, the interactions between the scatterers and the TRM are taken into account, so that we can deal with the case where they are close to each other. Instead of the symmetric matrix obtained for a finite number of pointlike transducers, the time reversal operator appears then, like in the far field approach [44], as an operator acting in a L^2 space representing the finite energy space of possible excitations. The basic properties of this operator, namely selfadjointness and compactness, are proved in §2.2.3. They essentially tell us that its spectrum is that of a symmetric matrix completed by an infinite number of a non significant eigenvalues. In §2.2.4, we propose a non penetrable intrusive model of TRM in which the interactions between the obstacles and the TRM are approximated. We briefly show how to adapt the proofs of §2.2.3. Finally we present some numerical results in §2.2.5. We show that the expected selective focusing properties hold in the medium frequency case. Moreover, we point out the modulations of the eigenvalues of T with respect to the frequency. These oscillations are due to the interactions between the scatterers and the TRM, and between the scatterers themselves.

The main result of this paper, namely the properties of the time reversal operator (Theorem 1), holds in many other situations which can be dealt with by similar integral techniques. For instance, we consider here sound-hard obstacles but we could have chosen a Dirichlet or Robin boundary condition on $\partial\mathcal{O}$ instead of the Neumann condition. Penetrable scatterers,

i.e., inhomogeneities of the medium, can also be considered.

2.2.2 A model of non penetrable intrusive mirror

We consider a homogeneous medium filling the space $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or 3) and containing a non penetrable mirror M and some non penetrable obstacles $\mathcal{O}$.

We study the case of an impedance condition on the boundary ∂M of the mirror and a Neumann condition on the boundary $\partial\mathcal{O}$ of the obstacles (sound-hard obstacles). Let $\Omega_M = \mathbb{R}^n\backslash\overline{M}$, $\Omega_{\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n\backslash\overline{\mathcal{O}}$ and $\Omega_{M,\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n\backslash(\overline{M}\cup\overline{\mathcal{O}})$. We suppose that the boundary of the mirror is excited by a signal g (proportional to the current which flows through each transducer). So, in the presence of the obstacles, we observe the total field φ_T satisfying the problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi_T + k^2\varphi_T & = & 0 & \text{in } \Omega_{M,\mathcal{O}}, \\ \dfrac{\partial\varphi_T}{\partial n} + \mu\varphi_T & = & g & \text{on } \partial M, \\ \dfrac{\partial\varphi_T}{\partial n} & = & 0 & \text{on } \partial\mathcal{O}, \\ \text{R.C. at } \infty, & & & \end{array}\right. \tag{2.12}$$

where n denotes the unit normal vector directed into the interior of the domain $\Omega_{M,\mathcal{O}}$. The wave number k is defined by $k = \omega/c$ where ω is the frequency and c is the speed of sound in the homogeneous medium, μ is a real parameter which represents the inverse of the open-circuit acoustic impedance of the TRM [68] and R.C. the outgoing Sommerfeld's " Radiation Condition" which, for φ_T is

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\partial\varphi_T}{\partial r}(x) - ik\varphi_T(x)\right) = 0, \quad r = |x|, \tag{2.13}$$

where $\partial\varphi_T/\partial r$ denotes the radial derivative of φ_T.

In the absence of obstacles, we should observe an incident field φ_I solution to

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi_I + k^2\varphi_I & = & 0 & \text{in } \Omega_M, \\ \dfrac{\partial\varphi_I}{\partial n} + \mu\varphi_I & = & g & \text{on } \partial M, \\ \text{R.C. at } \infty. & & & \end{array}\right. \tag{2.14}$$

The perturbation due to the presence of the obstacles is the diffracted field $\varphi_D = \varphi_T - \varphi_I$ satisfying the problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi_D + k^2\varphi_D & = & 0 & \text{in } \Omega_{M,\mathcal{O}}, \\ \dfrac{\partial\varphi_D}{\partial n} + \mu\varphi_D & = & 0 & \text{on } \partial M, \\ \dfrac{\partial\varphi_D}{\partial n} & = & h & \text{on } \partial\mathcal{O}, \\ \text{R.C. at } \infty, & & & \end{array}\right. \tag{2.15}$$

where $h = -\partial\varphi_I/\partial n$.

We suppose that the signal measured by the mirror is equal to $\varphi_{D_{/\partial M}}$, the value of the diffracted field on ∂M. The measured signal is then conjugated and used to generate the incident and the total fields in the next iteration.

Time reversal operator

Let D denote the operator describing the response of the medium, that is, the three successive steps : emission, diffraction, measure. It is defined by

$$Dg = \varphi_{D_{/\partial M}}.$$

The time reversal operator is obtained by iterating the time reversal process (emission, diffraction, measure, conjugation) twice. Therefore, T is given by

$$Tg = \overline{D\overline{Dg}} \text{ , that is, } T = \overline{D}D,$$

where the operator $\overline{D}$ is defined by

$$\overline{D}g = \overline{D\,\overline{g}}.$$

Theorem 1 *T is a selfadjoint positive and compact operator in $L^2(\partial M)$.*

These properties are proved below by an integral approach based on the use of several Green's functions.

2.2.3 Proof of Theorem 1

This section is devoted to the proof of the following result, from which Theorem 1 derives.

Proposition 1 *For every $g \in L^2(\partial M)$, the response $Dg \in L^2(\partial M)$ of the medium is given by*

$$(Dg)(x) = \int_{\partial M} G_R(x,y)g(y)d\sigma(y), \tag{2.16}$$

where $G_R \in L^2(\partial M \times \partial M)$ is symmetric, i.e., $G_R(x,y) = G_R(y,x)$.

This proposition shows that D is a Hilbert-Schmidt operator in $L^2(\partial M)$ such that $D^* = \overline{D}$ since

$$(D^*g)(x) = \int_{\partial M} \overline{G_R(y,x)}g(y)d\sigma(y) \text{ and } (\overline{D}g)(x) = \int_{\partial M} \overline{G_R(x,y)}g(y)d\sigma(y).$$

Hence $T = D^*D$ is selfadjoint positive and compact in $L^2(\partial M)$. It is actually a Hilbert-Schmidt operator in $L^2(\partial M)$ whose kernel $G \in L^2(\partial M \times \partial M)$ is given by

$$G(x,y) = \int_{\partial M} \overline{G_R(z,x)} G_R(z,y) d\sigma(z).$$

The spectral properties of T follow. On one hand, the eigenvalues of T form a decreasing sequence of positive numbers $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ such that $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n^2$ is finite. On the other hand, one can choose an orthonormal basis of $L^2(\partial M)$ composed of eigenvectors of T, and T becomes diagonal in this basis.

Integral representations

To prove Proposition 1, first recall that problems (2.12), (2.14) and (2.15) are well-posed [26] in a proper functional framework which is made precise later. Consider then the operators

$$\begin{array}{rcccll} S_T & : & g & \mapsto & \varphi_T & \text{solution to (2.12)}, \\ S_I & : & g & \mapsto & \varphi_I & \text{solution to (2.14)}, \\ S_D & : & h & \mapsto & \varphi_D & \text{solution to (2.15)}, \end{array}$$

as well as the Green's functions G_T, G_I and G_D which are respectively outgoing solutions (in the sense that they satisfy the outgoing radiation condition (2.13)) to

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G_T(x,.) + k^2 G_T(x,.) & = & \delta_x & \text{in } \Omega_{M,\mathcal{O}}, \\ \Theta_M G_T(x,.) & = & 0 & \text{on } \partial M, \\ \Theta_{\mathcal{O}} G_T(x,.) & = & 0 & \text{on } \partial \mathcal{O}, \end{array} \right. \tag{2.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G_I(x,.) + k^2 G_I(x,.) & = & \delta_x & \text{in } \Omega_M, \\ \Theta_M G_I(x,.) & = & 0 & \text{on } \partial M, \end{array} \right. \tag{2.18}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G_D(x,.) + k^2 G_D(x,.) & = & 0 & \text{in } \Omega_{M,\mathcal{O}}, \\ \Theta_M G_D(x,.) & = & 0 & \text{on } \partial M, \\ \Theta_{\mathcal{O}} G_D(x,.) & = & -\Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,.) & \text{on } \partial \mathcal{O}, \end{array} \right. \tag{2.19}$$

where δ_x stands for the Dirac measure at point x, $\Theta_M = (\partial/\partial n + \mu)_{/\partial M}$ and $\Theta_{\mathcal{O}} = (\partial/\partial n)_{/\partial \mathcal{O}}$. By construction, we have $G_T = G_I + G_D$.

These functions can be expressed by means of the usual Green's function G_0 of the Helmholtz operator in the free space, *i.e.*, the outgoing solution in $\mathbb{R}^n$ to $\Delta G_0(x,.) + k^2 G_0(x,.) = \delta_x$, which is given by

$$G_0(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{if } n = 3, \\ \dfrac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) & \text{if } n = 2. \end{array} \right.$$

Indeed, we have

$$\begin{array}{l} G_I(x,.) = G_0(x,.) + \widetilde{G}_I(x,.) \text{ where } \widetilde{G}_I(x,.) = -S_I \Theta_M G_0(x,.), \\ G_D(x,.) = -S_D \Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,.) \end{array} \tag{2.20}$$

Lemma 1 *Let Ω_i stand for Ω_M if $i = I$, and for $\Omega_{M,\mathcal{O}}$ if $i = T$ or D. Then $\varphi_T = S_T g$, $\varphi_I = S_I g$ and $\varphi_D = -S_D \Theta_{\mathcal{O}} \varphi_I$ are given by*

$$\varphi_i(x) = \int_{\partial M} G_i(x,y) g(y) d\sigma(y) \quad \forall x \in \Omega_i,\ i \in \{T, I, D\}, \tag{2.21}$$

where the kernels G_i are symmetric : $G_i(x,y) = G_i(y,x)$.

Proof. Formulas (2.21) are classical. For the sake of clarity, we recall briefly how to derive them from the usual integral representation [25]

$$\varphi_i(x) = \int_{\partial \Omega_i} \left\{ G_0(x,y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}(y) - \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x,y) \varphi_i(y) \right\} d\sigma(y) \quad \forall x \in \Omega_i. \tag{2.22}$$

We use the fact that if two functions φ and ψ satisfy the Helmholtz equation either inside a bounded domain Λ, or outside Λ together with the radiation condition (2.13), then we have the reciprocity relation [25]

$$\int_{\partial \Lambda} \left\{ \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi \right\} d\sigma = 0, \tag{2.23}$$

where the normal derivative can obviously be replaced by $(\partial/\partial n + \mu)$.

For φ_I, we replace G_0 in (2.22) by $G_I - \widetilde{G}_I$, which yields two similar integral terms on ∂M. Thanks to (2.23), the term involving $\widetilde{G}_I$ vanishes. The other one reduces to the single layer potential (2.21) by virtue of the boundary conditions satisfied by φ_I and $G_I(x,.)$ (see (2.14) and (2.18)).

For φ_T, the same idea applies. The integral terms are now set on $\partial M \cup \partial \mathcal{O}$. The term which involves $\widetilde{G}_T = G_T - G_0$ again vanishes by (2.23). Split the other one, which involves G_T, into two integrals respectively on ∂M and $\partial \mathcal{O}$. Thanks to the boundary conditions in (2.12) and (2.17), the former simplifies as above to (2.21) whereas the latter vanishes.

Finally, substracting the previous representations yields (2.21) for $\varphi_D = \varphi_T - \varphi_I$.

The symmetry of G_I is easily deduced from that of G_0 by proving that the perturbation term $\widetilde{G}_I$ is also symmetric. The integral representation (2.22) of $\widetilde{G}_I(x,.)$ reads

$$\widetilde{G}_I(x,y) = \int_{\partial M} \left\{ \Theta_M G_0(y,z) \widetilde{G}_I(x,z) - G_0(y,z) \Theta_M \widetilde{G}_I(x,z) \right\} d\sigma(z),$$

where the operator Θ_M is understood with respect to z. The boundary conditions satisfied by $\widetilde{G}_I(x,.)$ and $\widetilde{G}_I(y,.)$ then yields

$$\widetilde{G}_I(x,y) = -\int_{\partial M} \Theta_M \widetilde{G}_I(y,z)\widetilde{G}_I(x,z)d\sigma(z) + \int_{\partial M} G_0(y,z)\Theta_M G_0(x,z)d\sigma(z)$$

Thanks to the reciprocity relation (2.23) applied in Ω_M for the first integral, and in M for the second one, we see that both integrals are symmetric for $(x,y) \in \Omega_M \times \Omega_M$, hence so is $\widetilde{G}_I$.

The symmetry of G_D is proved similarly, and that of G_T follows.

□

Functional details

It is now clear that (2.16) follows from the integral representation (2.21) of φ_D simply by taking its restriction on ∂M :

$$G_R(x,y) = G_D(x,y) \text{ for } (x,y) \in \partial M \times \partial M.$$

Hence Proposition 1 will be proved if we are able to justify that this double restriction actually yields a function of $L^2(\partial M \times \partial M)$. We thus have to precise the function spaces in which the kernels G_i are defined : the appropriate tool to do so is the notion of tensor product of Hilbert spaces ([3]).

All the domains considered are assumed to have Lipschitz boundaries (for instance ∂M and $\partial\mathcal{O}$ may be piece-wise smooth). For a bounded domain $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, we denote

$$\mathbf{H}(\Lambda) = \left\{\varphi \in H^1(\Lambda);\ \Delta\varphi \in L^2(\Lambda)\right\}.$$

Recall that, on one hand, the trace operator $\gamma_{\partial\Lambda}\varphi = \varphi_{/\partial\Lambda}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda)$ to $H^{1/2}(\partial\Lambda)$, and on the other hand, the normal derivative $(\partial\varphi/\partial n)_{/\partial\Lambda}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda)$ to $H^{-1/2}(\partial\Lambda)$. Moreover, for every bounded open set $\Lambda_M \subset \Omega_M$ and $\Lambda_{\mathcal{O}} \subset \Omega_{M,\mathcal{O}}$, the operators S_I and S_D are continuous from $H^{-1/2}(\partial M)$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ and from $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ (see [26]).

Lemma 2 *Let $\Lambda_M \subset \Omega_M$ and $\Lambda_{\mathcal{O}} \subset \Omega_{M,\mathcal{O}}$ be two bounded sets such that $\partial M \subset \partial\Lambda_M$, $\partial\mathcal{O} \subset \partial\Lambda_{\mathcal{O}}$ and $\overline{\Lambda_M} \cap \overline{\Lambda_{\mathcal{O}}} = \emptyset$. Then*

$$G_I \in \mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_{\mathcal{O}}) \quad \textit{and} \quad G_D \in \mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M).$$

PROOF. Formulas (2.20), which involve operators acting on the second variable y, can be rewritten in terms of tensor products of operators as

$$G_I = G_0 - (Id \otimes S_I\Theta_M)G_0,$$
$$G_D = -\,(Id \otimes S_D\Theta_{\mathcal{O}})\,G_I.$$

Let us first deal with G_I. Thanks to its symmetry, the announced property amounts to showing that $G_I \in \mathbf{H}(\Lambda_{\mathcal{O}})\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$. This clearly holds for G_0 since it is infinitely differentiable outside the diagonal $x = y$. Moreover the above mentioned properties of S_I and traces show that $S_I\Theta_M$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)$. As a consequence [3], $Id \otimes S_I\Theta_M$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_{\mathcal{O}})\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$ to itself. The conclusion follows.

For G_D, we use the previous result and the fact that $Id\otimes S_D\Theta_{\mathcal{O}}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_{\mathcal{O}})$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$.

□

We finally have to notice that since $\gamma_{\partial M}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ to $L^2(\partial M) \supset H^{1/2}(\partial M)$, the "double trace" $\gamma_{\partial M} \otimes \gamma_{\partial M}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$ to $L^2(\partial M)\widehat{\otimes}L^2(\partial M) = L^2(\partial M \times \partial M)$. Hence the above lemma yields

$$G_R = (\gamma_{\partial M} \otimes \gamma_{\partial M})G_D \in L^2(\partial M \times \partial M),$$

which is obviously symmetric. This completes the proof of Proposition 1, and thus of Theorem 1.

2.2.4 An approximate model

The model we consider in this section is an approximation of the model introduced in §2.2.2. Although more intricate in its presentation, it leads to a reduction of the computational cost of the time reversal operator for it separates the respective roles of the TRM and the scatterers. It can be seen as the first steps of an iterative method used in the context of multiple scattering problems (see, *e.g.*, [28, 80] and [7, 5] for a rigorous justification of the method, [58] for an overview). The coupled problem of §2.2.2 is solved by considering the successive reflections between the TRM and the scatterers. Here only specular waves, *i.e.*, the first reflections, are taken into account. Comparing this model with that of §2.2.2 will help us in §2.2.5 to understand the influence of multiple scattering between the obstacles and the TRM upon the eigenelements of the time reversal operator.

Considering the same incident wave $\varphi_I = S_I g$ as in §2.2.2, the diffracted field is now approximated near the TRM by a superposition of two waves : $\varphi_D = \varphi_D^{(1)} + \varphi_D^{(2)}$. The first one $\varphi_D^{(1)}$ represents the result of the diffraction of φ_I by the scatterers alone, *i.e.*, the outgoing

solution to

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi_D^{(1)} + k^2\varphi_D^{(1)} & = & 0 & \text{in } \Omega_{\mathcal{O}}, \\ \Theta_{\mathcal{O}}\varphi_D^{(1)} & = & h^{(1)} & \text{on } \partial\mathcal{O}. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

where $h^{(1)} = -\Theta_{\mathcal{O}}\varphi_I$.

The second one is the result of the diffraction of the latter by the TRM alone, *i.e.*, the outgoing solution to

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi_D^{(2)} + k^2\varphi_D^{(2)} & = & 0 & \text{in } \Omega_M, \\ \Theta_M\varphi_D^{(2)} & = & h^{(2)} & \text{on } \partial M. \end{array} \right. \tag{2.25}$$

where $h^{(2)} = -\Theta_M\varphi_D^{(1)}$.

We assume again that the TRM measures the trace of φ_D on ∂M. Hence the response of the medium is now described by the operator

$$Dg = \varphi_{D_{/\partial M}} = (\varphi_D^{(1)} + \varphi_D^{(2)})_{/\partial M}.$$

Theorem 1 holds in this case : the time reversal operator $T = \overline{D}D$ is positive, selfadjoint and compact in $L^2(\partial M)$.

The proof is similar to that of section 2.2.3. We simply have to replace the Green's function G_D by $G_D = G_D^{(1)} + G_D^{(2)}$ where $G_D^{(1)}$ and $G_D^{(2)}$ are respectively the outgoing solutions to

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G_D^{(1)}(x,.) + k^2 G_D^{(1)}(x,.) & = & 0 & \text{in } \Omega_{\mathcal{O}}, \\ \Theta_{\mathcal{O}} G_D^{(1)}(x,.) & = & -\Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,.) & \text{on } \partial\mathcal{O}, \end{array} \right.$$

and

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G_D^{(2)}(x,.) + k^2 G_D^{(2)}(x,.) & = & 0 & \text{in } \Omega_M, \\ \Theta_M G_D^{(2)}(x,.) & = & -\Theta_M G_D^{(1)}(x,.) & \text{on } \partial M. \end{array} \right.$$

Lemma 3 *The following integral representation holds :*

$$\forall x \in \Omega_{M,\mathcal{O}},\ \varphi_D(x) = \int_{\partial M} G_D(x,y) g(y) d\sigma(y),$$

where G_D is symmetric in $\Omega_{M,\mathcal{O}} \times \Omega_{M,\mathcal{O}}$.

Proof. Contrary to Lemma 1, we are not able to give an intrinsic definition of the total field $\varphi_I + \varphi_D$ by means of a problem such as (2.12) which would only depend on the incident field. We thus give a direct proof of the above integral representation, starting from the classical formula (2.22) applied to $\varphi_D^{(1)}$ in $\Omega_{\mathcal{O}}$.

Using (2.20) and (2.23) applied to $\widetilde{G}_I(x,.)$ and $\varphi_D^{(1)}$ in $\Omega_{M,\mathcal{O}}$, formula (2.22) becomes

$$\forall x \in \Omega_{M,\mathcal{O}},\ \varphi_D^{(1)}(x) = \int_{\partial M \cup \partial \mathcal{O}} \Big\{ -\Theta_\bullet G_I(x,y)\varphi_D^{(1)}(y) + G_I(x,y)\Theta_\bullet \varphi_D^{(1)}(y) \Big\} d\sigma(y).$$

where $\Theta_\bullet$ stands for Θ_M or $\Theta_{\mathcal{O}}$. Thanks to the boundary conditions satisfied by $G_I(x,.)$ and $\varphi_D^{(2)}$, the contribution on ∂M is nothing but $S_I \Theta_M \varphi_D^{(1)} = -\varphi_D^{(2)}$ by construction (see (2.25)), so the contribution on $\partial\mathcal{O}$ is exactly $\varphi_D(x)$. We thus have

$$\begin{aligned}
(2.26) \qquad \varphi_D(x) &= \int_{\partial \mathcal{O}} \Big\{ \Theta_{\mathcal{O}} G_D^{(1)}(x,y)\varphi_D^{(1)}(y) - G_I(x,y)\Theta_{\mathcal{O}}\varphi_I(y) \Big\} d\sigma(y), \\
&= \int_{\partial \mathcal{O}} \Big\{ G_D^{(1)}(x,y)\Theta_{\mathcal{O}}\varphi_D^{(1)}(y) - \Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,y)\varphi_I(y) \Big\} d\sigma(y), \\
&= \int_{\partial \mathcal{O}} \Big\{ -G_D^{(1)}(x,y)\Theta_{\mathcal{O}}\varphi_I(y) + \Theta_{\mathcal{O}} G_D^{(1)}(x,y)\varphi_I(y) \Big\} d\sigma(y), \\
&= \int_{\partial M} \Big\{ G_D^{(1)}(x,y)\Theta_M\varphi_I(y) - \Theta_M G_D^{(1)}(x,y)\varphi_I(y) \Big\} d\sigma(y).
\end{aligned}$$

The first and third equalities result from the boundary conditions satisfied by $G_D^{(1)}(x,.)$ and $\varphi_D^{(1)}$. The second one derives from the reciprocity relation (2.23) applied on one hand to $G_D^{(1)}(x,.)$ and $\varphi_D^{(1)}$ in $\Omega_{\mathcal{O}}$, and on the other hand, to $G_I(x,.)$ and φ_I in $\mathcal{O}$. The last one again results from (2.23) applied to $G_D^{(1)}(x,.)$ and φ_I in $\Omega_{M,\mathcal{O}}$. Noticing finally that $\Theta_M G_D^{(2)}(x,.) = -\Theta_M G_D^{(1)}(x,.)$, we have

$$\int_{\partial M} \Theta_M G_D^{(1)}(x,y)\varphi_I(y) d\sigma(y) = -\int_{\partial M} G_D^{(2)}(x,y)\Theta_M\varphi_I(y) d\sigma(y),$$

thanks to (2.23) applied to $G_D^{(2)}(x,.)$ and φ_I in Ω_M. Since $g = \Theta_M\varphi_I$, the integral representation of φ_D follows.

The symmetry of $G_D(x,.)$ is proved by the same argument as in Lemma 1. Since $G_D^{(1)}(x,.)$ and $G_D^{(2)}(x,.)$ play the same role as $\varphi_D^{(1)}$ and $\varphi_D^{(2)}$, we obtain for $G_D(x,y)$ a similar formula as (2.26) :

$$G_D(x,y) = \int_{\partial \mathcal{O}} \Big\{ \Theta_{\mathcal{O}} G_D^{(1)}(y,z) G_D^{(1)}(x,z) - G_I(y,z)\Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,z) \Big\} d\sigma(z).$$

where both terms are symmetric by (2.23).

We prove now that $G_R = G_{D_{/\partial M \times \partial M}} \in L^2(\partial M \times \partial M)$. We define first the operators

$$\begin{array}{rcccl}
S_D^{(1)} & : & h^{(1)} & \mapsto & \varphi_D^{(1)} \quad \text{solution to (2.24)} , \\
S_D^{(2)} & : & h^{(2)} & \mapsto & \varphi_D^{(2)} \quad \text{solution to (2.25)} ,
\end{array}$$

The operators $S_D^{(1)}$ and $S_D^{(2)}$ are continuous from $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ and from $H^{-1/2}(\partial M)$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)$ (see [26]). The Green's function $G_D = G_D^{(1)} + G_D^{(2)}$ is then given by :

$$G_D(x,.) = -S_D^{(1)}\Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,.) + S_D^{(2)}\Theta_M S_D^{(1)}\Theta_{\mathcal{O}} G_I(x,.)$$

which can be rewritten in terms of tensor products of operators as

$$G_D = -\left(Id \otimes S_D^{(1)}\Theta_{\mathcal{O}}\right) G_I + \left(Id \otimes S_D^{(2)}\Theta_M\right)\left(Id \otimes S_D^{(1)}\Theta_{\mathcal{O}}\right) G_I.$$

$Id \otimes S_D^{(1)}\Theta_{\mathcal{O}}$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_{\mathcal{O}})$ to $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$ and $Id \otimes S_D^{(2)}\Theta_M$ is continuous from $\mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$ to itself ([3]) which proves that $G_D \in \mathbf{H}(\Lambda_M)\widehat{\otimes}\mathbf{H}(\Lambda_M)$ and thus that $G_R \in L^2(\partial M \times \partial M)$, we conclude finally Theorem 1.

□

2.2.5 Two-dimensional numerical simulation

To solve numerically problems (2.14), (2.15), (2.24) and (2.25), we formulate them in bounded domains to apply a finite element method. We use the so-called coupling method between integral representation and finite elements, which is a non singular alternative to the well-known integral equation techniques. This method has been introduced by Jami and Lenoir [51] in hydrodynamics, and then extended to many other wave propagation problems.

Bounded domain formulation

We describe the method only for problem (2.24), but the same technique is also applied for the other ones. We consider a bounded domain Ω' surrounding $\mathcal{O}$ and included in Ω_O (see figure 2.1) and we introduce the following problem set in the domain Ω'

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi' + k^2\varphi' & = & 0 & \Omega', \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial n} & = & h & \partial\mathcal{O}, \\ \Theta_\Sigma\varphi' & = & \Theta_\Sigma \displaystyle\int_{\partial\mathcal{O}} \left\{ G_0(.,y)\frac{\partial\varphi'}{\partial n}(y) - \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(.,y)\varphi'(y)\right\} d\sigma(y) & \Sigma, \end{array}\right. \tag{2.27}$$

where $\Sigma = \partial\Omega' \backslash \partial\mathcal{O}$ and $\Theta_\Sigma = (\partial/\partial n + \beta)$, β is an arbitrary complex parameter.

It is clear that if $\varphi_D^{(1)}$ is a solution of (2.24) then $\varphi' = \varphi_{D_{/\Omega'}}^{(1)}$ is solution of problem (2.27). Similarly, provided $\mathrm{Im}(\beta) \neq 0$, every solution φ' of (2.27) can be uniquely extended to a solution $\varphi_D^{(1)}$ of (2.24) by the integral representation formula on $\partial\mathcal{O}$:

$$\forall x \in \Omega_{\mathcal{O}},\ \varphi_D^{(1)}(x) = \int_{\partial\mathcal{O}} \left\{ G_0(x,y)\frac{\partial\varphi'}{\partial n}(y) - \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x,y)\varphi'(y)\right\} d\sigma(y). \tag{2.28}$$

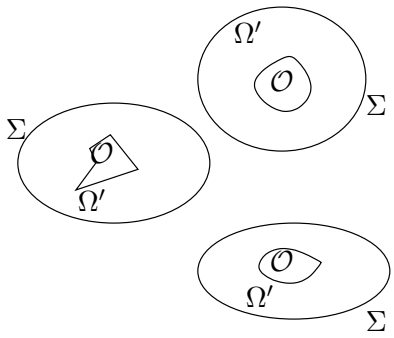


FIG. 2.1 – Bounded domain Ω'

The variational formulation of the problem (2.27) is :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Find } \varphi' \in H^1(\Omega') \text{ such that } \forall \psi \in H^1(\Omega'), \text{ we have} \\
\displaystyle\int_{\Omega'} \nabla\varphi'.\overline{\nabla\psi} - k^2 \int_{\Omega'} \varphi'\overline{\psi} - \beta \int_{\Sigma} \varphi'\overline{\psi} + \\
\displaystyle\int_{\Sigma} \overline{\psi(x)} \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi'(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_x} + \beta \right) \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x,y) d\sigma(y) d\sigma(x) = \\
\displaystyle -\int_{\partial\mathcal{O}} h\overline{\psi} + \int_{\Sigma} \overline{\psi(x)} \int_{\partial\mathcal{O}} h(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_x} + \beta \right) G_0(x,y) d\sigma(y) d\sigma(x).
\end{array}
\right. \tag{2.29}
$$

Finally, we discretize problem (2.29) to obtain a linear system that we solve numerically.

Numerical results

All the numerical results are obtained by the code MELINA [57]. We consider an oblong mirror of width 8 and height 1 and two half-disk obstacles of diameters 4 and 2 (see figure 2.2). We denote by D the distance between the mirror and the obstacles. The distance between the scatterers is $\delta = 2$. We investigate the two cases : $D = 3$ and $D = 8$. We consider here a Neumann condition on the boundary of the mirror ∂M ($\mu = 0$, that is, the case of a large acoustic impedance of the transducers).

Figure 2.3 (respectively, 2.4) shows the amplitude of the total field corresponding to the emission of the first (respectively, second) eigenvector associated to $\lambda_1 = 0.0499$ if $D = 8$ and $\lambda_1 = 0.2211$ if $D = 3$ (respectively, $\lambda_2 = 0.0191$ if $D = 8$ and $\lambda_2 = 0.0534$ if $D = 3$) in the case of the first model presented in section 2.2.2 and where $k = 3.14$ (the wavelength $l_w = 2\pi/k = 2$ is then equal to the distance between the obstacles δ). We observe that the wave is focused on the biggest obstacle (respectively, the smallest). When emitting the third eigenvector associated to $\lambda_3 = 0.0002$ if $D = 8$ and $\lambda_3 = 0.0085$ if $D = 3$, we see in figure 2.5 that the wave again focuses on the biggest scatterer, although it seems less concentrated in its vicinity than for the first eigenvector. These results essentially show that selective focusing,

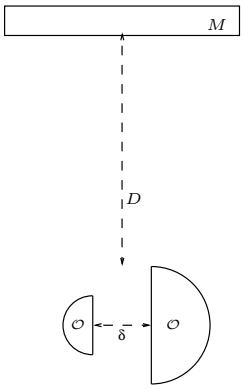


FIG. 2.2 – Geometry of the problem

which is known to occur for small and distant enough scatterers [44], is achieved although the size of the obstacles, the distance between them and the wavelength are of the same order.

Figure 2.10 shows the first four eigenvalues of the time reversal operator T according to the wave number k in the case of the first model presented in section 2.2.2 where the interactions between the mirror and the obstacles are taken into account and where the distance D between them is respectively 8 and 3. Figure 2.11 shows the same results in the case of the second model, where these interactions are approximated by only the first reflections.

We can first notice on these figures that there is only one significant eigenvalue λ_1 at low frequencies, which follows from the fact that the wavelength l_w is large compared to the distance δ between the two obstacles, so that the mirror can not distinguish between them and see them as only one. For $k = 0.325$, (that is, $l_w \simeq 19$), this is illustrated by Figure 2.6 (respectively, 2.7) which shows the amplitude of the total field corresponding to the emission of the first (respectively, second) eigenvector associated to $\lambda_1 = 0.6994$ if $D = 8$ and $\lambda_1 = 3.2717$ if $D = 3$ (respectively, $\lambda_2 = 0.0006$ if $D = 8$ and $\lambda_2 = 0.0265$ if $D = 3$) in the case of the first model presented in section 2.2.2.

When k increases, figures 2.10 and 2.11 show that there are two significant eigenvalues : the gap with the third eigenvalue is pronounced when $D = 8$, and becomes smaller when $D = 3$. This confirms a well-known effect : this gap increases when the angular aperture under which the TRM is seen from the obstacles decreases.

We note the presence of oscillations of the first two eigenvalues of T in the case of the first model (figure 2.10) contrary to the case of the second model (figure 2.11). To understand this, we show in figure 2.12 the first two eigenvalues of the two models where respectively $D = 3$ and $D = 8$. We remark that the eigenvalues for the first model oscillate around the corresponding eigenvalues for the second model. This can be explained by the fact that

the interactions between the mirror and the obstacles can be constructive or destructive according to the distance between the mirror and the obstacles. For the greatest eigenvalue, we note the dependence of the period of oscillations on the distance between the mirror and the obstacles : $\Delta k \simeq \pi/D$. More precisely, the interactions between the mirror and the obstacles are constructive for the wave numbers $k_n \simeq n\pi/D,\ n \in \mathbb{N}^*$ (which correspond to local maxima of λ_1) and destructive for $k_n \simeq ((n-1/2)\pi)/D,\ n \in \mathbb{N}^*$. This can be explained by the fact that the wave numbers $n\pi/D,\ n \in \mathbb{N}^*$ represent the eigenvalues of the operator $-\Delta$ with Neumann conditions on the boundaries in the one dimensional domain $[0, D]$, and the corresponding eigenfunctions are $\varphi_n(y) = \cos(k_n y),\ y \in [0, D]$.

To study the interactions between the obstacles, we show now in figure 2.13 the first and second eigenvalues of T for the approximate model and for $D = 3$, together with the first eigenvalue of T for the same model but with a new geometrical configuration in which only the biggest or the smallest obstacle is present. We observe that, at medium frequencies, there is a good coincidence between the first eigenvalue of T corresponding to the case where the two obstacles are present and the one where there is only the biggest obstacle, which explains that the interactions due to the smallest obstacle are negligible. Meanwhile, the second eigenvalue of T corresponding to the case where the two obstacles are present oscillates smoothly around the first eigenvalue where there is only the smallest obstacle, which proves that the interactions due to the biggest obstacle are important.

Figure 2.10 shows that the two greatest eigenvalues become very close near particular values of k. When the time reversal operator has a double eigenvalue, which occurs for instance in the case of two identical targets, one generally requires additional information to identify the selective focusing fields within the two-dimensional eigenspace. Here the slight distance between both eigenvalues seems sufficient to identify these fields. Consider for example the case $D = 3$ and $k = 0.875$, where $\lambda_1 = 0.1760$ and $\lambda_2 = 0.1637$. The associated eigenvectors generate the fields represented in figures 2.8 and 2.9 (right). Although both targets are separated by less than one third of a wavelength, the TRM clearly distinguishes them, contrary to the low frequency situation of figure 2.6. This effect results from the proximity of the TRM which acts in the near-field. Indeed if the TRM is moved away to $D = 8$ with the same wavenumber (figures 2.8 and 2.9, left), both targets are seen as a single one, as in the above mentioned low frequency case.

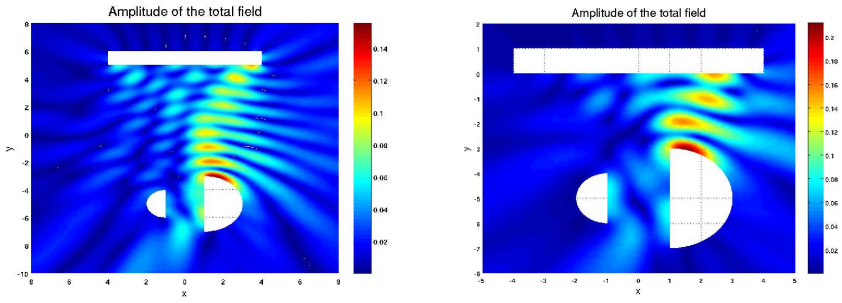


FIG. 2.3 – Emission of the first eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$).

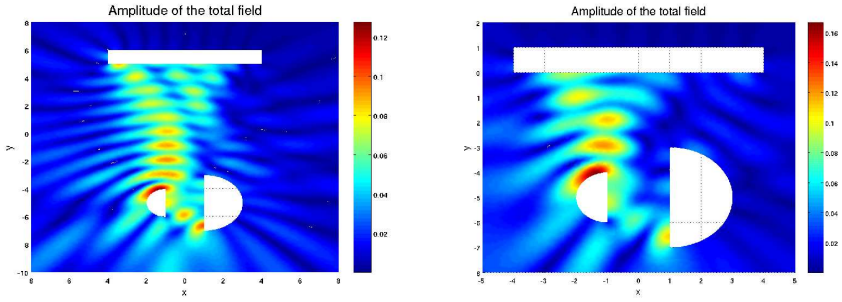


FIG. 2.4 – Emission of the second eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$).

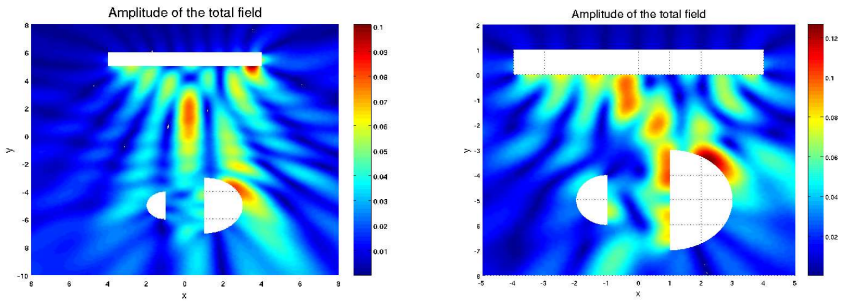


FIG. 2.5 – Emission of the third eigenvector for $k = 3.14$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$).

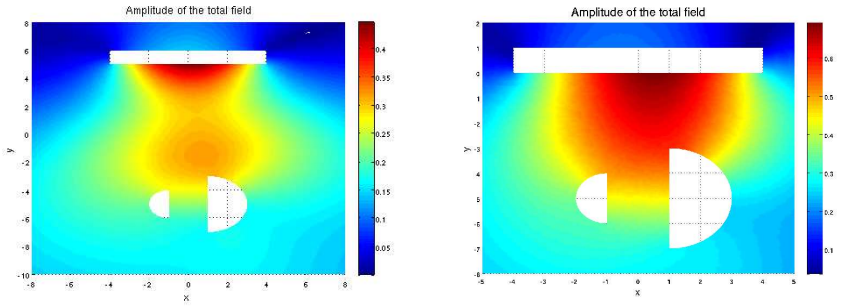


FIG. 2.6 – Emission of the first eigenvector for $k = 0.325$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$).

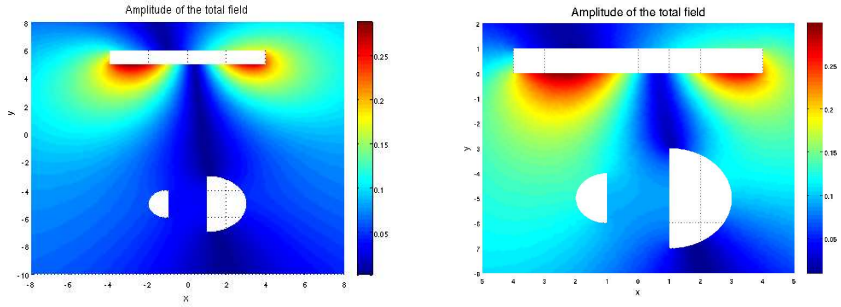


FIG. 2.7 – Emission of the second eigenvector for $k = 0.325$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$).

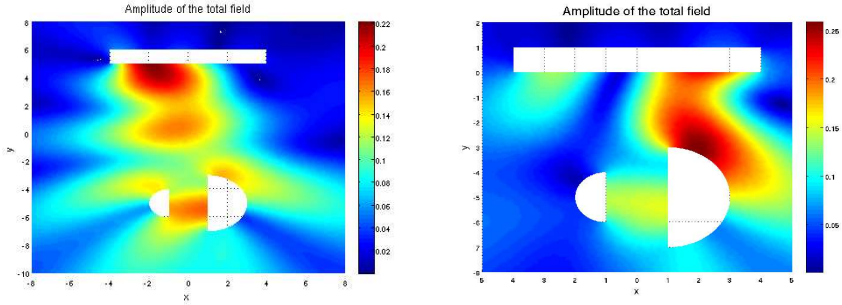


FIG. 2.8 – Emission of the first eigenvector for $k = 0.875$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$)

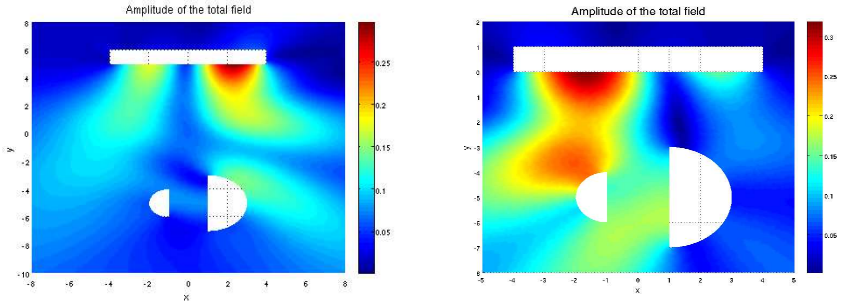


FIG. 2.9 – Emission of the second eigenvector for $k = 0.875$ (left : $D = 8$, right : $D = 3$)

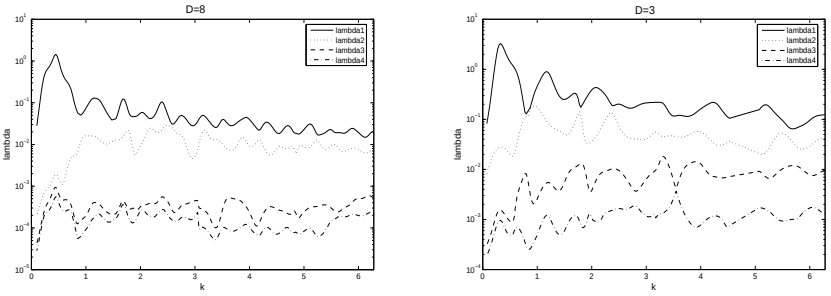


FIG. 2.10 – First model : 4 largest eigenvalues of T according to k.

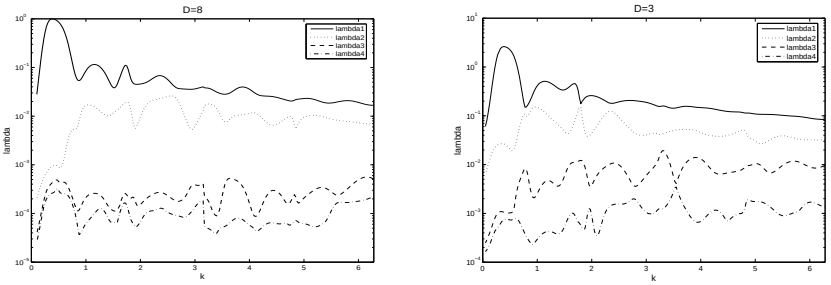


FIG. 2.11 – Second model : 4 largest eigenvalues of T according to k.

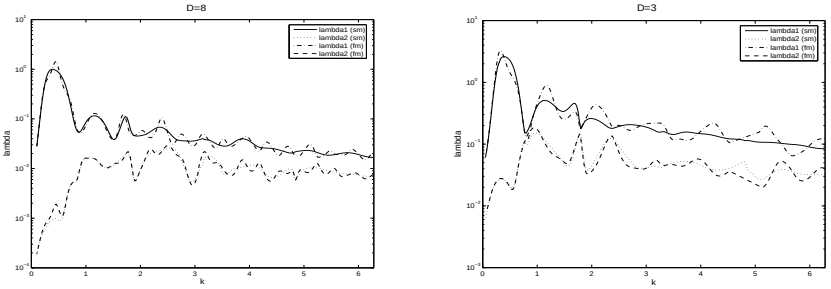


FIG. 2.12 – The first two eigenvalues for the 2 models.

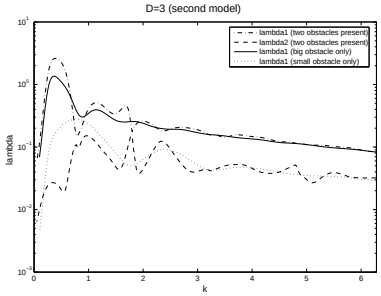


FIG. 2.13 – Analysis of the interactions between obstacles.

Chapitre 3

Retournement temporel dans un guide d'onde

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le retournement temporel dans l'espace libre, en particulier l'effet des interactions entre les obstacles eux-mêmes et entre les obstacles et le MRT sur la focalisation. Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier le retournement temporel dans le cas d'un guide d'ondes [89, 36, 63]. Il s'agit donc d'étudier l'effet des reflexions multiples dues aux interfaces du guide sur la focalisation. Les applications de ce type de configuration sont très variées, nous citons par exemple la communication sous marine [39] dont le but est de transmettre de l'information uniquement au sous-marin, il s'agit donc de focaliser l'énergie émise autour de celui-ci.

Nous nous intéressons ici uniquement aux interactions entre les obstacles et les interfaces du guide et entre les obstacles eux-mêmes, celles entre le MRT et les obstacles étant négligées. Pour cela, nous allons considérer un MRT non intrusif constitué d'un nombre fini de transducteurs comme dans Prada [74]. Il s'agit d'une situation réaliste dans le cas de la communication avec un sous-marin. En effet, les transducteurs sont disposés le long d'un cable immergé à partir de la surface.

Nous allons montrer le caractère autoadjoint positif et compact de l'opérateur de retournement temporel en utilisant une approche intégrale basée sur la fonction de Green du guide. Nous énonçons pour cela un principe de réciprocité dont la preuve est basée sur le développement en série de la solution à l'extérieur des obstacles, par décomposition sur les modes propres du guide.

3.1 Diffraction dans un guide

3.1.1 Présentation du problème

Considérons un guide d'ondes bidimensionnel de longueur infini et de hauteur H qu'on note $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x_2 \leq H\}$ contenant des obstacles diffractants. Une série de N_t transducteurs *ponctuels* sont disposés en ligne à l'abscisse $x_1 = a_1$. On note par $\mathcal{O}$ la réunion de ces obstacles et par $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ la réunion de leurs frontières. La frontière de Ω est $\partial\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = H\}$ (voir figure 3.1).

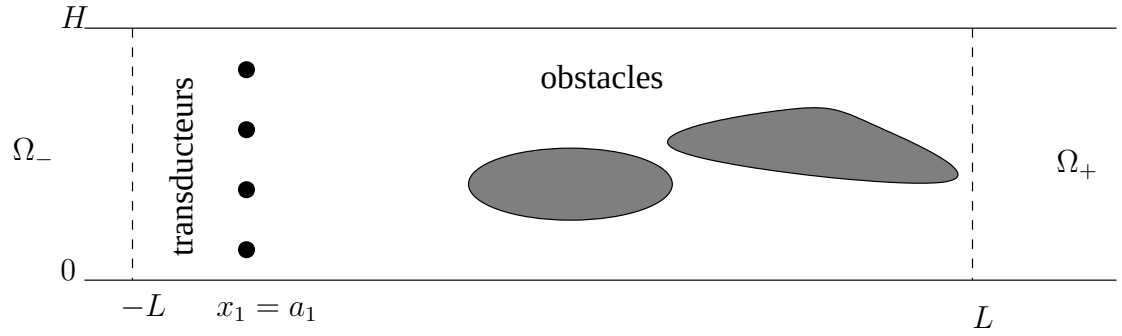


FIG. 3.1 – Guide d'ondes infini.

Les transducteurs génèrent à l'étape d'émission une onde incidente φ_I. Cette onde va être diffractée par les obstacles pour générer un champ diffracté φ_D solution du problème :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi_D + k^2\varphi_D = 0 & \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial\varphi_D}{\partial n} = -\dfrac{\partial\varphi_I}{\partial n} & \Gamma \\ \varphi_D = 0 & \partial\Omega \\ + \text{ condition de rayonnement} \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{aligned} &\Omega_L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ -L < x_1 < L,\ 0 < x_2 < H\} \setminus \overline{\mathcal{O}}, \\ &\Gamma_{-L} = \{(-L, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x_2 < H\}\ , \\ &\Gamma_L = \{(L, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x_2 < H\}. \\ &\Sigma = \partial\Omega_L \setminus (\Gamma_{\pm L} \cup \Gamma) = \{(x_1, x_2);\ -L < x_1 < L,\ x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = H\}, \\ &\Omega_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 < -L,\ 0 < x_2 < H\}, \\ &\Omega_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > L,\ 0 < x_2 < H\}, \end{aligned}$$

L est choisi de manière à ce que $\mathcal{O}$ soit inclus dans Ω_L.

Le problème (3.1) est posé dans le domaine non borné $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. Pour montrer l'existence et l'unicité de ce problème, nous allons d'abord étudier un problème équivalent posé sur

le domaine borné Ω_L. Les conditions aux limites sur les frontières $\Gamma_{\pm L}$ sont obtenues en développant en série la solution φ_D dans les domaines extérieurs Ω_+ et Ω_-.

Dans le paragraphe suivant, nous allons expliciter le calcul de la solution φ_D du problème de diffraction (3.1) dans Ω_+ (resp. Ω_-) en fonction de sa trace sur Γ_L (resp. Γ_{-L}) ainsi que la condition de rayonnement à l'infini de cette solution.

3.1.2 Condition de rayonnement

Comme la géométrie du guide dans Ω_+ (resp. Ω_-) est séparable, nous allons montrer que toute fonction φ qui satisfait l'équation de Helmholtz

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{3.2}$$

dans Ω_+ (resp. Ω_-) avec condition de Dirichlet homogène aux bords $x_2 = 0$ et $x_2 = H$ peut se décomposer sous la forme d'une série $\varphi(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(x_1, x_2)$ dont chacun des termes est une solution à variables séparées en coordonnées cartésiennes (x_1, x_2). Nous traitons d'abord le cas de Ω_+.

Nous cherchons alors des solutions de la forme :

$$\phi_n(x_1, x_2) = X_n(x_1)w_n(x_2), \quad \forall x_1 > L \text{ et } x_2 \in]0, H[.$$

On vérifie que X_n et w_n sont respectivement solutions de :

$$X_n''(x_1) + (k^2 - \lambda_n)X_n(x_1) = 0, \quad \forall x_1 > L \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} -w_n''(x_2) = \lambda_n w_n(x_2), & \forall x_2 \in]0, H[\\ w_n(0) = w_n(H) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

pour un certain scalaire λ_n à déterminer.

Il est facile de vérifier que le problème aux valeurs propres (3.4) correspondant à l'opérateur $-\partial^2/\partial x_2^2$ dans $H_0^1(0, H)$ vérifie la propriété suivante :

Proposition 3.1.1

$$\begin{cases} \lambda_n &= (\dfrac{n\pi}{H})^2, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ w_n(x_2) &= \sqrt{\dfrac{2}{H}}\sin(\dfrac{n\pi x_2}{H}) \end{cases} \tag{3.5}$$

On rappelle le théorème suivant [43] :

Théorème 3.1.1 *La famille* $\{w_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *forme une base orthonormale de* $L^2(0,H)$ *: toute fonction* $v \in L^2(0,H)$ *se développe sous la forme :*

$$v = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (v, w_n)_{L^2(0,H)} w_n$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre l'équation (3.3) portant sur la variable x_1. Posons :

$$\mu_n = \begin{cases} (k^2-\lambda_n)^{\frac{1}{2}} & \text{pour} \quad k^2 \geq \lambda_n \\ i(\lambda_n - k^2)^{\frac{1}{2}} & \text{pour} \quad k^2 < \lambda_n \end{cases} \tag{3.6}$$

les solutions de (3.3) s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha_n e^{i\mu_n x_1} + \beta_n e^{-i\mu_n x_1} & \text{si} \quad \mu_n \neq 0 \\ \alpha_n + \beta_n x_1 & \text{si} \quad \mu_n = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

ces solutions s'expriment comme la superposition des solutions de type ondes progressives ou non suivant la valeur du cœfficient μ_n. En effet,

1. Si μ_n est réel non nul, une telle solution apparaît comme la somme d'une onde divergente (ou sortante) $X_n^s = \alpha_n e^{i\mu_n x_1}$ et d'une onde convergente (ou rentrante) $X_n^r = \beta_n e^{-i\mu_n x_1}$.
2. Si μ_n est imaginaire pur, une telle solution apparaît comme la somme d'une onde exponentiellement croissante ($\beta_n e^{|\mu_n| x_1}$) et d'une onde exponentiellement décroissante ($\alpha_n e^{-|\mu_n| x_1}$) lorsque $x_1 \to +\infty$.
3. Si μ_n est nul, une telle solution apparaît comme la superposition d'un champ constant suivant x_1, et d'un champ linéaire (non borné à l'infini).

Afin de ne retenir que les solutions correspondant à une onde diffractée *physiquement admissible*, on utilise la condition suivante (cf. [76]) appelée condition d'onde sortante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} X_n(x_1) & = & O(1) & x_1 \to +\infty \\ \dfrac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}x_1}(x_1) - i\mu_n X_n(x_1) & = & o(1) & x_1 \to +\infty \end{cases} \tag{3.8}$$

Il est donc possible de distinguer les solutions, cette distinction repose sur leurs comportements au voisinage de l'infini ($x_1 \to +\infty$). Ainsi dans (3.7) ne sont retenues que :

1. Les ondes se propageant vers $+\infty$ pour les valeurs μ_n réelles non nulles :

$$\text{si } \lambda_n < k^2 \text{ alors} \quad X_n(x_1) = \alpha_n e^{i\mu_n x_1} = \alpha_n e^{i\sqrt{k^2-\lambda_n} x_1},\ \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

2. Les ondes exponentiellement décroissantes pour les valeurs μ_n imaginaires non nulles :

$$\text{si } \lambda_n > k^2 \text{ alors } X_n(x_1) = \alpha_n^{'} e^{-|\mu_n| x_1} = \alpha_n^{'} e^{-\sqrt{\lambda_n - k^2} x_1},\ \alpha_n^{'} \in \mathbb{C}.$$

3. L'état borné pour les valeurs μ_n nulles :

$$\text{si } \lambda_n = k^2 \text{ alors } X_n(x_1) = \alpha_n^{"},\ \alpha_n^{"} \in \mathbb{C}.$$

En écrivant la décomposition spectrale de la trace $\varphi_{/\Gamma_L}$ sur la base $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient une formule explicite pour chacune des constantes α_n, $\alpha_n^{'}$ et $\alpha_n^{''}$ et on déduit alors l'expression du champ diffracté dans le domaine extérieur $x_1 > L$:

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\varphi(L,.), w_n)_{L^2(0,H)} e^{i\sqrt{k^2-\lambda_n}(x_1-L)} w_n(x_2) \tag{3.9}$$

φ s'exprime alors comme la somme d'un nombre fini d'ondes progressives (modes guidés tels que $\lambda_n < k^2$), d'un nombre infini d'ondes exponentiellement décroissantes lorsque x_1 tend vers $+\infty$ (modes évanescents tels que $\lambda_n > k^2$) et d'une onde stationnaire (l'onde stationnaire n'existe que dans le cas où k^2 est une valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(0,H)$ c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_n = k^2$).

Remarque 3.1.1 *Nous pouvons obtenir également une expression explicite de φ pour $x_1 < -L$ en utilisant le fait que φ vérifie la condition d'onde sortante à l'infini lorsque $x_1 \to -\infty$.*

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\varphi(-L,.), w_n)_{L^2(0,H)} e^{-i\sqrt{k^2-\lambda_n}(x_1+L)} w_n(x_2), \quad x_1 < -L \tag{3.10}$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier l'existence et l'unicité d'une solution φ_D du problème (3.1). Pour cela, nous allons d'abord poser le problème dans le domaine borné Ω_L en écrivant des conditions aux limites exactes sur les frontières Γ_L et Γ_{-L} et montrer l'équivalence entre les deux problèmes. Ensuite, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution du problème posé en domaine borné par l'alternative de Fredholm.

3.1.3 Problème réduit au domaine borné

Soit $u_\pm$ une fonction définie sur le bord $\Gamma_{\pm L}$. On considère le problème suivant posé dans le domaine extérieur $\Omega_\pm$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi_\pm \text{ dans } H^1_{loc}(\Omega_\pm), \text{ tel que} \\ \begin{array}{rcccc} \Delta\varphi_\pm + k^2\varphi_\pm & = & 0 & \text{dans} & \Omega_\pm \\ \varphi_\pm & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega_\pm \setminus \Gamma_{\pm L} \\ \varphi_\pm & = & u_\pm & \text{sur} & \Gamma_{\pm L} \end{array} \end{array} \right. \tag{3.11}$$

$H^1_{loc}(\Omega_\pm)$ est défini par :

$$H^1_{loc}(\Omega_\pm) = \{\varphi \in H^1(\Lambda) \text{ pour tout domaine borné } \Lambda \subset \Omega_\pm\}$$

Nous pouvons alors définir l'opérateur $T_\pm$ qui à toute fonction $u_\pm$ définie sur $\Gamma_{\pm L}$, associe la dérivée normale de la solution à variables séparées $\varphi_\pm(x_1, x_2)$ du problème extérieur (3.11) défini dans $\Omega_\pm$.

$$\begin{array}{rccc} T_\pm : & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) \\ & u_\pm & \longmapsto & (\dfrac{\partial \varphi_\pm}{\partial n})_{/\Gamma_{\pm L}}. \end{array}$$

Si $u_\pm = w_n$ alors, en utilisant l'expression de φ_+ (soit (3.9)) et de φ_- (soit (3.10)), on aura $T_\pm w_n = i\mu_n w_n$. L'opérateur $T_\pm$ est défini donc par :

$$\begin{array}{rccc} T_\pm : & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) \\ & u_\pm & \longmapsto & T_\pm u_\pm = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} i\mu_n (u_\pm, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} w_n \end{array} \tag{3.12}$$

où $(.,.)_{0,\Gamma_{\pm L}} := (.,.)_{L^2(0,H)}$.

Lemme 3.1.1 *L'opérateur $T_\pm$ est un opérateur linéaire continu sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L})$.*

On est en mesure à présent de définir un problème en domaine borné sur Ω_L :

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} \Delta\varphi + k^2\varphi & = & 0 & \text{dans} & \Omega_L \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} & = & f & \text{sur} & \Gamma \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} & \Sigma \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} & = & T_\pm \varphi_{|\Gamma_{\pm L}} & \text{sur} & \Gamma_{\pm L} \end{array} \right. \tag{3.13}$$

où $f = -\partial\varphi_I/\partial n$.

Remarque 3.1.2 *L'opérateur $T_\pm$ traduit en fait la condition d'onde sortante pour le problème (3.1).*

Dans la suite, nous présentons succintement les résultats théoriques sans démonstrations qui mènent aux résultats d'équivalence du problème (3.1) avec le problème posé en domaine borné (3.13), d'existence et d'uncité de la solution du problème (3.1).

3.1.4 Résultat d'existence et d'unicité

Proposition 3.1.2 *[43, 76] Résultat d'équivalence*
Le problème (3.1) admet une solution ssi il en va de même pour (3.13), plus précisément :

a) si φ est solution de (3.1), alors $\varphi_{|\Omega_L}$ est solution de (3.13).

b) si φ est solution de (3.13), alors il existe un unique prolongement φ' de φ à tout $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$, tel que φ' soit solution du problème initial (3.1).

Nous venons de trouver une forme explicite diagonale de l'opérateur $T_\pm$ et d'établir l'équivalence entre le problème initial (3.1) et le problème réduit (3.13). Il s'agit maintenant de démontrer l'existence d'une solution unique pour le problème (3.13). Pour cela, on va vérifier que ce problème entre dans le cadre de l'alternative de Fredholm qui nous permet de conclure à ce résultat d'existence à partir de la propriété d'unicité. Commençons par écrire une formulation variationnelle de (3.13). On considère la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ définie sur $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L) = \{\varphi \in H^1(\Omega_L);\ \varphi_{/\Sigma} = 0\}$ par :

$$a(\varphi,\psi) = \int_{\Omega_L} \nabla\varphi\nabla\overline{\psi} - k^2 \int_{\Omega_L} \varphi\overline{\psi} - t_+(\varphi,\psi) - t_-(\varphi,\psi).$$

avec $t_\pm(\varphi,\psi) =< T_\pm\varphi_{|\Gamma_{\pm L}}, \psi_{|\Gamma_{\pm L}} >_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_{\pm L}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} i\mu_n(\varphi_{|\Gamma_{\pm L}}, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}}\overline{(\psi_{|\Gamma_{\pm L}}, w_n)}_{0,\Gamma_{\pm L}}$.
Une formulation variationnelle du problème réduit (3.13) est la suivante :

$$\text{(3.14)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad \varphi \in H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L) \text{ tel que } \forall\psi \in H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L) \\ a(\varphi,\psi) = (f,\psi)_{0,\Gamma} := (f,\psi)_{L^2(\Gamma)}\,. \end{cases}$$

Pour montrer que le problème variationnel (3.14) relève bien de l'alternative de Fredholm, il nous faut décomposer la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ en deux parties dont l'une est associée à un isomorphisme de $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$ et l'autre à un opérateur compact sur $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$ (on utilisera la compacité des injections de Sobolev en domaine borné). Introduisons pour cela les opérateurs K et J définis pour tout φ et ψ dans $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$ par :

$$\begin{aligned} (J\varphi,\psi)_{1,\Omega_L} &= (\varphi,\psi)_{1,\Omega_L} + \sum_{\{n\in\mathbb{N}^*,\lambda_n-k^2>0\}} \sqrt{\lambda_n-k^2}(\varphi_{|\Gamma_L}, w_n)_{0,\Gamma_L}\overline{(\psi_{|\Gamma_L}, w_n)}_{0,\Gamma_L} \\ &\quad + \sum_{\{n\in\mathbb{N}^*,\lambda_n-k^2>0\}} \sqrt{\lambda_n-k^2}(\varphi_{|\Gamma_{-L}}, w_n)_{0,\Gamma_{-L}}\overline{(\psi_{|\Gamma_{-L}}, w_n)}_{0,\Gamma_{-L}} \\ (K\varphi,\psi)_{1,\Omega_L} &= -(1+k^2)(\varphi,\psi)_{0,\Omega_L} - i \sum_{\{n\in\mathbb{N}^*,\lambda_n-k^2\le 0\}} \sqrt{k^2-\lambda_n}(\varphi_{|\Gamma_L}, w_n)_{0,\Gamma_L}\overline{(\psi_{|\Gamma_L}, w_n)}_{0,\Gamma_L} \\ &\quad -i \sum_{\{n\in\mathbb{N}^*,\lambda_n-k^2\le 0\}} \sqrt{k^2-\lambda_n}(\varphi_{|\Gamma_{-L}}, w_n)_{0,\Gamma_{-L}}\overline{(\psi_{|\Gamma_{-L}}, w_n)}_{0,\Gamma_{-L}} \end{aligned}$$

Le théorème de Représentation de Riesz nous assure qu'on a défini des opérateurs bornés sur $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$. La formulation variationnelle s'écrit alors sous la forme équivalente :

$$\text{(3.15)} \qquad (J+K)\varphi = F.$$

où F désigne l'élément de $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$ défini par :

$$\text{(3.16)} \qquad (F,\psi)_{1,\Omega_L} = (f,\psi)_{0,\Gamma} \ \ \forall\psi \in H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L).$$

Il est clair que l'opérateur J est un isomorphisme de $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$, ceci découle de la propriété de cœrcivité puisque :

$$(J\varphi,\varphi)_{1,\Omega_L} \ge \|\varphi\|^2_{1,\Omega_L} \ \ \forall\varphi \in H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L).$$

Il suffit d'étudier séparément les différents termes qui définissent l'opérateur K. Posons pour cela :

$$K = -(1+k^2)K_1 - \sum_{\{n\in\mathbb{N}^*, \lambda_n - k^2 \leq 0\}} i\mu_n (T_{+,n} + T_{-,n}).$$

où,

1. $(K_1\varphi, \psi)_{1,\Omega_L} = (\varphi, \psi)_{0,\Omega_L}$
2. $(T_{\pm,n}\varphi, \psi)_{1,\Omega_L} = (\varphi_{|\Gamma_{\pm L}}, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} \overline{(\psi_{|\Gamma_{\pm L}}, w_n)}_{0,\Gamma_{\pm L}}$.

et il est facile de vérifier que (cf. [43]) :

Lemme 3.1.2 *L'opérateur K_1 est un opérateur compact sur $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$.*

Lemme 3.1.3 *Les opérateurs $T_{\pm,n}$ sont de rang 1, ils sont par conséquent compacts.*

Des deux lemmes précédents, on a le résultat suivant :

Lemme 3.1.4 *L'opérateur K est un opérateur compact sur $H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L)$.*

Nous sommes en mesure d'appliquer les résultats relatifs à l'alternative de Fredholm. Celle-ci nous assure de l'existence d'une solution au problème (3.15) dès que l'on aura démontré l'unicité de cette solution.

Proposition 3.1.3 *:*

1. *Le problème (3.13) admet une solution unique, sauf pour au plus une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de valeurs de k ne pouvant s'accumuler qu'à l'infini.*
2. *Le point 1. est aussi vérifié pour le problème initial (3.1) en domaine non borné*

Le résultat d'unicité est établi par Razafierivelo [76] dans un cadre légèrement différent et pour la commodité du lecteur nous redonnons succintement la démonstration :

Démonstration. Le problème d'unicité revient à considérer le problème (3.13) pour $f = 0$. C'est le problème que vérifierait la différence de deux solutions distinctes supposées exister. Soit :

$$\left\{\begin{array}{rcccc} \Delta\varphi + k^2\varphi & = & 0 & \text{dans} & \Omega_L \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} & \Gamma \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} & \Sigma \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & = & T_{\pm}\varphi_{|\Gamma_{\pm L}} & \text{sur} & \Gamma_{\pm L} \end{array}\right. \tag{3.17}$$

On reformule ce problème de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcccc} -\Delta\varphi & = & \lambda(k)\varphi & \text{dans} & \Omega_L \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} & \Gamma \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} & \Sigma \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & = & T_{\pm}\varphi_{|\Gamma_{\pm L}} & \text{sur} & \Gamma_{\pm L} \end{array}\right. \tag{3.18}$$

On constate que ce dernier s'interprète comme un problème de recherche de valeurs propres λ. Ces valeurs propres dépendent de k par l'intermédiaire de la condition sur la frontière $\Gamma_{\pm L}$ et doivent de plus vérifier $\lambda(k) = k^2$. Il s'agit donc de trouver les valeurs de k telles que k^2 soit valeur propre de (3.18). Nous sommes donc amenés à étudier le spectre de l'opérateur associé à la forme bilinéaire du problème (3.18). Cependant, en écrivant la formulation variationnelle, l'opérateur associé n'est pas auto-adjoint, à cause de la présence des termes imaginaires purs dans $T_{\pm}$ $\left(i\mu_n(\varphi, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}},\ \text{pour } \lambda_n < k^2\right)$.

Nous pouvons nous ramener à un opérateur auto-adjoint en faisant la remarque suivante dont on peut trouver la démonstration dans [76] :

Lemme 3.1.5 *Soit φ solution de (3.17) alors φ vérifie :*

$$(\varphi, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \textit{tel que } \lambda_n < k^2.$$

Si φ est un vecteur propre de (3.18), autrement dit solution de (3.17), alors φ est un vecteur propre de l'opérateur suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} D(A) & = & \{\varphi \in H^1_{0,\Sigma}(\Omega_L),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } \Gamma,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \widetilde{T}_{\pm}(\varphi_{|\Gamma_{\pm L}}) \quad \textit{sur} \quad \Gamma_{\pm L}\} \\ A\varphi & = & -\Delta\varphi \end{array}\right.$$

où $\widetilde{T}_{\pm}$ est défini par :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{T}_{\pm} : & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\pm L}) \\ & v = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (v, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} w_n & \longmapsto & \widetilde{T}_{\pm} v = \displaystyle\sum_{\{n\in\mathbb{N}^*, k^2<\lambda_n\}} i\mu_n(v, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} w_n. \end{array}$$

Réciproquement un vecteur propre φ de A associé à une valeur propre $\lambda(k) = k^2$ ne conduit à une solution pour (3.18) que si $(\varphi, w_n)_{0,\Gamma_{\pm L}} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^2 > \lambda_n$.

Le principal intérêt de cet opérateur A est qu'il possède un caractère auto-adjoint comme l'énonce le résultat suivant

Lemme 3.1.6 *L'opérateur A est auto-adjoint, positif et à résolvante compacte.*

DÉMONSTRATION. On le montre grâce à une démonstration analogue à celle donnée dans [76] en utilisant le résultat général qui indique que tout opérateur maximal, monotone, symétrique est autoadjoint.

□

On peut donc caractériser entièrement le spectre de l'opérateur A à l'aide des résultats sur la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints et à résolvante compacte, d'où le résultat suivant : Pour chaque valeur k, le spectre de A est formé par une suite de valeurs propres $(\lambda_n(k))_{n\in\mathbb{N}^*}$, positives, tendant vers $+\infty$. Il faut donc déterminer les intersections de la courbe $k \longmapsto \lambda_n(k)$ et de la parabole $k \longmapsto k^2$ puisque les solutions de (3.13) pour $f = 0$ sont nécessairement parmi les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_n(k) = k^2$. En utilisant une caractérisation des valeurs propres $\lambda_n(k)$ d'un opérateur A auto-adjoint positif et à résolvante compacte (principe du Min-Max [17], [76]) on a le résultat suivant :

Lemme 3.1.7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \to \lambda_n(k)$, $k \geq 0$ est une fonction continue, décroissante.*

On dispose finalement du résultat suivant, dont nous renvoyons la démonstration à Razafierivelo [76].

Lemme 3.1.8 *Les points d'intersection des courbes $k \to \lambda_n(k)$ et $k \to k^2$ forment une suite discrète de valeurs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers l'infini.*

Donc, l'ensemble des intersections est une suite discrète de valeurs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers l'infini, en dehors de cet ensemble et des vecteurs propres associés le problème (3.17) n'admet que la solution nulle ce qui correspond à l'unicité de la solution du problème (3.13) (donc à l'existence de cette solution par l'alternative de Fredholm). Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.3. La figure 3.2 représente les intersections des deux courbes $y = k^2$ et $y = \lambda_n(k)$ et illustre l'idée de la proposition.

□

Dans le paragraphe suivant, nous allons définir la fonction de Green du guide et en déduire une formule de représentation intégrale en utilisant le développement de la solution à l'extérieur des obstacles (soit (3.9)) dans le but d'établir le principe de réciprocité dans le guide.

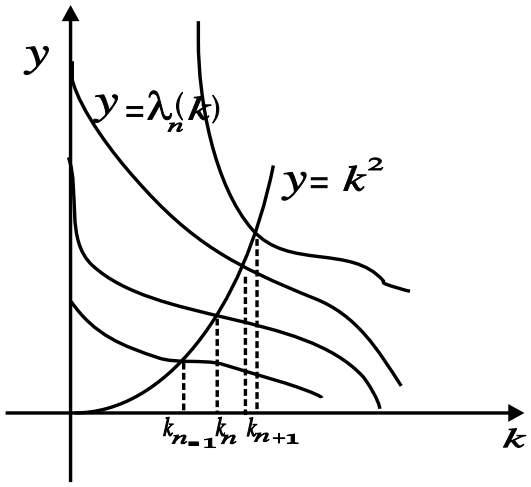


FIG. 3.2 – Solutions de $\lambda(k) = k^2$.

3.2 Fonction de Green et représentation intégrale dans le guide

3.2.1 Fonction de Green du guide

Pour $x \in \Omega$, on définit la fonction de Green du guide $G(x,.)$ par la solution *sortante* du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta G(x,.) + k^2 G(x,.) & = & \delta_x & \Omega \\ G(x,.) & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.19}$$

Remarque 3.2.1 *Dans le cas où k^2 est une valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(0,H)$, le problème (3.19) est mal posé.*

Comme nous avons opté pour la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale pour le calcul de la solution du problème de diffraction dans le domaine borné Ω_L alors nous avons besoin de calculer la fonction de Green ainsi que ses dérivées. Nous rappelons dans l'annexe A comment obtenir une représentation en série de G et de ses dérivées adaptée à son approximation numérique. D'autres expressions existent, mais elles sont moins intéressantes sur le plan numérique.

Nous considérons la source $A(a_1,a_2)$ et nous projetons la fonction $x_2 \to G((a_1,a_2),(x_1,x_2))$ sur la base $\{w_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, nous obtenons ainsi (cf [24]) :

$$G((a_1,a_2),(x_1,x_2)) = \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i\mu_n} \sin\frac{n\pi x_2}{H} \sin\frac{n\pi a_2}{H}\ e^{i\mu_n|x_1-a_1|} \tag{3.20}$$

Il est évident d'après cette expression que G est symétrique sur $\Omega \times \Omega$.

3.2.2 Principe de réciprocité

Lemme 3.2.1 *Si φ et ψ sont deux solutions sortantes du problème*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi + k^2\varphi & = & 0 & \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \varphi & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.21}$$

alors on a

$$\int_\Gamma \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial n}\varphi \right\} \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{3.22}$$

Démonstration. En appliquant la formule de Green à φ et ψ dans le domaine Ω_L, on obtient

$$\int_{\Gamma_{-L}\cup\Gamma_L\cup\Gamma} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n_x}(x)\psi(x) - \frac{\partial\psi}{\partial n_x}(x)\varphi(x) \right\} \mathrm{d}\sigma(x) = 0 \tag{3.23}$$

Il suffit alors de montrer que

$$\int_{\Gamma_{-L}\cup\Gamma_L} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n_x}(x)\psi(x) - \frac{\partial\psi}{\partial n_x}(x)\varphi(x) \right\} \mathrm{d}\sigma(x) = 0 \tag{3.24}$$

En utilisant la formule explicite de φ pour $x_1 < -L$ et $x_1 > L$ (soit (3.10) et (3.9)), on déduit l'expression de la dérivée normale de φ sur Γ_{-L} et Γ_L.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}_{/\Gamma_{-L}} & = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}_{/x_1=-L} & = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} i\mu_n(\varphi(-L,.),w_n)_{L^2(0,H)}w_n \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}_{/\Gamma_L} & = +\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}_{/x_1=L} & = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} i\mu_n(\varphi(L,.),w_n)_{L^2(0,H)}w_n \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Les expressions (3.10), (3.9) et (3.25) sont également valables pour ψ. En substituant les traces et les dérivées normales de φ et ψ sur Γ_{-L} et Γ_L par leurs expressions, on montre (3.24) et on en déduit le lemme.

□

3.2.3 Formule de représentation intégrale

Lemme 3.2.2 *Si φ est une solution sortante satisfaisant le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi + k^2\varphi & = & 0 & \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \varphi & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.26}$$

alors elle admet la représentation intégrale :

$$\varphi(x) = \int_\Gamma \left\{ G(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)\varphi(y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}. \tag{3.27}$$

où n_y est la normale unitaire à Γ au point y, orientée vers l'extérieur de $\mathcal{O}$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$, $G(x,.)$ et φ sont deux solutions sortantes qui vérifient l'équation de Helmholtz à l'extérieur de $\mathcal{O} \cup B_\epsilon(x)$ en plus de la condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$, $B_\epsilon(x)$ étant la boule de centre x et de rayon ϵ ($\epsilon > 0$). Donc, d'après le principe de réciprocité, on a :

$$\int_{\Gamma \cup B_\epsilon(x)} \left\{ \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\varphi(y) - \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y) G(x,y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y) = 0 \tag{3.28}$$

Or $(G - G_0)(x,.)$ et φ vérifient l'équation de Helmholtz dans $B_\epsilon(x)$ alors

$$\int_{B_\epsilon(x)} \left\{ \frac{\partial (G - G_0)}{\partial n_y}(x,y)\varphi(y) - \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y)(G - G_0)(x,y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y) = 0 \tag{3.29}$$

En faisant la différence des deux équations (3.28) et(3.29) puis en faisant tendre ϵ vers 0, on trouve la formule de représentation intégrale (3.27).

□

3.3 Etude du processus de retournement temporel

Dans le chapitre 2, nous avons montré que l'opérateur de retournement temporel qui agit sur une surface (ou ligne) continue, le bord ∂M qui joue le rôle d'émetteur/récepteur, est un opérateur hermitien. Ici, nous considérons le cas d'un nombre fini N_t de transducteurs ponctuels. Ainsi, l'opérateur de retournement temporel est une matrice carrée de taille N_t. L'objet de ce paragraphe est de montrer que cette matrice est hermitienne et positive.

Le processus de retournement temporel est décrit comme suit : soit $A_i,\ i = 1$ à N_t, les points de $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ où sont placés les transducteurs. On suppose qu'à l'émission le champ généré par chaque transducteur est, à un facteur complexe près, la fonction de Green $G(A_i, x)$. A la réception, chacun d'eux mesure la valeur du champ diffracté, ce champ étant supposé ne pas être perturbé par la présence du transducteur.

Les transducteurs génèrent alors à l'étape d'émission une onde incidente φ_I qui s'écrit sous la forme :

$$\varphi_I(x) = \sum_{i=1}^{N_t} G(A_i, x) g_i \tag{3.30}$$

où g_i représente l'intensité d'émission du transducteur A_i, $1 \leq i \leq N_t$. Le champ diffracté par les obstacles φ_D est alors la solution sortante du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\varphi_D + k^2\varphi_D & = & 0 & \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial\varphi_D}{\partial n} & = & -\dfrac{\partial\varphi_I}{\partial n} & \Gamma \\ \varphi_D & = & 0 & \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Pour $a \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$, on désigne par $G_D(a,.)$ la solution sortante du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta G_D(a,.) + k^2 G_D(a,.) & = & 0 & \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial G_D(a,.)}{\partial n} & = & -\dfrac{\partial G(a,.)}{\partial n} & \Gamma \\ G_D(a,.) & = & 0 & \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.32}$$

alors l'onde diffractée s'écrit sous la forme :

$$\varphi_D(x) = \sum_{i=1}^{N_t} G_D(A_i, x) g_i. \tag{3.33}$$

En notant par g le vecteur formé des amplitudes complexes g_i des transducteurs à l'émission et par D, l'opérateur qui décrit le processus de l'étape d'émission à l'étape de mesure alors, g_R étant le signal mesuré aux points transducteurs, on a :

$$g_R = Dg = \{\varphi_D(A_i)\}_{1 \leq i \leq N_t}$$

Le signal g_R est conjugué puis utilisé pour générer l'onde incidente de l'itération suivante. L'opérateur de retournement temporel est défini alors par

$$Tg = \overline{D\overline{Dg}}, \text{ ou bien } T = \overline{D}D.$$

Proposition 3.3.1 *T est une matrice hermitienne et positive*

Démonstration. En procédant comme dans le "lemma 1", nous prouvons que G_D est symétrique sur $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \times \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. Comme G_D est symétrique sur $\{(A_j)_{1 \leq j \leq N_t}\} \times \{(A_i)_{1 \leq i \leq N_t}\}$, alors la matrice D définie par $D = (D_{ij})_{1 \leq i,j \leq N_t} = (G_D(A_j, A_i))_{1 \leq i,j \leq N_t}$ est symétrique et par suite $D^* = \overline{D}$. On conclut finalement que T est une matrice hermitienne positive. Ses valeurs propres sont donc réelles positives.

□

Chapitre 4

Résultats numériques

Nous présentons dans ce chapitre les résultats numériques correspondant à l'étude du phénomène de retournement temporel dans le cas de l'espace libre (chapitre 2) et du guide d'ondes (chapitre 3). Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le calcul de l'opérateur de retournement temporel nécessitait la résolution de plusieurs problèmes de diffraction. Ces problèmes sont résolus à l'aide de la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons en détail la méthode de couplage permettant de résoudre des problèmes posés en domaine non borné. Nous construisons ensuite la matrice associée à l'opérateur de retournement temporel. Les valeurs propres de la matrice obtenue constituent une estimation des premières valeurs propres de cet opérateur.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous analysons les résultats de focalisation pour les divers modèles que nous avons présentés dans les deux chapitres précédents et nous insistons en particulier sur la comparaison entre le modèle non intrusif dans le cas de l'espace libre et celui dans le cas du guide d'ondes.

4.1 Construction de la matrice de retournement temporel

Afin de calculer les valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel, nous avons choisi de calculer la matrice correspondante, issue de la discrétisation par éléments finis. L'opérateur de retournement temporel étant défini de $L^2(\partial M)$ dans $L^2(\partial M)$, la matrice correspondante est une matrice carrée de taille N_t, N_t étant le nombre de degrés de libertés sur ∂M ou le nombre de transducteurs dans le cas du guide. Nous résolvons numériquement les problèmes de diffraction qui constituent les différents étapes du processus de retournement temporel, par la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale.

4.1.1 Méthode de couplage

Nous considérons le problème de diffraction par un obstacle $\mathcal{O}$ suivant :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \Delta\varphi + k^2\varphi &= 0 & \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} &= g & \Gamma = \partial\mathcal{O} \\ \text{C.R. à l'infini.} \end{cases}$$

La méthode de couplage consiste à borner le domaine de calcul par une frontière fictive entourant l'obstacle ; la condition aux limites sur cette frontière est construite en utilisant une représentation intégrale de la solution à l'extérieur. Elle permet d'obtenir une formulation variationnelle sur le domaine borné.

Formulation du problème en domaine borné

On considère un domaine borné Ω' entourant $\mathcal{O}$ et inclus dans Ω et on note $\Sigma = \partial\Omega' \backslash \Gamma$ (voir figure 2.1). On introduit le problème suivant posé sur le domaine borné Ω' :

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \Delta\varphi' + k^2\varphi' &= 0 & \Omega' \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial n} &= g & \Gamma \\ (\dfrac{\partial}{\partial n} + \beta)\varphi' &= (\dfrac{\partial}{\partial n} + \beta)\displaystyle\int_\Gamma (\varphi'(y)\frac{\partial G_0}{\partial n_y}(.,y) - G_0(.,y)\frac{\partial\varphi'}{\partial n_y}(y))\mathrm{d}\Gamma_y & \Sigma \end{cases}$$

où β est un paramètre complexe arbitraire fixé tel que $Im(\beta) \neq 0$ et G_0 est la fonction de Green dans l'espace libre définie en (2.4). Les normales sont prises extérieures au domaine Ω'.

Il est clair que si φ est solution de (4.1), alors $\varphi' = \varphi_{/\Omega'}$ est solution du problème (4.2). Le lemme 4.1.1 montre comment reconstruire une solution de (4.1) lorsqu'on dispose d'une solution de (4.2) [51].

Lemme 4.1.1 *Si $Im(\beta) \neq 0$, le problème (4.2) est bien posé et sa solution φ' se prolonge de façon unique en une solution φ du problème initial (4.1). φ est donnée par la formule de représentation intégrale suivante*

$$(4.3) \qquad \varphi(x) = \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x,y)\varphi'(y) - G_0(x,y)\frac{\partial\varphi'}{\partial n}(y) \right\} d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega.$$

Formulation variationnelle

La formulation variationnelle de (4.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \varphi' \in H^1(\Omega') \text{ tel que, } \forall \psi \in H^1(\Omega'), \text{ on ait} \\ &\int_{\Omega'} \nabla\varphi'.\overline{\nabla\psi} - k^2 \int_{\Omega'} \varphi'\overline{\psi} + \beta \int_{\Sigma} \varphi'\overline{\psi} - \int_{\Sigma} \overline{\psi(x)} \int_{\Gamma} \varphi'(y) \frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y) \mathrm{d}\Gamma_y \mathrm{d}\Sigma_x \\ &= \int_{\Gamma} g\overline{\psi} - \int_{\Sigma} \overline{\psi(x)} \int_{\Gamma} g(y) K(x,y) \mathrm{d}\Gamma_y \mathrm{d}\Sigma_x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

où on a posé $K = (\partial/\partial n_x + \beta)G_0$.

Remarque 4.1.1 – *Le problème en domaine borné (4.2) ainsi que sa formulation variationnelle (4.4) restent inchangés dans le cas du guide, seule la fonction de Green change, elle est définie en (3.19) et son expression est donnée en (3.20).*
– *L'avantage de la méthode de couplage par rapport aux équations intégrales est l'absence de singularité de la fonction de Green.*
– *Bien que le domaine de calcul Ω' soit un domaine bidimensionnel (monodimensionnel dans le cas des équations intégrales), il peut être choisi de taille réduite (Σ est proche de Γ).*

Pour calculer la matrice de retournement temporel dans le cas d'un MRT non intrusif, nous discrétisons d'abord le problème (4.4) (dans le cas de MRT intrusif, nous avons à appliquer la méthode de couplage aux problèmes de diffraction figurant dans le modèle considéré) puis nous calculons l'action du processus de retournement temporel sur chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{N_t}$.

4.1.2 Discrétisation du problème (4.4)

Pour les besoins de la discrétisation, il convient de mettre en place les outils fonctionnels en rapport avec la méthode des éléments finis et d'introduire quelques notations supplémentaires. Rappelons que Ω' est le domaine borné délimité par Γ, la frontière des obstacles et Σ la frontière de troncature. Pour tout $h > 0$, nous construisons une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω'. C'est une partition en nombre fini de polyhèdres en trois dimensions (tétraèdre, cube) ou de polygones en deux dimensions (triangle, rectangle) dont la taille est inférieure à h. Ce maillage est supposé conforme et régulier au sens de [23] (cf. [16]). Le paramètre h est choisi en fonction de la précision souhaitée. Il est de l'ordre de $h = \lambda/10$, où λ est la longueur d'onde utilisée.

Notons V_h, l'espace des éléments finis défini par

$$V_h = \{\Phi'_h \in C(\overline{\Omega'}),\ \Phi'_{h_{/K}} \in \mathbb{P}_1\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega')$$

où $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des fonctions affines par morceaux.

Pour la mise sous forme matricielle du système (4.4), nous donnons une description conforme à l'esprit de MELINA. A cet effet, commençons par numéroter tous les nœuds de 1 à I, ce sont les $(x_i)_{i=1,I}$ appartenant au domaine maillé $\overline{\Omega'}$. L'ensemble des fonctions de base de l'espace V_h est désigné par $(w_i)_{i=1,I}$; ce sont les fonctions caractéristiques des $(x_i)_{i=1,I}$ qui valent 1 au nœud i et zéro sur tous les autres. Notons que le maillage de Ω' est obtenu par le logiciel EMC2.

Le problème variationnel discret s'écrit alors :

Trouver $\Phi'_h \in V_h$ tel que, $\forall \Psi_h \in V_h$, on ait

$$\int_{\Omega'} \nabla\Phi'_h.\overline{\nabla\Psi_h} - k^2 \int_{\Omega'} \Phi'_h\overline{\Psi_h} + \beta \int_\Sigma \Phi'_h\overline{\Psi_h} - \int_\Sigma \overline{\Psi_h(x)} \int_\Gamma \Phi'_h(y)\frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x \tag{4.5}$$

$$= \int_\Gamma g\overline{\Psi_h} - \int_\Sigma \overline{\Psi_h(x)} \int_\Gamma g(y)K(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x.$$

Φ' (on élimine l'indice h dans la suite) s'écrit sous la forme

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{I} \Phi'(x_i)w_i$$

L'expression matricielle de la formulation variationnelle (4.5) est la suivante :

$$(\mathbb{K} - k^2\mathbb{M} + \beta\mathbb{M}^\Sigma - \mathbb{C}^D)\Phi' = \mathbb{M}^\Gamma G - S^C. \tag{4.6}$$

avec

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_{\Omega'} \nabla w_j.\nabla w_i \text{ et } \mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega'} w_j w_i$$

$$\mathbb{M}^\Sigma_{ij} = \int_\Sigma w_j w_i \text{ et } \mathbb{M}^\Gamma_{ij} = \int_\Gamma w_j w_i$$

$$G_i = g(x_i) \text{ et } \Phi'_i = \Phi'(x_i) \text{ est une approximation de } \varphi'(x_i)$$

Les termes matriciels $\mathbb{C}^D$ et S^C dus au couplage sont donnés par :

$$\int_\Sigma w_i(x) \int_\Gamma \varphi'(y)\frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x =$$

$$\sum_{j=1,I} \Phi'_j \int_\Sigma w_i(x) \int_\Gamma w_j(y)\frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x.$$

On suppose que l'on interpole sur la base éléments finis les fonctions de Green, c'est-à-dire :

$$K(x,y) \simeq \sum_{k\in I_\Sigma}\sum_{l\in I_\Gamma} K(x_k,x_l)w_k(x)w_l(y)$$

$$\frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y) \simeq \sum_{k\in I_\Sigma}\sum_{l\in I_\Gamma} \frac{\partial K}{\partial n_y}(x_k,x_l)w_k(x)w_l(y)$$

où I_Σ (respectivement I_Γ) désigne l'ensemble des indices des noeuds se situant sur Σ (respectivement Γ). En posant :

$$\mathbb{N}^D_{kl} = \frac{\partial K}{\partial n_y}(x_k,x_l) \quad \text{(noyau double couche)}$$

$$\mathbb{N}^S_{kl} = K(x_k,x_l) \quad \text{(noyau simple couche)}$$

on obtient alors :

$$\int_\Sigma w_i(x)\int_\Gamma \varphi'(y)\frac{\partial K}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x =$$

$$\sum_{j=1,I}\Phi'_j\sum_{k\in I_\Sigma}\sum_{l\in I_\Gamma}\mathbb{N}^D_{kl}\int_\Sigma w_i(x)w_k(x)\int_\Gamma w_j(y)w_l(y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x.$$

ce qui conduit sous forme matricielle, à un terme de couplage de double couche, formé d'un produit de trois matrices :

$$\mathbb{C}^D = \mathbb{M}^\Sigma\mathbb{N}^D\mathbb{M}^\Gamma$$

De la même façon, pour le terme au second membre on a :

$$\int_\Sigma w_i(x)\int_\Gamma g(y)K(x,y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x =$$

$$\sum_{j=1,I}G_j\sum_{k\in I_\Sigma}\sum_{l\in I_\Gamma}\mathbb{N}^S_{kl}\int_\Sigma w_i(x)w_k(x)\int_\Gamma w_j(y)w_l(y)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\Sigma_x.$$

qui donne lieu au terme de couplage contribuant au second membre :

$$\mathbb{S}^C = \mathbb{M}^\Sigma\mathbb{N}^S\mathbb{M}^\Gamma G$$

Le code MELINA ([57]) permet de calculer la matrice de rigidité $\mathbb{K}$, les matrices de masse $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^\Sigma$ et $\mathbb{M}^\Gamma$ et les termes de couplage $\mathbb{N}^D$ et $\mathbb{N}^S$. Soulignons que les matrices de masse $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}^\Sigma$ ainsi que la matrice de rigidité $\mathbb{K}$ sont creuses et symétriques. En revanche, la matrice $\mathbb{C}^D$ exprimant le couplage dans la condition artificielle, a son support confiné autour de Σ, et constitue un bloc plein, sans symétrie particulière, altérant la structure de la matrice globale. En effet, sa contribution brise le caractère creux de la matrice totale du système $\mathbb{K} - k^2\mathbb{M} + \beta\mathbb{M}^\Sigma - \mathbb{C}^D$ et détruit sa symétrie.

Nous verrons dans le paragraphe suivant le choix de la méthode d'inversion de cette matrice que nous avons adopté ainsi que la façon d'obtenir la matrice de retournement temporel.

4.1.3 Matrice de retournement temporel

Bien que le calcul des valeurs propres de la matrice de retournement temporel T peut être effectué sans jamais la construire, nous avons choisi de la construire vu que sa taille est réduite. Cette matrice peut être écrite sous la forme d'un produit de plusieurs matrices s'exprimant en fonction de l'inverse de la matrice du problème de diffraction $\mathbb{K} - k^2\mathbb{M} + \beta\mathbb{M}^{\Sigma} - \mathbb{C}^{D}$ ainsi que de la matrice de projection représentant la trace du champ de diffraction défini dans Ω' sur le bord du miroir. La construction de T a été effectuée colonne par colonne, en calculant l'image par T des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{N_t}$.

La résolution du système linéaire (4.6) est effectuée par la méthode LU. En effet, à chaque itération du processus de retournement temporel, nous avons à résoudre un problème de diffraction (dans le cas de MRT non intrusif), soit au total $2N_t$ résolutions et c'est pour cette raison que nous n'avons pas cherché à utiliser une méthode itérative qui devra être appliquée $2N_t$ fois puisque la décomposition LU de la matrice du système $\mathbb{K} - k^2\mathbb{M} + \beta\mathbb{M}^{\Sigma} - \mathbb{C}^{D}$ est effectuée une seule fois.

Comme nous l'avons dit plus haut, le domaine de calcul Ω' peut être choisi de petite taille. La visualisation des résultats s'effectue sur un domaine plus grand (voir figure 4.1), nous utilisons une formule de représentation intégrale pour le calcul de la solution dans ce domaine.

4.2 Résultats numériques

Nous allons commencer par l'étude de la focalisation sur des obstacles de petite taille devant la longueur d'onde et distants entre eux. Ensuite, nous passons au cas d'obstacles dont la taille est de même ordre de grandeur ou plus grande que la longueur d'onde. Nous comparons la propagation d'ondes et la possibilité de focaliser sur les obstacles dans le guide à celles dans l'espace libre.

Dans le cas de petits obstacles, la contribution du champ diffracté au champ total est négligeable devant celle du champ incident, c'est pourquoi, nous représenterons dans ce cas uniquement le champ incident. Par contre, dans le cas d'obstacles de tailles quelconques, le champ diffracté et le champ incident sont de même ordre, c'est pourquoi, nous représenterons les deux champs incident et total.

4.2.1 Disques disposés selon une horizontale

Soient deux disques de centres respectifs $(0, 0.5)$ et $(0.6, 0.5)$ et de rayons respectifs $r_1 = 0.02$ et $r_2 = 0.01$. Ainsi la distance δ entre les deux obstacles est 0.6. Les transducteurs sont répartis uniformément sur la verticale d'abscisse $a_1 = -2.8$ et dont les ordonnées varient de

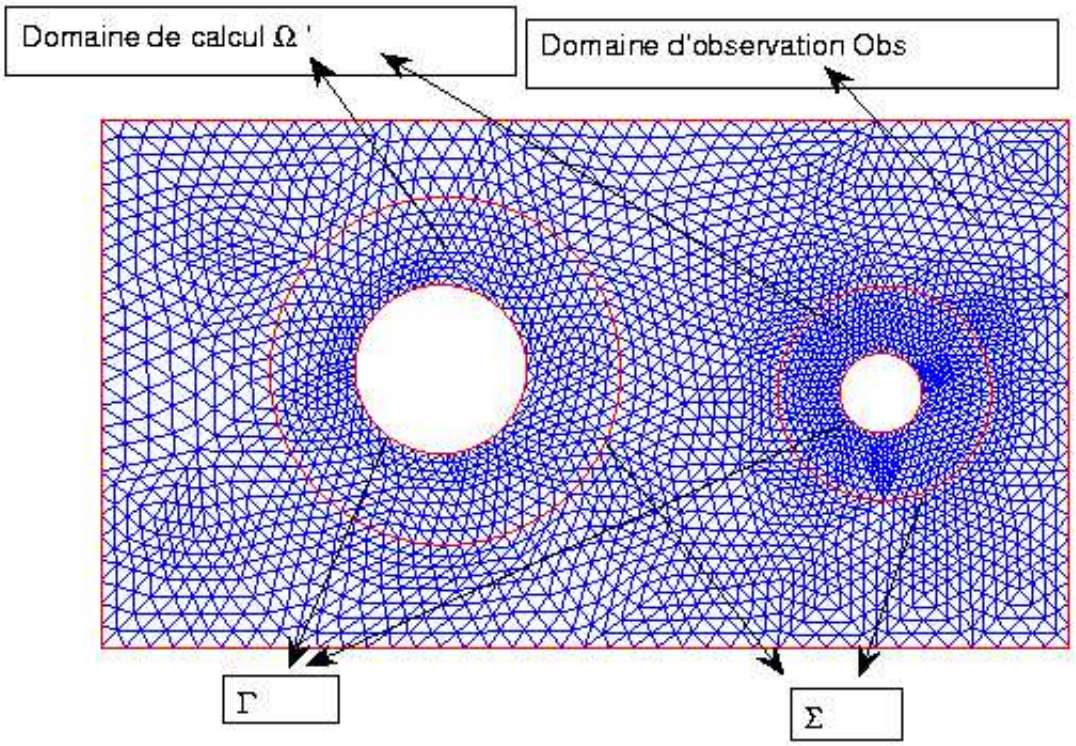


FIG. 4.1 – Maillage du domaine de calcul et du domaine d'observation.

0.1 à 0.9 avec un pas égal à 0.1 ($N_t = 9$). Nous présentons dans les figures 4.2 et 4.3 les valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel T en fonction de k respectivement dans le cas d'un MRT non intrusif dans l'espace libre (paragraphe 2.1.1) et celui dans un guide de hauteur $H = 1$ (chapitre 3).

Nous remarquons que dans le cas de l'espace libre (figure 4.2), il n'y a qu'une seule valeur propre significative (le rapport entre la première valeur propre et la seconde est de l'ordre de 10^4) ce qui veut dire que l'obstacle le plus gros camoufle le plus petit. Pour $k = 30$, les deux premières valeurs propres sont $\lambda_1 = 0.7\ 10^{-5}$ et $\lambda_2 = 1.55\ 10^{-10}$. La figure 4.15 (resp. 4.16) montre le module du champ incident correspondant à l'émission du premier vecteur propre (resp. le second). Nous observons que le premier champ est dirigé vers les deux obstacles alors que le second sur aucun.

Nous nous intéressons maintenant au cas du guide (figure 4.3). Notons d'abord que les pics représentent les fréquences de coupure ($k_n = n\pi/H = n\pi$) pour lesquelles le problème (3.19) est mal posé.

En faibles fréquences, plus précisément, lorsque $k < \pi$, on remarque que les valeurs propres

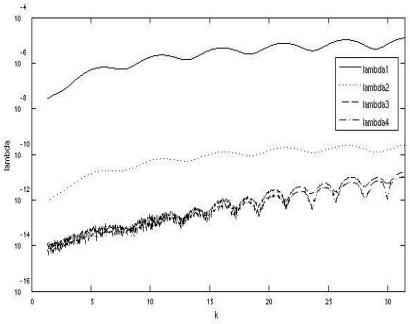


FIG. 4.2 – 4 premières valeurs propres de T en fonction de k (disques disposés selon une horizontale dans l'espace libre).

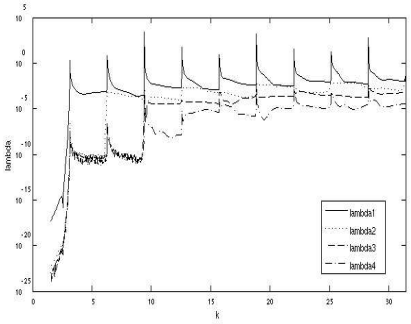


FIG. 4.3 – 4 premières valeurs propres de T en fonction de k (disques disposés selon une horizontale dans le guide).

sont très petites (même la première) ; ceci s'explique par le fait qu'il n'y a que des modes évanescents et donc l'onde incidente décroit rapidement et l'onde diffractée par les obstacles reçue par le MRT est de faible intensité. Par exemple, pour $k = 3$, les deux premières valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0.9\ 10^{-7}$ et $\lambda_2 = 8\ 10^{-12}$; nous illustrons dans la figure 4.17 (resp. figure 4.18), le module du champ incident correspondant à l'émission du premier vecteur propre (respectivement le second). Nous remarquons que comme dans le cas de l'espace libre, le premier champ est dirigé vers les deux obstacles alors que le second sur aucun.

Lorsque $\pi < k < 2\pi$, il y a uniquement une valeur propre significative due au fait qu'il y a un mode propagatif mais, comme dans le cas précédent, on ne peut pas focaliser sélectivement sur les obstacles.

Lorsque k augmente ($k > 2\pi$), la deuxième valeur propre devient significative mais la relation : "nombre de valeurs propres significatives = nombre d'obstacles" n'est pas en général satisfaite : il n'y a pas une séparation nette des deux premières valeurs propres des suivantes. Par exemple, pour mieux visualiser, nous observons sur la figure 4.4 les quatre premières valeurs propres dans la plage (28.45-31.35). Nous remarquons que la deuxième et troisième valeur propre sont très voisines.

Dans la suite, nous notons par "GP", la configuration où le grand et le petit obstacles sont présents dans le guide, "G" (resp. "P") lorsque uniquement le grand (resp. petit) obstacle est présent dans le guide.

Dans le cas $k = 30$, les premières valeurs propres sont $\lambda_1(GP) = 1.54\ 10^{-2}$, $\lambda_2(GP) = 1.5\ 10^{-3}$ et $\lambda_3(GP) = 5\ 10^{-4}$. La figure 4.23 (resp. 4.25) montre que l'émission du premier (resp. le troisième) vecteur propre permet de focaliser sélectivement sur l'obstacle le plus gros (resp. le plus petit). Nous remarquons ainsi qu'il est possible de focaliser sélectivement sur le plus petit obstacle contrairement au cas de l'espace libre. De plus, vu la symétrie du problème par rapport à $x_2 = 0.5$, il y a deux types de modes : symétriques et anti-symétriques. Les modes 1 et 3 (figures 4.23 et 4.25) sont symétriques, alors que 2 et 4 (figures 4.24 et 4.26) sont

anti-symétriques. Nous remarquons que pour ces champs anti-symétriques, on a un extremum de l'énergie diffractée qui ne correspond pas à un effet de focalisation.

Pour expliquer la présence de plus que deux valeurs propres significatives, nous avons étudié le cas où il y a un unique obstacle dans le guide (le petit ou le grand). Dans le cas où uniquement le petit obstacle est présent dans le guide, les valeurs propres sont : $\lambda_1(P) = 1.05\ 10^{-3},\ \lambda_2(P) = 7.38\ 10^{-5}$ et $\lambda_3(P) = 2\ 10^{-6}$. Dans le cas où uniquement le gros obstacle est présent dans le guide, les valeurs propres sont : $\lambda_1(G) = 1.24\ 10^{-2},\ \lambda_2(G) = 8.6\ 10^{-4}$ et $\lambda_3(G) = 1.17\ 10^{-5}$.

On remarque que $\lambda_1(GP) > \lambda_1(G)$. Ceci s'explique par le fait que le champ diffracté optimum est obtenu en cumulant la diffraction sur les deux obstacles et nous sommes manifestement dans une situation où ce cumul peut être constructif (au sens où il y a augmentation du module du champ diffracté et donc celle de la valeur propre). La figure 4.27 montre le module du champ incident associé au premier vecteur propre dans le cas où uniquement le gros obstacle est présent dans le guide. En comparant cette figure à la figure 4.23, nous remarquons que les deux champs sont presque identiques. De plus, le petit obstacle se trouve sur un maximum local d'amplitude de ces champs : on pouvait donc s'attendre à ce qu'il contribue de façon non négligeable au champ retourné vers les transducteurs (sa contribution est en fait de l'ordre de 10%, si l'on compare $\sqrt{\lambda_1(GP)}$ et $\sqrt{\lambda_1(G)}$).

On remarque également que $\lambda_2(GP) > \lambda_2(G)$. D'après les figures 4.24 et 4.28, les champs incidents associés à $\lambda_2(GP)$ et $\lambda_2(G)$ sont similaires, ce qui montre que le mode associé à $\lambda_2(GP)$ est lié essentiellement au plus gros obstacle. Dans ce cas, la contribution du petit obstacle est de l'ordre de 30%.

Pour le petit obstacle, on a $\lambda_3(GP) < \lambda_1(P)$. La figure 4.29 montre le module du champ incident associé à $\lambda_1(P)$ et la figure 4.25 montre le champ incident associé à $\lambda_3(GP)$. Le mode associé à $\lambda_3(GP)$ étant orthogonal à celui qui correspond à $\lambda_1(GP)$, on exclut de ce fait dans le premier une façon d'éclairer le petit obstacle qui était présente dans le dernier. Ce qui a pour conséquence que les modes associés à $\lambda_3(GP)$ et $\lambda_1(P)$ n'ont pas la même allure et que l'énergie diffractée par le petit est plus faible pour le mode associé à $\lambda_3(GP)$ (soit l'inégalité constatée).

Nous remarquons également que $\lambda_1(P) \simeq \lambda_2(G)$ ce qui explique le fait que la deuxième et la troisième valeur propre de l'opérateur de retournement temporel en présence des deux obstacles ensemble sont comparables et que, dans ce cas, c'est le troisième vecteur propre qui focalise sur le petit obstacle et pas le second.

Nous observons d'après les figures 4.2 et 4.3 que les valeurs propres dans le cas du guide sont plus importantes par rapport à celles dans l'espace libre ce qui est dû aux reflexions multiples sur les interfaces du guide subies par l'onde diffractée par les obstacles. Nous montrons dans

les figures 4.5 et 4.6 le gain apporté par le guide que nous définissons par

$$\text{gain}(i) = \sqrt{\frac{\lambda_i(\text{guide})}{\lambda_i(\text{espace libre})}},\ i = 1, 2$$

associé respectivement à la première et à la deuxième valeur propre. L'apparition de la racine carrée dans cette définition est due au fait que l'opérateur de retournement temporel correspond à deux itérations successives du processus de retournement temporel et donc à deux diffractions par les obstacles du champ émis associé à un vecteur propre.

Dans le calcul du gain(2), nous avons tenu compte du fait que c'est la troisième valeur propre de l'opérateur de retournement temporel dans le guide qui focalise sur le petit obstacle, autrement dit

$$\text{gain}(2) = \sqrt{\frac{\lambda_3(\text{guide})}{\lambda_2(\text{espace libre})}}$$

Nous remarquons que le facteur de gain apporté par le guide est de l'ordre de 40 dans le cas du gros obstacle et de 1600 dans le cas du petit obstacle.

Comparaison des résultats avec le cas $N_t = 99$:

Nous nous proposons maintenant d'augmenter le nombre de transducteurs, soit $N_t = 99$ au lieu de $N_t = 9$ dans le cas précédent, la répartition des transducteurs est uniforme avec un pas égal à 0.01. La figure 4.9 (resp. 4.10 et 4.11) montre la première (resp. seconde et troisième) valeur propre de T dans les deux cas $N_t = 9$ et $N_t = 99$.

Nous remarquons que la $i^{\text{ème}}$ valeur propre ($i = 1, 2, 3$) dans le cas $N_t = 99$ a la même allure que celle dans le cas $N_t = 9$. La figure 4.12 montre le facteur de gain apporté par l'augmentation de transducteurs que nous définissons par

$$\text{gainNt}(i) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_i(N_t=99)}{\lambda_i(N_t=9)}}}{\frac{99}{9}},\ i = 1, 2, 3$$

La présence de la racine carrée dans cette formule est due au fait que l'opérateur de retournement temporel correspond à deux itérations, alors que celle du rapport entre les deux nombres de transducteurs est due au fait que lors de la ré-émission, comme il y a 11 fois plus de transducteurs dans le cas $N_t = 99$, on s'attend à ce que l'amplitude de l'onde incidente soit à peu près 11 fois plus grande. Cette constatation est approuvée par la figure 4.12 qui montre que ce facteur de gain est indépendant de k et de plus, il est à peu près égal à 1. Nous représentons dans les figures (4.19-4.22) les modules des champs incidents correspondant aux vecteurs propres associés aux valeurs propres de T pour $k = 30$: $\lambda_1 = 1.54$, $\lambda_2 = 0.14563$, $\lambda_3 = 4.22\ 10^{-2}$ et $\lambda_4 = 1.81\ 10^{-3}$. Les champs incidents ont la même allure dans les deux cas $N_t = 99$ et $N_t = 9$ (comparer les figures 4.19-4.22 à 4.23-4.26), il en va donc de même des champs diffractés et de la proportionnalité constatée entre les valeurs propres.

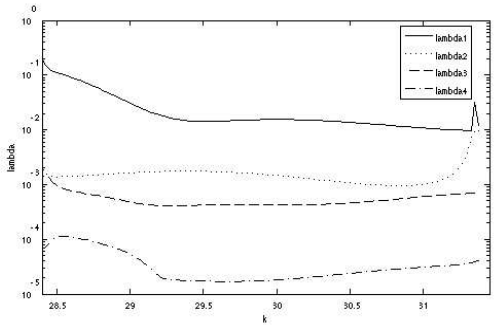


FIG. 4.4 – Valeurs propres en fonction de k dans la plage 28.45-31.35. (disques disposés selon une horizontale dans le guide)

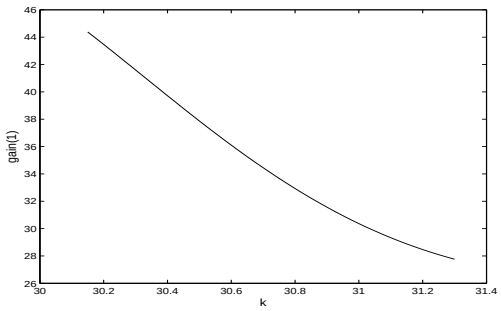


FIG. 4.5 – Gain associé à la première valeur propre. (disques disposés selon une horizontale)

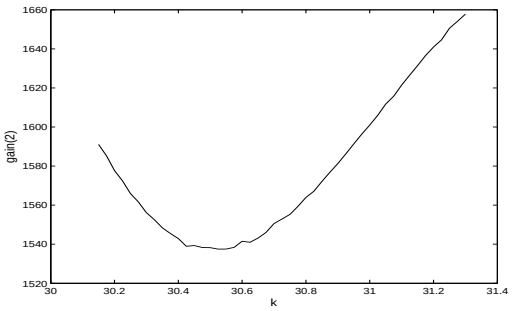


FIG. 4.6 – Gain associé à la deuxième valeur propre. (disques disposés selon une horizontale)

4.2.2 Disques disposés selon une verticale

Nous considérons maintenant la même situation géométrique sauf que les disques sont disposés verticalement. Le disque le plus gros est de centre $(0, 0.8)$ et le petit de centre $(0, 0.2)$.

Nous remarquons d'après la figure 4.13 que le nombre de valeurs propres significatives est égal au nombre d'obstacles dans le cas de l'espace libre et pour les fréquences moyennes et hautes. En étudiant le cas $k = 30$, où les premières valeurs propres sont $\lambda_1 = 0.7453\ 10^{-5}$, $\lambda_2 = 6.46\ 10^{-7}$ et $\lambda_3 = 8\ 10^{-10}$, nous observons sur la figure 4.31 (resp. 4.32) que le champ incident généré par le premier vecteur propre (resp. le second) est dirigée vers l'obstacle le plus gros (resp. le plus petit).

Dans le cas du guide (figure 4.14), c'est comme dans le cas de disques disposés selon une horizontale, le nombre de valeurs propres significatives n'est pas égal au nombre d'obstacles.

La figure 4.34 (resp. 4.36) montre que l'émission du premier (resp. le troisième) vecteur propre permet de focaliser sélectivement sur l'obstacle le plus gros (resp. le plus petit). Nous remarquons que la focalisation a eu lieu contrairement au cas de l'espace libre où il y avait uniquement une bonne directivité vers l'obstacle correspondant.

4.2.3 Cas d'obstacles de grande taille

Nous considérons un guide de hauteur $H = 8$ et $N_t = 79$ transducteurs situés à l'abscisse $a_1 = -0.1$ et répartis uniformément avec un pas égal à 0.1, et deux demi-disques D_1 et D_2 contenus dans le guide de rayons respectifs 1 et 2 et de centres respectifs $(10, 3)$ et $(10, 5)$. Ainsi, la distance δ entre les deux obstacles est égal à 2. Nous rappelons que cette situation géométrique a été étudié dans le cas de l'article (voir chapitre 2).

Nous remarquons d'après le tableau 4.7 qu'en faibles fréquences ($k = 0.35$), il y a une seule valeur propre significative comme tous les cas étudiés. Lorsque k augmente, la relation "nombre de valeurs propres significatives=nombre d'obstacles" n'est pas vérifiée. Dans le cas $k = 1.4$, il y a une séparation nette entre les trois premières valeurs propres des suivantes. Les figures 4.50 et 4.51 montrent qu'il y a bien focalisation sélective sur les deux obstacles. Au contraire, dans les cas $k = 3$ et $k = 6$, il n'y a pas une séparation nette entre les valeurs propres et on ne peut pas focaliser sélectivement sur les obstacles contrairement au cas de l'espace libre (voir figures 4.40-4.44 et 4.66-4.70).

Pour expliquer la présence de la focalisation sélective dans le cas $k = 1.4$ ainsi que son absence dans le cas $k = 3$, nous présentons dans le tableau 4.8 les valeurs propres de T en fonction de k lorsque uniquement un demi-disque est présent dans le guide, soit le plus petit ("P") ou le plus gros ("G"). Nous remarquons qu'en général, le nombre de valeurs propres significatives est supérieur à un contrairement au cas de l'espace libre étudié dans l'article. La présence d'autres valeurs propres significatives est due alors aux interfaces du guide.

Dans le cas $k = 1.4$ et en présence uniquement du gros obstacle, il y a uniquement une valeur propre significative dont le vecteur associé focalise sur cet obstacle (figure 4.54). Lorsque le petit obstacle est présent tout seul, l'opérateur de retournement temporel possède deux valeurs propres significatives telles que le second vecteur propre focalise sur le petit obstacle (figure 4.57).

On remarque que $\lambda_1(GP) \simeq \lambda_1(G)$; les champs incidents correspondants (figures 4.58 et 4.62) sont presque identiques et la position du petit obstacle correspond à un minimum local du champ ce qui explique que sa contribution au champ diffracté est négligeable d'où l'égalité entre les deux valeurs propres.

Cependant, la focalisation sur le petit obstacle est nettement meilleure dans le cas où le petit obstacle est présent seul dans le guide (voir figures 4.59 et 4.65).

k	0.35	1.4	3	6
λ_1	0.4405	23.9161	10.4691	8.2849
λ_2	$9.176\ 10^{-9}$	1.2405	4.4533	2.3755
λ_3	-	$6.83\ 10^{-2}$	0.5617	1.4496
λ_4	-	$8\ 10^{-5}$	0.4985	1.2804
λ_5	-	-	$1.19\ 10^{-2}$	0.9034
λ_6	-	-	$5.1\ 10^{-3}$	0.1469
λ_7	-	-	$4\ 10^{-4}$	$9.02\ 10^{-2}$
λ_8	-	-	-	$4.42\ 10^{-2}$
λ_9	-	-	-	$4.09\ 10^{-2}$
λ_{10}	-	-	-	$1.2\ 10^{-3}$
λ_{11}	-	-	-	$5\ 10^{-4}$
λ_{12}	-	-	-	$3\ 10^{-4}$

FIG. 4.7 – Les valeurs propres de T en fonction de k. (2 demi-disques dans le guide)

k	1.4	3	k	1.4	3
$\lambda_1(P)$	4.5376	2.5185	$\lambda_1(G)$	23.418	7.5050
$\lambda_2(P)$	1.9230	1.5450	$\lambda_2(G)$	0.0252	3.9881
$\lambda_3(P)$	$2\ 10^{-4}$	0.3327	$\lambda_3(G)$	$8.6\ 10^{-3}$	0.3402
$\lambda_4(P)$	-	$1.9\ 10^{-3}$	$\lambda_4(G)$	-	$1.74\ 10^{-2}$
$\lambda_5(P)$	-	$4\ 10^{-4}$	$\lambda_5(G)$	-	$2.7\ 10^{-3}$
$\lambda_6(P)$	-	-	$\lambda_6(G)$	-	-

FIG. 4.8 – Les valeurs propres de T en fonction de k. (un seul demi-disque dans le guide. P (resp. G) : uniquement le petit (resp. gros) obstacle est présent dans le guide.)

Le champ incident correspondant à l'émission du premier vecteur propre lorsque le petit obstacle est présent seul dans le guide ne correspond pas à un effet de focalisation. Ce champ est absent en présence du gros obstacle seul ou lorsque les deux obstacles sont ensemble dans le guide.

Dans le cas $k = 3$, la présence de plusieurs valeurs propres significatives de T lorsque il y a uniquement un demi-disque (que ce soit le petit ou le gros) dans le guide justifie la même chose lorsque les deux obstacles sont présents et donc l'absence de focalisation sélective. Notons que dans ce cas, la taille des obstacles, la distance entre les obstacles, la distance qui sépare la distance des obstacles des interfaces du guide et la longueur d'onde sont du même ordre de grandeur égal à 2 et que la focalisation sélective a eu lieu dans l'espace libre (voir figures (2.3-2.5) dans l'article pour $k = 3.14$).

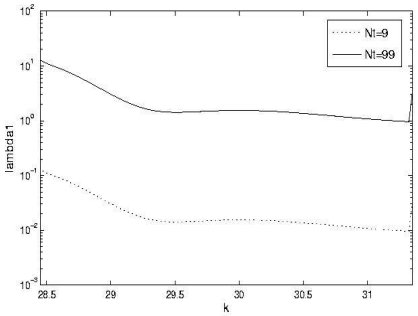


FIG. 4.9 – Première valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide).

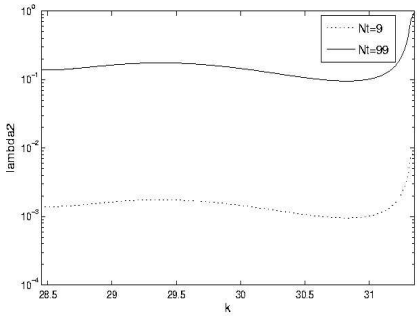


FIG. 4.10 – Deuxième valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide).

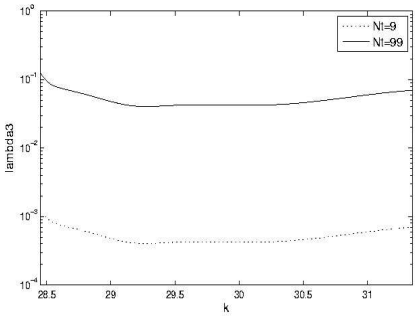


FIG. 4.11 – Troisième valeur propre de T (disques disposés selon une horizontale dans le guide).

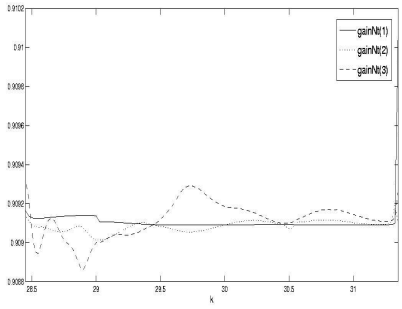


FIG. 4.12 – Gain apporté par l'augmentation de transducteurs (disques disposés selon une horizontale dans le guide).

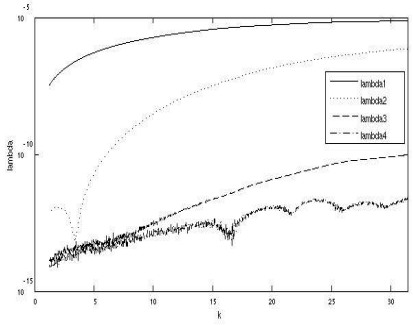


FIG. 4.13 – 4 premières valeurs propres de T en fonction de k. (disques disposés selon une verticale dans l'espace libre)

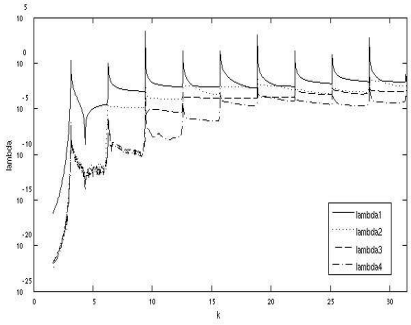


FIG. 4.14 – 4 premières valeurs propres de T en fonction de k. (disques disposés selon une verticale dans le guide)

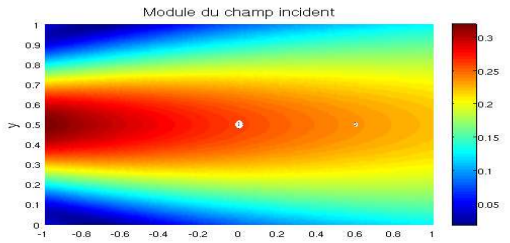


FIG. 4.15 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (espace libre)

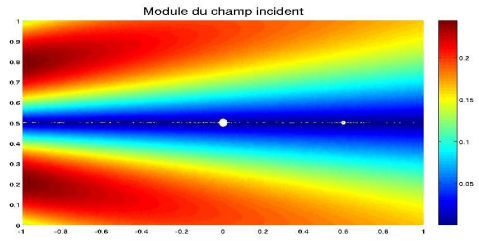


FIG. 4.16 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (espace libre)

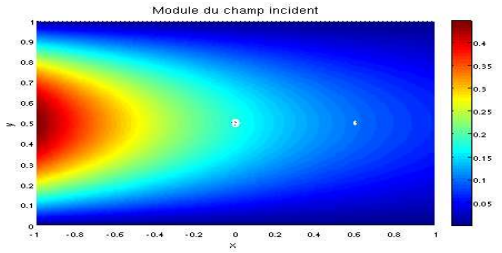


FIG. 4.17 – Emission du premier vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

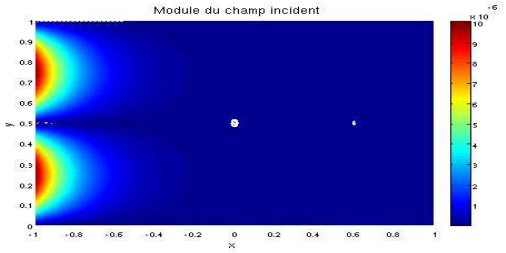


FIG. 4.18 – Emission du second vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

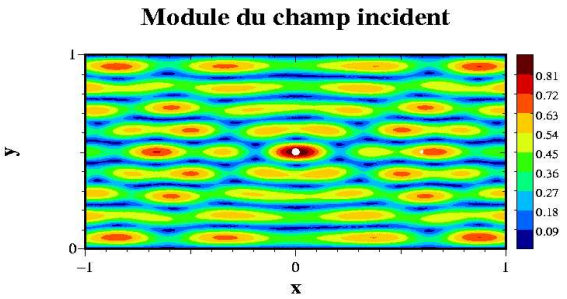


FIG. 4.19 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes)

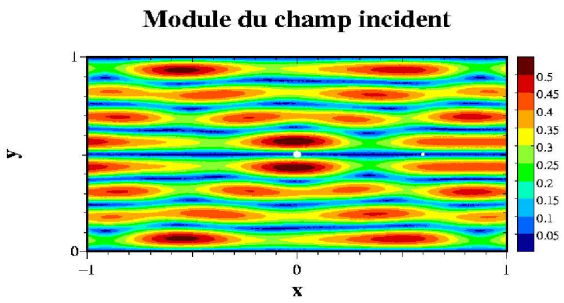


FIG. 4.20 – Emission du second vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes)

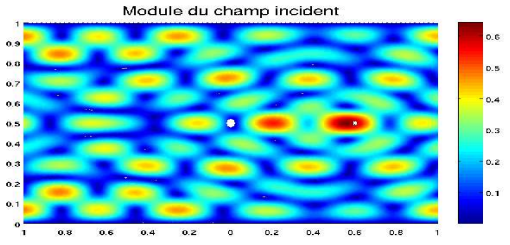


FIG. 4.21 – Emission du troisième vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes)

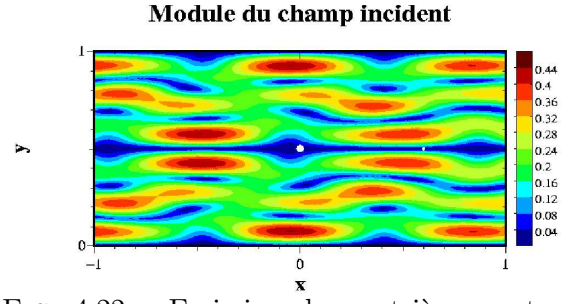


FIG. 4.22 – Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$, $N_t = 99$. (guide d'ondes)

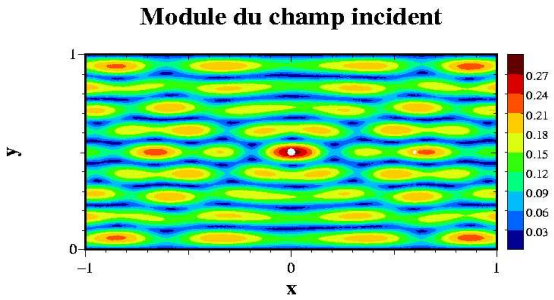


FIG. 4.23 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

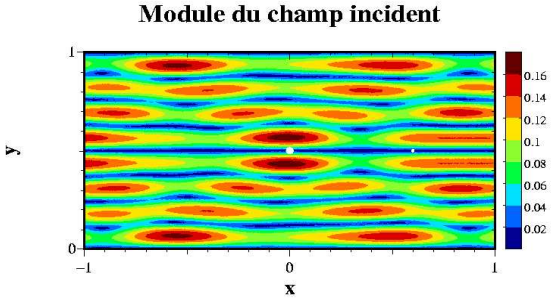


FIG. 4.24 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

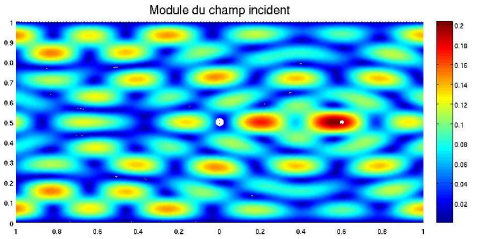


FIG. 4.25 – Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

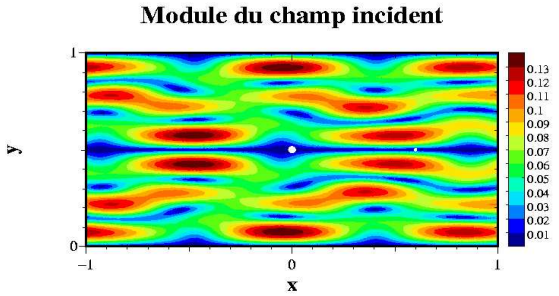


FIG. 4.26 – Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

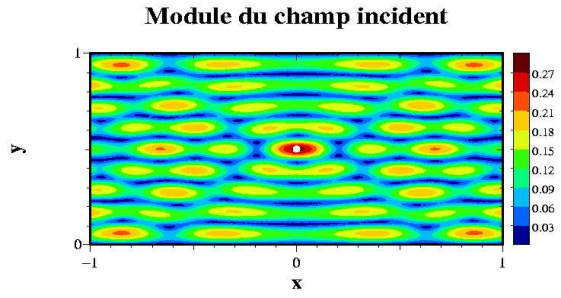


FIG. 4.27 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

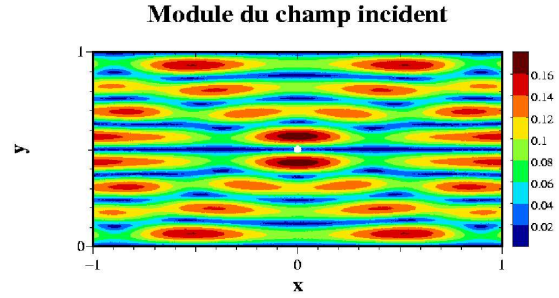


FIG. 4.28 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

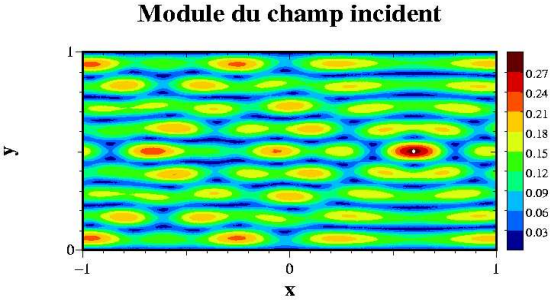


FIG. 4.29 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

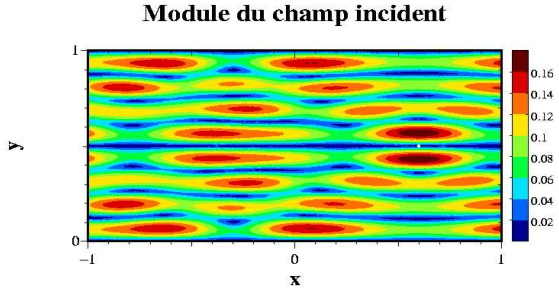


FIG. 4.30 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

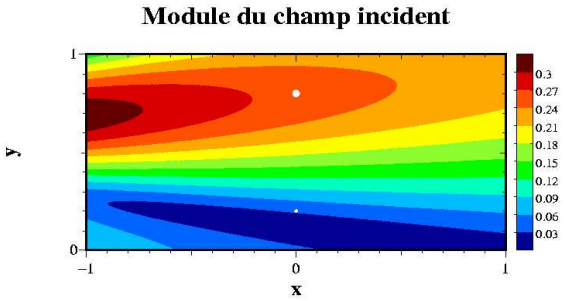


FIG. 4.31 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (espace libre)

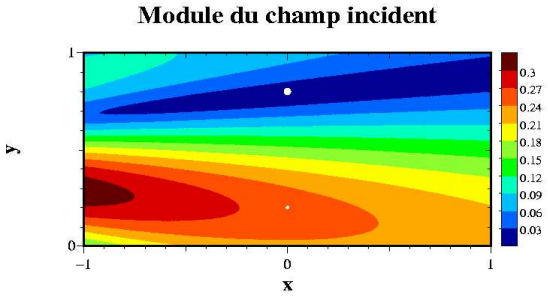


FIG. 4.32 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (espace libre)

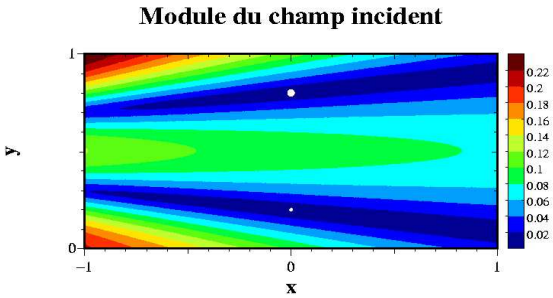


FIG. 4.33 – Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (espace libre)

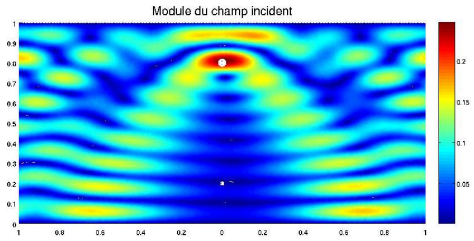


FIG. 4.34 – Emission du premier vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

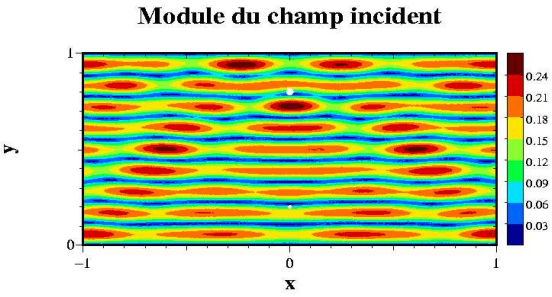


FIG. 4.35 – Emission du second vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

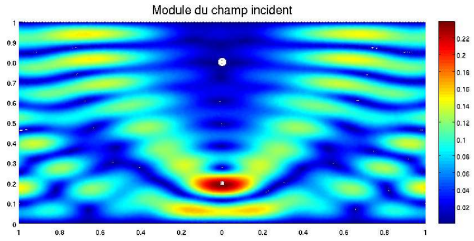


FIG. 4.36 – Emission du troisième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

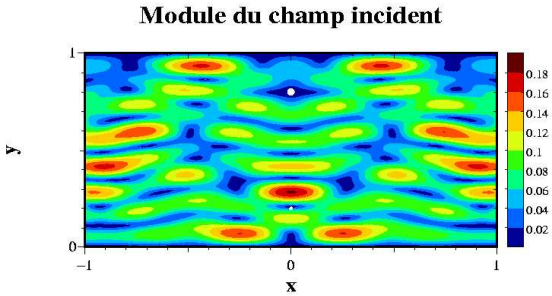


FIG. 4.37 – Emission du quatrième vecteur propre $k = 30$. (guide d'ondes)

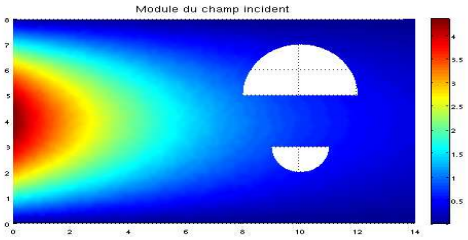


FIG. 4.38 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 0.35$. (guide d'ondes)

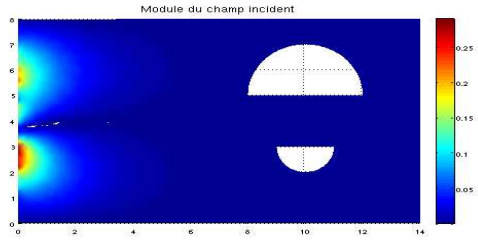


FIG. 4.39 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 0.35$. (guide d'ondes)

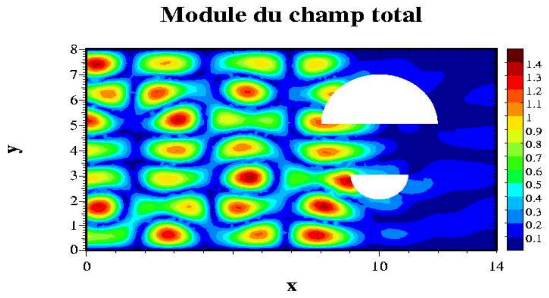


FIG. 4.40 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

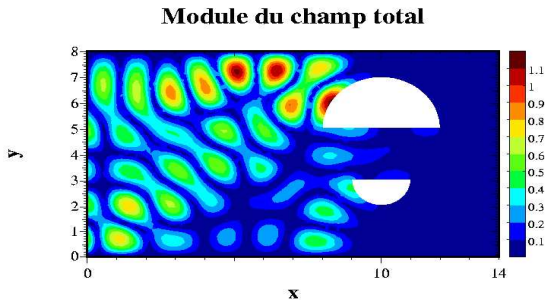


FIG. 4.41 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

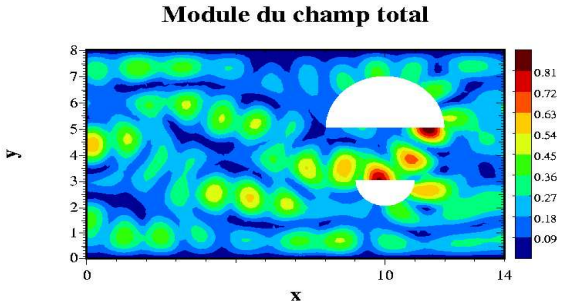


FIG. 4.42 – Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

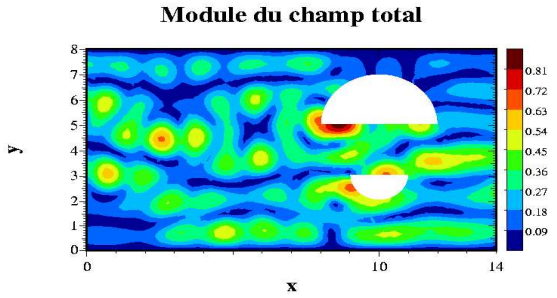


FIG. 4.43 – Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

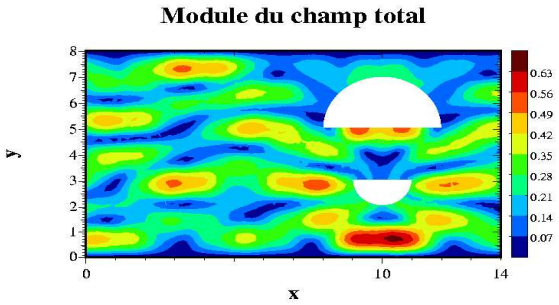


FIG. 4.44 – Champ total associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 3$. (guide d'ondes)

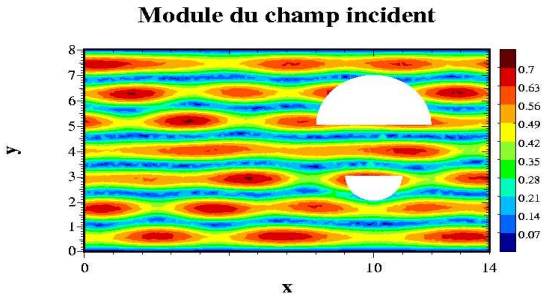


FIG. 4.45 – Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

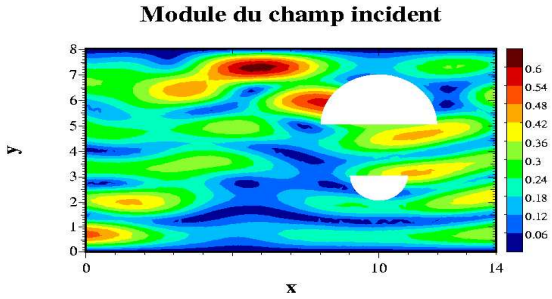


FIG. 4.46 – Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

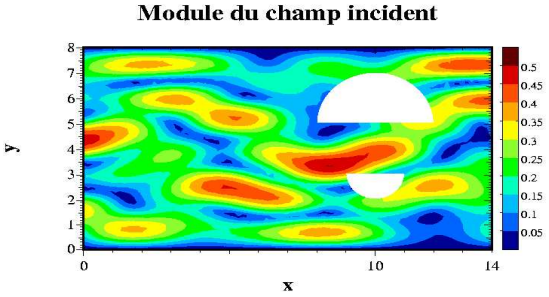


FIG. 4.47 – Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

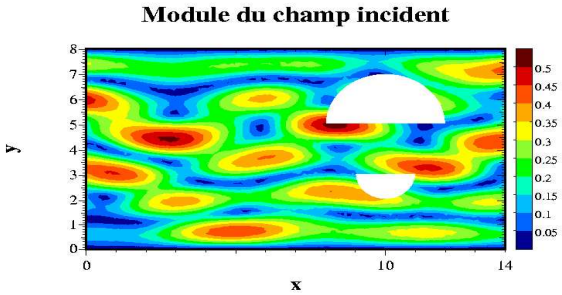


FIG. 4.48 – Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

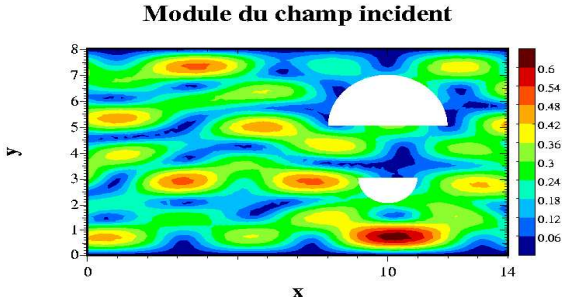


FIG. 4.49 – Champ incident associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

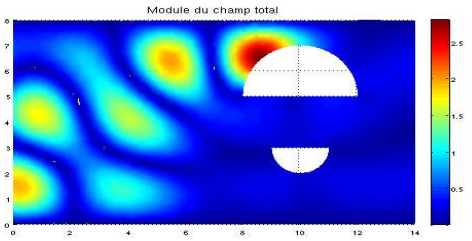


FIG. 4.50 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

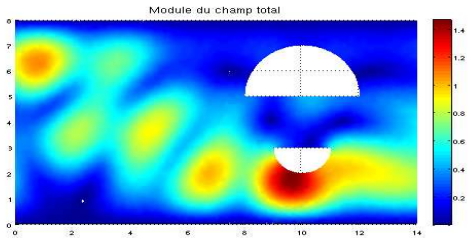


FIG. 4.51 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

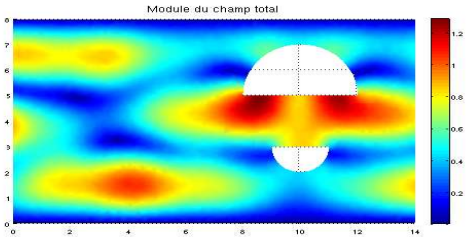


FIG. 4.52 – Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

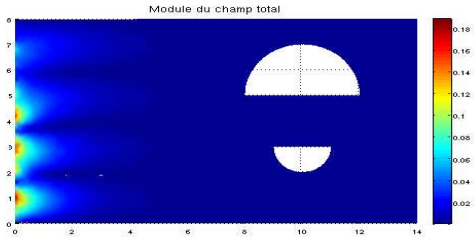


FIG. 4.53 – Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

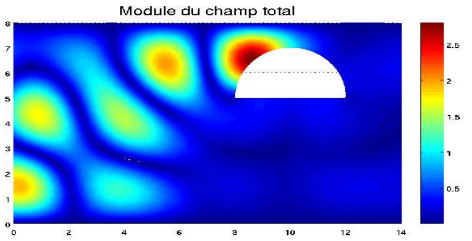


FIG. 4.54 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

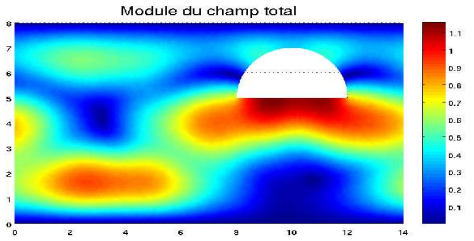


FIG. 4.55 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

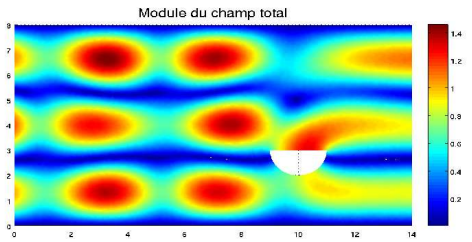


FIG. 4.56 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

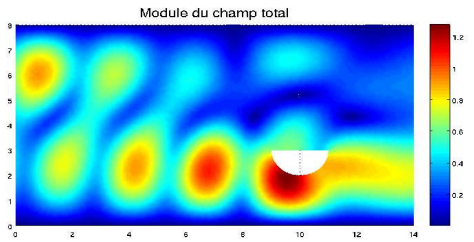


FIG. 4.57 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

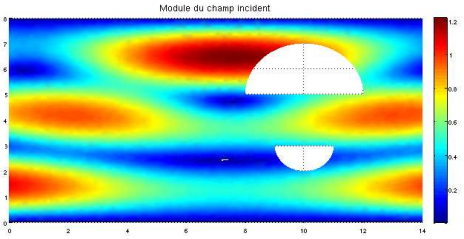


FIG. 4.58 – Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

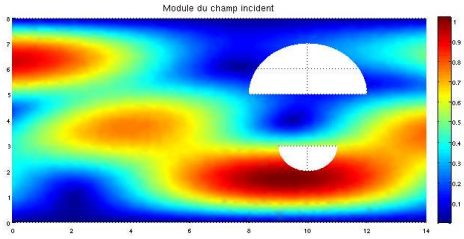


FIG. 4.59 – Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

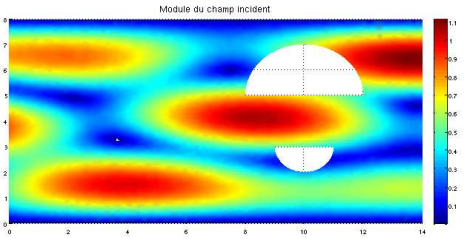


FIG. 4.60 – Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

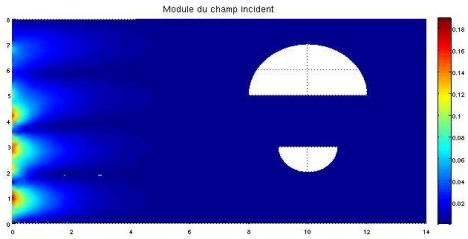


FIG. 4.61 – Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 1.4$. (guide d'ondes)

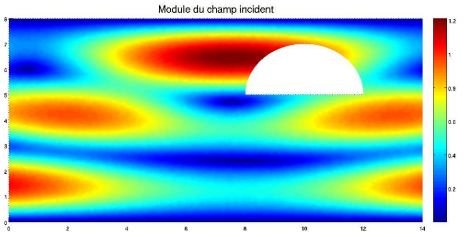


FIG. 4.62 – Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

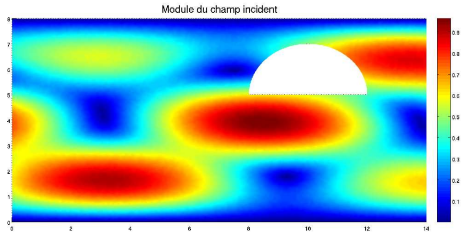


FIG. 4.63 – Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le gros obstacle est présent dans le guide)

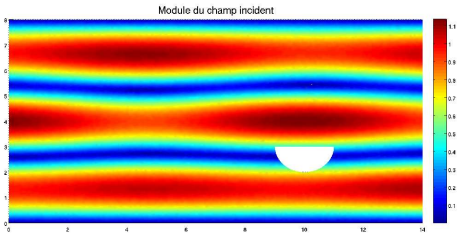


FIG. 4.64 – Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

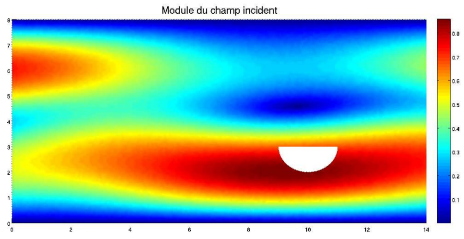


FIG. 4.65 – Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 1.4$. (uniquement le petit obstacle est présent dans le guide)

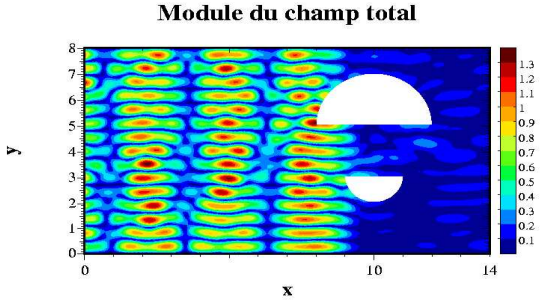


FIG. 4.66 – Champ total associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

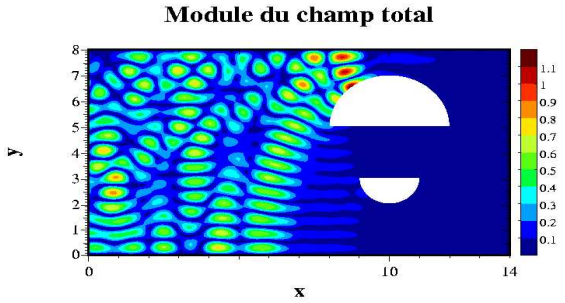


FIG. 4.67 – Champ total associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

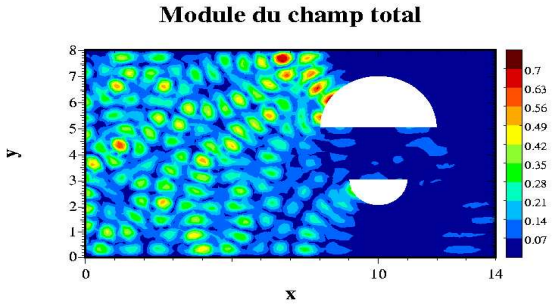


FIG. 4.68 – Champ total associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

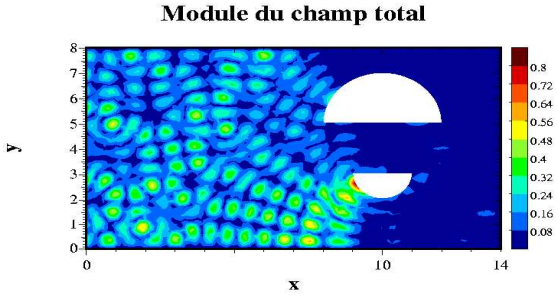


FIG. 4.69 – Champ total associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

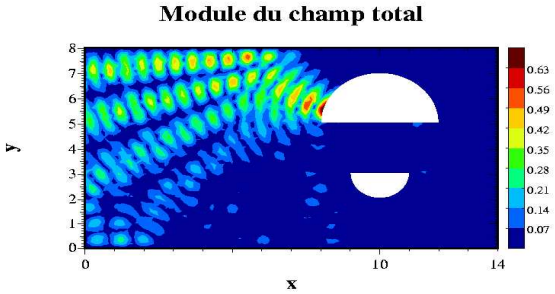


FIG. 4.70 – Champ total associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

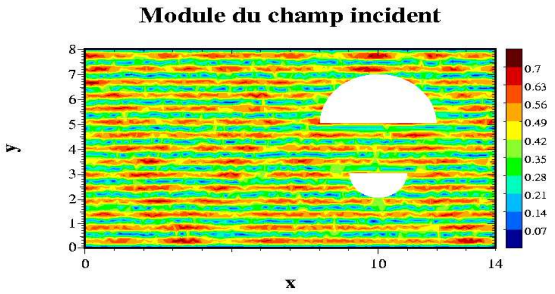


FIG. 4.71 – Champ incident associé à l'émission du premier vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

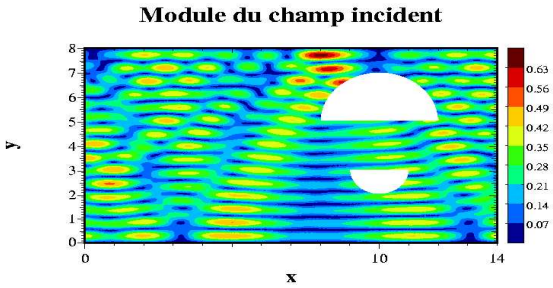


FIG. 4.72 – Champ incident associé à l'émission du second vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

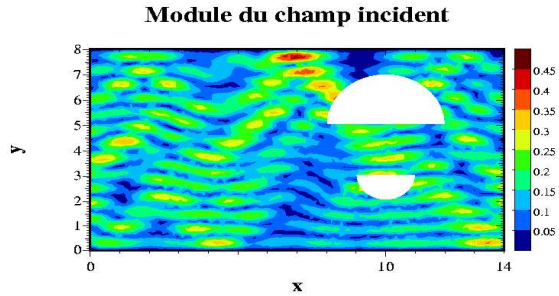


FIG. 4.73 – Champ incident associé à l'émission du troisième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

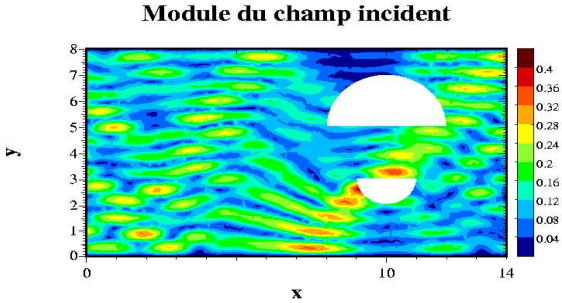


FIG. 4.74 – Champ incident associé à l'émission du quatrième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

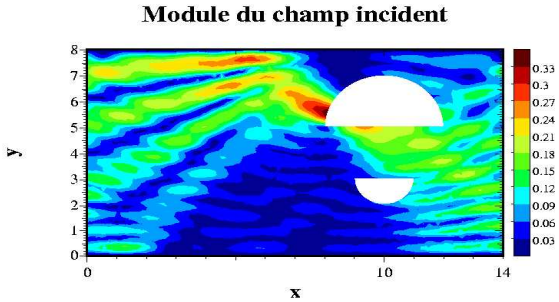


FIG. 4.75 – Champ incident associé à l'émission du cinquième vecteur propre $k = 6$. (guide d'ondes)

Deuxième partie

Retournement temporel en régime transitoire

Introduction au régime transitoire

À présent, nous savons qu'en régime harmonique, pour focaliser sur les obstacles qui existent dans le milieu de propagation, on calcule d'abord les valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel : dans le cas d'obstacles petits et distants entre eux, le nombre d'obstacles est égal au nombre de valeurs propres significatives, c'est à dire supérieures à la précision de mesure des instruments ; les autres valeurs propres correspondant au bruit.

Le champ incident qui maximise l'énergie diffractée par les obstacles est égal à l'onde correspondant au vecteur propre g_1 associé à la plus grande valeur propre μ_1 donnée par :

$$\mu_1 = \sup_{g \in L^2(\partial M)} \frac{(Tg, g)_{L^2(\partial M)}}{||g||^2_{L^2(\partial M)}} = \sup_{g \in L^2(\partial M)} \frac{||Dg||^2_{L^2(\partial M)}}{||g||^2_{L^2(\partial M)}}.$$

Ainsi, pour focaliser globalement sur les obstacles, il faut émettre un champ incident correspondant à une combinaison linéaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres significatives et que la meilleure façon pour focaliser sélectivement sur un obstacle donné $\mathcal{O}_p$ est d'envoyer le vecteur propre g_p, l'amplitude de l'onde diffractée associée à l'onde incidente g_p est proportionnelle à la racine carrée de la valeur propre μ_p.

En réalité, les signaux émis sont *localisés en temps* et donc leur support fréquentiel est non borné donc pas réduit à un point comme dans le cas du régime harmonique. Les études expérimentales montrent que lorsqu'une source ponctuelle située dans le milieu de propagation émet une impulsion brève qui sera reçue, retournée temporellement puis réémise dans le milieu par le MRT, le signal réémis focalise en espace et en temps sur la position de la source initiale, supposée inactive après l'émission de l'impulsion. Autrement dit, l'énergie émise par le MRT est concentrée dans le temps au voisinage de la position de la source.

Le milieu de propagation étant inaccessible, on cherche alors comme dans le cas de destruction des calculs rénaux à "taper fort au bon endroit" autrement dit concentrer dans le temps l'energie locale au voisinage de l'obstacle. En effet, par le principe de conservation de l'énergie, l'energie totale qui existe dans tout le milieu de propagation est égale à chaque instant à l'énergie émise par le MRT. Il s'agit donc de focaliser cette énergie au voisinage du calcul rénal pendant un laps de temps court pour pouvoir le détruire d'une manière non invasive.

Les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel en régime harmonique fournissent une réponse à la question de focalisation spatiale. Il semble donc naturel de chercher à construire des signaux transitoires à partir de ceux-ci, par des superpositions continues de signaux harmoniques dans une bande de fréquence donnée. Toute la question est de trouver une superposition qui conduise à une concentration temporelle de l'énergie acoustique au voisinage de l'obstacle visé.

Nous ne savons pas pour l'instant répondre à cette question. Nous avons seulement répondu à une question préliminaire qui concerne le lien entre les opérateurs de retournement temporel des régimes transitoire et harmonique. Nous étudions aussi une "mauvaise solution" à notre question, une solution qui conduit exactement à l'effet inverse de la concentration temporelle recherchée. Puisque en régime harmonique, les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel fournissent les maxima de l'énergie diffractée vers le MRT, il est naturel de transposer cette question d'optimisation de l'énergie diffractée au régime transitoire. Mais nous ne ferons que revenir au point de départ : les optima sont atteints asymptotiquement par les éléments propres du régime harmonique. Ainsi optimiser l'énergie diffractée par les obstacles conduit à un étalement dans le temps, non une concentration !

Le chapitre suivant est consacré à l'étude du lien entre le processus de retournement temporel en régime transitoire et celui en régime harmonique dans le cadre du modèle "champ lointain" où le MRT est supposé situé à l'infini et non intrusif.

Le dernier chapitre de cette thèse est dédié à la réponse à la question d'optimisation d'énergie diffractée par les obstacles en régime transitoire.

Chapitre 5

Etude du modèle “Champ lointain” en régime transitoire

L'objet de ce chapitre est d'étudier d'abord le processus de retournement temporel de type “champ lointain” en régime transitoire, puis d'établir le lien avec le régime harmonique qui a été étudié dans [44].

Nous nous intéressons alors au comportement de l'onde à longue distance ($\|x\| \to +\infty$). Si l'on suppose que l'on excite le milieu de propagation à partir de l'infini et pendant un laps de temps fini alors, vu que la perturbation (les obstacles) est à support compact, l'interaction entre l'onde incidente et les obstacles s'effectue pendant un temps fini et donc l'onde, après avoir interagie avec les obstacles, reste localisée en espace. Pour que l'onde soit localisée à l'infini, il faut attendre suffisamment. On peut donc se contenter du comportement de l'onde lorsque $t \to \pm\infty$ ce qui nous amène à l'étude des opérateurs d'onde [55, 42, 88] qui permettent de comparer l'étude de propagation de l'onde dans l'espace perturbé (en présence d'obstacles) à celle dans l'espace libre.

Le chapitre est réparti de la façon suivante : la première partie s'intéresse à l'étude du phénomène de propagation d'ondes dans l'espace libre, la seconde à celui dans l'espace perturbé et la troisième et dernière à la description du processus de retournement temporel pour le modèle “champ lointain”.

5.1 Propagation d'ondes dans l'espace libre

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la propagation d'ondes acoustiques dans le milieu homogène $\mathbb{R}^d$ (d=2 ou 3), et nous étudions le comportement asymptotique de l'onde lorsque $\|x\| \to +\infty$ et lorsque $t \to \pm\infty$.

5.1.1 Formulation mathématique

On note par $\varphi(x,t)$, l'état à *valeurs réelles* qui décrit l'évolution de l'onde en fonction du temps. φ vérifie le problème suivant :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$\varphi(.,0) = f \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t}(.,0) = g \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.1 *La condition à $t = 0$ (5.2) joue le rôle d'une condition initiale pour $t > 0$, et finale pour $t < 0$.*

Commençons par rappeler un résultat bien connu [26]

Théorème 5.1.1 *L'opérateur $\mathbb{A} = -\Delta$ est auto-adjoint positif dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$, de domaine :*

$$\mathrm{D}(\mathbb{A}) = H^2(\mathbb{R}^d) \tag{5.3}$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser le lemme suivant qui caractérise un opérateur auto-adjoint :

Lemme 5.1.1 *Soit $(\mathcal{V}, ||.||_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}})$ deux espaces de Hilbert tels que $\mathcal{V}$ s'injecte continûment dans $\mathcal{H}$*

$$\exists C > 0,\ ||u||_{\mathcal{H}} \leq C||u||_{\mathcal{V}},\ \forall u \in \mathcal{V}$$

et dense dans $\mathcal{H}$

$$\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{H}$$

Soit a(.,.) une forme sesquilinéaire hermitienne

$$a(u,v) = \overline{a(v,u)},\ \forall u, v \in \mathcal{V}$$

continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$

$$\exists M > 0,\ |a(u,v)| \leq M||u||_{\mathcal{V}}||v||_{\mathcal{V}},\ \forall u, v \in \mathcal{V}$$

et $\mathcal{V}$-coercive par rapport à $\mathcal{H}$

$$\exists \lambda > 0,\ \exists \alpha > 0,\ a(u,u) + \lambda||u||^2_{\mathcal{H}} \geq \alpha||u||^2_{\mathcal{V}},\ \forall u \in \mathcal{V}.$$

Alors l'opérateur $\mathbb{A}$ défini par

$$(\mathbb{A}u, v)_{\mathcal{H}} = a(u,v),\ \forall u \in D(\mathbb{A}),\ \forall v \in \mathcal{V}$$

$$D(\mathbb{A}) = \{u \in \mathcal{V};\ \exists K_u > 0,\ \forall v \in \mathcal{V},\ |a(u,v)| \leq K_u||v||_{\mathcal{H}}\}$$

est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ (de domaine dense dans $\mathcal{H}$).

La formule de Green appliquée à l'opérateur des ondes ($\mathbb{A} = -\Delta$) suggère de considérer la forme bilinéaire

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\varphi.\nabla\psi,$$

agissant sur $\mathcal{V} = H^1(\mathbb{R}^d)$.
Nous allons montrer que $\mathbb{A}$ est donné par

$$(\mathbb{A}\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = a(\varphi, \psi),\ \forall\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{A}),\ \forall\psi \in \mathcal{V} \tag{5.4}$$

$$\mathrm{D}(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \mathcal{V};\ \exists K_\varphi > 0,\ \forall\psi \in \mathcal{V},\ |a(\varphi, \psi)| \leq K_\varphi \|\psi\|_{\mathcal{H}}\} \tag{5.5}$$

En vérifiant que a est une forme bilinéaire symétrique positive continue sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ coercive par rapport à $\mathcal{H}$ et en appliquant le lemme 5.1.1, on déduit que l'opérateur $\mathbb{A}$ associé à la forme a est auto-adjoint positif.
On constate que si $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{A})$ alors (5.4) montre que

$$(\mathbb{A}\varphi, \psi) = \langle -\Delta\varphi, \psi\rangle,\ \forall\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \tag{5.6}$$

où Δ est pris au sens des distributions.
D'après (5.5), il existe $K_\varphi > 0$ tel que

$$|\langle -\Delta\varphi, \psi\rangle| \leq K_\varphi \|\varphi\|_{\mathcal{H}},\ \forall\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

et par conséquent $-\Delta\varphi \in \mathcal{H}$. D'où l'équation (5.6) s'écrit plus précisément $\mathbb{A}\varphi = -\Delta\varphi$. Et il est facile de vérifier (en utilisant la transformée de Fourier) que φ est en fait dans $H^2(\mathbb{R}^d)$. On conclut alors que $\mathrm{D}(\mathbb{A}) = H^2(\mathbb{R}^d)$.

□

Dans la suite de ce chapitre, nous allons travailler avec une formulation condensée du premier ordre qui est *mieux adaptée* au concept de retournement temporel.

5.1.2 Formulation condensée

Le problème (5.1)-(5.2) peut être écrit sous la forme d'un problème du premier ordre en temps, en introduisant des états à *valeurs complexes*. Pour ne pas alourdir les notations, on note encore $\mathcal{H}$ l'extension complexe de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons :

$$u = \varphi + i\mathbb{A}^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ et } h = f + i\mathbb{A}^{-1/2}g \tag{5.7}$$

où $\mathbb{A}^{-1/2}$ désigne l'inverse de $\mathbb{A}^{1/2}$, la racine carrée de $\mathbb{A}$. Ces opérateurs seront définis dans le paragraphe qui suit, à partir de la représentation spectrale de $\mathbb{A}$.
On vérifie alors immédiatement (en séparant les parties réelles et imaginaires) que (5.1)-(5.2) est équivalent à :

$$\frac{du}{dt} + i\mathbb{A}^{1/2}u = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

$$u(0) = h. \tag{5.9}$$

Remarque 5.1.2 *L'état complexe u est équivalent au couple champ-vitesse $(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t})$. L'équation (5.8) est une équation de type Schrödinger associée à l'Hamiltonien $\mathbb{A}^{1/2}$.*

Théorème 5.1.2 ([88]) *Si $h \in \mathcal{H}$, alors le problème (5.8)-(5.9) admet une solution unique*

$$u(t) = e^{-it\mathbb{A}^{1/2}} h \ \in \mathcal{H}. \tag{5.10}$$

Remarque 5.1.3 *L'énergie associée à l'onde $u(t)$ peut être définie par $\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{\mathcal{H}}$. Comme l'opérateur $e^{-it\mathbb{A}^{1/2}}$ est unitaire*[1]*, alors l'énergie se conserve au cours du temps (c'est une constante égale à $\frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathcal{H}}$).*

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous intéressons à *l'effet du retournement temporel sur l'inconnue u*. Le retourné temporel de φ, $\varphi_R(x,t) = \varphi(x,-t)$, vérifie le problème suivant

$$\frac{\partial^2\varphi_R}{\partial t^2} + \mathbb{A}\varphi_R = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{5.11}$$

$$\varphi_R(.,0) = f \text{ et } \frac{\partial\varphi_R}{\partial t}(.,0) = -g \tag{5.12}$$

L'état complexe associé à φ_R est

$$u_R = \varphi_R + i\mathbb{A}^{-1/2}\frac{\partial\varphi_R}{\partial t} \tag{5.13}$$

Il est facile de vérifier, en utilisant (5.11)-(5.12), que u_R vérifie le problème

$$\frac{du_R}{dt} + i\mathbb{A}^{1/2}u_R = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{5.14}$$

$$u_R(0) = h_R = \overline{h}. \tag{5.15}$$

qui admet pour solution

$$u_R(t) = e^{-it\mathbb{A}^{1/2}}\overline{h} = \overline{u(-t)} \tag{5.16}$$

Ainsi, retourner le temps dans cette formulation du problème qui utilise des états complexes revient à changer t en $-t$ et conjuguer les états. Du point de vue de l'état de référence (à t=0), le retournement temporel équivaut à la conjugaison (changer h en $\overline{h}$).

[1] voir paragraphe suivant

5.1.3 Représentation spectrale de l'opérateur $\mathbb{A}$

Considérons la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie par

(5.17)
$$\forall\ u \in L^2(\mathbb{R}^d_x),\ (\mathcal{F}u)(k) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\|x\|<R} e^{-ik.x} u(x)\mathrm{d}x \text{ pour presque tout } k \in \mathbb{R}^d.$$

qui apparaît comme une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^d_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d_k)$.
La formule d'inversion s'écrit

$$u(x) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}u)(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\|k\|<R} e^{+ik.x} (\mathcal{F}u)(k)\mathrm{d}k. \tag{5.18}$$

Il est facile de vérifier que

$$(\mathcal{F}(-\Delta u))(k) = \|k\|^2 (\mathcal{F}u)(k),\ \forall u \in \mathrm{D}(\mathbb{A}).$$

On en déduit que

$$\mathbb{A} = \mathcal{F}^* \|k\|^2 \mathcal{F} \tag{5.19}$$

Pour simplifier, nous notons $\|k\|^2$, dans l'expression (5.19), l'opérateur de multiplication par la fonction scalaire $\|k\|^2$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d_k)$.
Introduisons les coordonnées sphériques pour k

$$k = \lambda\alpha \text{ avec } \lambda \geq 0,\ \alpha \in S^{d-1} \text{ et } \mathrm{d}k = \lambda^{d-1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma(\alpha) \tag{5.20}$$

où $\mathrm{d}\sigma(\alpha)$ désigne la mesure surfacique sur la sphère unité S^{d-1}.
Nous avons alors l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}u(k)|^2\mathrm{d}k = \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{S^{d-1}} |\lambda^{(d-1)/2}\mathcal{F}u(\lambda\alpha)|^2\mathrm{d}\sigma(\alpha)\mathrm{d}\lambda$$

qui prouve que la transformation

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}: \ L^2(\mathbb{R}^d_k) & \to & \hat{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1}) = \{\hat{u}(\lambda,\alpha);\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\int_{S^{d-1}} |\hat{u}(\lambda,\alpha)|^2\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma(\alpha) < \infty\} \\ v(k) & \mapsto & \mathcal{C}(v)(\lambda,\alpha) = \lambda^{(d-1)/2} v(\lambda\alpha) \end{array}$$

est un opérateur unitaire. Par conséquent, on a la

Proposition 5.1.1 *La relation (5.19) est équivalente à*

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{A} = \mathcal{U}^*\lambda^2\mathcal{U} \\ \text{où } \mathcal{U} = \mathcal{C}\mathcal{F}. \end{array} \right. \tag{5.21}$$

L'opérateur $\mathcal{U}$ défini de $L^2(\mathbb{R}^d_x)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$ apparaît comme produit de composition de deux opérateurs unitaires : il est donc unitaire.

L'opérateur $\mathcal{U}$ diagonalise l'opérateur $\mathbb{A}$ au sens de l'expression (5.21). Cette représentation diagonale fournit la clé pour un calcul fonctionnel de $\mathbb{A}$. On a la

Proposition 5.1.2 ([42]) *Si f est une fonction continue à valeurs complexes et bornée sur $\mathbb{R}$ (respectivement, à valeurs réelles mais pas nécessairement bornée), alors $f(\mathbb{A})$ est un opérateur borné (respectivement, auto-adjoint) sur $\mathcal{H}$. $f(\mathbb{A})$ est définie par*

$$f(\mathbb{A}) = \mathcal{U}^* f(\lambda^2)\mathcal{U} \tag{5.22}$$

De plus, on a

$$f(\mathbb{A})^* = \overline{f}(\mathbb{A})$$

Ainsi, les opérateurs $\mathbb{A}^{1/2}$, $\mathbb{A}^{-1/2}$ et $e^{-it\mathbb{A}^{1/2}}$ sont définis par

$$\mathbb{A}^{1/2} = \mathcal{U}^* \lambda \mathcal{U} \tag{5.23}$$

$$\mathbb{A}^{-1/2} = \mathcal{U}^* \lambda^{-1} \mathcal{U} \tag{5.24}$$

$$e^{-it\mathbb{A}^{1/2}} = \mathcal{U}^* e^{-it\lambda} \mathcal{U}, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.25}$$

$\mathbb{A}^{1/2}$ et $\mathbb{A}^{-1/2}$ sont des opérateurs non bornés auto-adjoints positifs, alors que $e^{-it\mathbb{A}^{1/2}}$ est un opérateur borné unitaire.

5.1.4 Développement en fonctions propres généralisées

La transformation $\mathcal{U}$ peut s'interpréter comme l'opérateur de décomposition sur la famille d'ondes planes

$$w_{\lambda,\alpha}(x) = \frac{\lambda^{(d-1)/2}}{(2\pi)^{d/2}} \ e^{i\lambda\alpha.x}, \ \lambda \in]0, +\infty[, \ \alpha \in S^{d-1} \tag{5.26}$$

En effet,

$$\mathcal{U}u(\lambda, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\overline{w_{\lambda,\alpha}(x)}\mathrm{d}x \tag{5.27}$$

peut s'écrire

$$\mathcal{U}u(\lambda, \alpha) = \langle u, w_{\lambda,\alpha} \rangle \tag{5.28}$$

où le crochet $\langle ., . \rangle$ note une extension du produit hermitien de $L^2(\mathbb{R}^d_x)$. Les fonctions $w_{\lambda,\alpha}$ n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^d_x)$. Il faut alors que les fonctions u soient suffisamment décroissantes à l'infini pour justifier l'écriture (5.28). Comme les fonctions $w_{\lambda,\alpha}$ sont bornées à l'infini,

nous pouvons considérer un espace fonctionnel de type L^2 mais à poids. Nous choisissons de plonger ces fonctions dans l'espace à poids $L^2_{-s}(\mathbb{R}^d_x)$ avec $s > d/2$ et

$$L^2_s(\mathbb{R}^d_x) = \{u; (1 + \|x\|^2)^s |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d_x)\}.$$

À ce stade, nous pouvons voir le crochet $\langle ., . \rangle$ comme le produit de dualité entre $L^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ (espace contenant les ondes planes) et $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ (espace contenant les fonctions u "suffisamment décroissantes") en identifiant $L^2(\mathbb{R}^d)$ à son dual dans le schéma

$$L^2_s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$$

Propriété 5.1.1 *La transformation $\mathcal{U}$ peut s'interpréter comme un opérateur de décomposition sur la famille d'ondes planes $\{w_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda,\alpha}$:*

$$\mathcal{U}u(\lambda, \alpha) = \langle u, w_{\lambda,\alpha} \rangle, \ \forall u \in L^2_s(\mathbb{R}^d), s > d/2$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$.
La définition de $\mathcal{U}$ sur tout l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ découle de la densité de $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En utilisant la définition de $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{-1}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}^* : & \hat{\mathcal{H}} & \to & L^2(\mathbb{R}^d_k) \\ & \hat{u}(\lambda, \alpha) & \mapsto & \mathcal{C}^*(\hat{u})(k) = \dfrac{\hat{u}(\lambda, \alpha)}{\lambda^{(d-1)/2}} \end{array}$$

et celle de $\mathcal{F}^*$ (soit (5.18)), la transformation unitaire inverse $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{C}^*$ est donnée par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{U}^* : \ L^2(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1}) & \to & L^2(\mathbb{R}^d_x) \\ \hat{u}(\lambda, \alpha) & \mapsto & (\mathcal{U}^*\hat{u})(x) = \displaystyle\int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{\alpha \in S^{d-1}} \hat{u}(\lambda, \alpha) w_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha) \mathrm{d}\lambda. \end{array}$$

Remarque 5.1.4 *Les ondes planes $\{w_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda,\alpha}$ s'appellent fonctions propres ($\mathbb{A} w_{\lambda,\alpha} = \lambda^2 w_{\lambda,\alpha}$) généralisées (n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^d)$). Elles diagonalisent $\mathbb{A}$ au sens de*

$$\mathbb{A}u = \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{\alpha \in S^{d-1}} \lambda^2 \langle u, w_{\lambda,\alpha} \rangle w_{\lambda,\alpha} \mathrm{d}\sigma(\alpha) \mathrm{d}\lambda, \ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{5.29}$$

qui est une simple réécriture de (5.21).
λ^2 s'appelle "variable spectrale", $\hat{\mathcal{H}}$ s'appelle "espace spectral" et $\mathcal{U}$ est la "transformation spectrale".

En utilisant (5.10) et (5.25), nous obtenons le développement de la solution $u(x, t)$ sur les fonctions propres généralisées

$$u(x, t) = \int_{\lambda=0}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \int_{\alpha \in S^{d-1}} \langle h, w_{\lambda,\alpha} \rangle w_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha) \mathrm{d}\lambda. \tag{5.30}$$

Ainsi, *l'onde transitoire* apparaît comme *une superposition continue d'ondes planes (harmoniques en temps)* de direction α et de fréquence λ.

Maintenant, nous allons utiliser cette décomposition (5.30) pour étudier le comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ puis lorsque $t \to \pm\infty$.
Les paragraphes 5.1.5 et 5.1.6 sont une réécriture de résultats de C. H. Wilcox [88] dans un cadre fonctionnel légérement différent.

5.1.5 Comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $\|x\| \to +\infty$

On pose pour $\lambda \in]0,+\infty[$:

$$V(x,\lambda) = \int_{\alpha \in S^{d-1}} \langle h, w_{\lambda,\alpha}\rangle w_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha),\ x \in \mathbb{R}^d \tag{5.31}$$

$V(.,\lambda)$ est une superposition d'ondes planes de même fréquence λ : elle s'appelle *onde de Herglotz*. Il est facile de vérifier que $V(x,\lambda)$ est une solution de l'équation de Helmholtz.

$$(\Delta + \lambda^2)V(x,\lambda) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

L'expression (5.30) s'écrit alors

$$u(x,t) = \int_{\lambda=0}^{+\infty} e^{-i\lambda t} V(x,\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{5.32}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $\|x\| \to +\infty$, nous étudions d'abord celui de $V(x,\lambda)$. Pour cela, nous allons considérer des données initiales $h = \mathcal{U}^*\hat{h}$ tel que $\hat{h}$ appartient à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$ à support compact.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1}) = \{\hat{h} \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1});\ \text{supp}\ \hat{h}(.,\beta) \subset [a,b],\ \forall \beta \in S^{d-1},\ 0 < a = a(h) < b = b(h)\}$.

En appliquant la méthode de la phase stationnaire ([87]) à $V(.,\lambda)$, on a le :

Lemme 5.1.2 *Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{U}h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$, $V(x,\lambda)$ a le comportement suivant lorsque $\|x\| \to +\infty$*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V(x,\lambda) & = & \dfrac{(-i)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \dfrac{e^{i\lambda\|x\|}}{\|x\|^{(d-1)/2}} \mathcal{U}h(\lambda,\beta) \\ & + & \dfrac{(i)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \dfrac{e^{-i\lambda\|x\|}}{\|x\|^{(d-1)/2}} \mathcal{U}h(\lambda,-\beta) + q_o(x,\lambda) \end{array} \right. \tag{5.33}$$

avec $x = \|x\|\,\beta$, $\beta \in S^{d-1}$ et il existe une constante positive $M_0 = M_0(h)$ telle que

$$|q_o(x,\lambda)| \leq \frac{M_0}{\|x\|^{(d+1)/2}}, \quad \forall \lambda \in [a,b] \tag{5.34}$$

L'estimation (5.34) est uniforme par rapport à $\beta \in S^{d-1}$ et $\lambda \in [a,b]$.

Dans (5.33), la racine carrée complexe (cas $d = 2$) est définie telle que $\mathrm{Rel}(z^{1/2}) \geq 0$.

En substituant (5.33) dans (5.32), on obtient le théorème suivant

Théorème 5.1.3 *Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{U}h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$. Alors $u(x,t)$ a le comportement suivant lorsque $\|x\| \to +\infty$*

$$u(x,t) = \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^+(\|x\| - t, \beta) + \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^-(\|x\| + t, \beta) + q_1(x,t) \tag{5.35}$$

avec $\beta = x/\|x\|$ et

$$p^{\pm}(r,\beta) = \frac{(\mp i)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \int_a^b e^{\pm i\lambda r} \mathcal{U}h(\lambda, \pm\beta) \mathrm{d}\lambda, \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.36}$$

$$q_1(x,t) = \int_a^b e^{-i\lambda t} q_o(x,\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{5.37}$$

En combinant (5.37) et (5.34), on obtient

$$|q_1(x,t)| \leq \frac{M_1}{\|x\|^{(d+1)/2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in S^{d-1} \tag{5.38}$$

où $M_1 = (b-a)M_0$.

Lorsque $\|x\| \to +\infty$, l'onde $u(x,t)$ se comporte comme la somme de deux profils p^+ et p^- modulés par la décroissance en espace $1/\|x\|^{(d-1)/2}$: p^+ (resp. p^-) s'appelle le profil asymptotique sortant (resp. entrant) correspondant à l'état de référence $h \in \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{U}h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})$. Dans le cas où $d = 1$, il n'y a pas de décroissance en $\|x\|$ et l'onde se comporte comme une somme de deux ondes planes de directions opposées. Si $d = 2$ ou 3, $\frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^+(\|x\| - t, \beta)$ (resp. $\frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^-(\|x\| + t, \beta)$) n'est pas une onde (sphérique) à cause de la dépendance en β.

Une façon de comprendre la signification des profils asymptotiques est : Considérons un observateur placé dans un repère mobile $x(t) = \beta|t|$ pour $\beta \in S^{d-1}$ donné (il se rapproche de l'origine si $t < 0$ et s'en éloigne si $t > 0$). Il observe la forme de l'onde le long de sa trajectoire repérée par une abscisse relative r : l'observateur est en $r = 0$ et celui-ci tourne le dos à l'origine lorsque son regard est dirigé vers $r \to +\infty$. Ainsi, dans sa phase entrante ($t << 0$), l'observateur voit le profil d'onde $p^-(r,\beta)$ et dans sa phase sortante ($t >> 0$), le profil $p^+(r,\beta)$.

En utilisant (5.36), on prouve que

$$p^{\pm}(-r,-\beta) = (\mp i)^{d-1} p^{\mp}(r,\beta), \ \forall r \in \mathbb{R}, \ \forall \beta \in S^{d-1} \tag{5.39}$$

La relation (5.39) nous dit que ce qui entre dans la direction β ressort dans la direction opposée $-\beta$ (à un déphasage près dépendant seulement de la dimension d'espace). Le changement de signe sur r traduit simplement le changement de sens de l'observateur lors du passage de β à $-\beta$. Ainsi, cette relation exprime le fait que le milieu de propagation est non dissipatif et homogène (une inhomogénéité provoque un couplage entre les différentes directions).

Grâce à la densité de l'espace $\{h;\ \mathcal{U}h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})\}$ dans $\mathcal{H}$, la définition de $p^\pm$ peut être étendue à $h \in \mathcal{H}$ par :

$$p^\pm(r,\beta) = \frac{(\mp i)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} e^{\pm i\lambda r} \mathcal{U}h(\lambda, \pm\beta)\mathrm{d}\lambda, \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.40}$$

En effectuant le changement de variable $\rho = \lambda$ pour p^+ et $\rho = -\lambda$ pour p^-, la relation (5.40) devient

$$p^\pm(r,\beta) = \frac{(\mp i)^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\rho} H(\pm\rho)\mathcal{U}h(|\rho|, \pm\beta)\mathrm{d}\rho, \quad r \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in S^{d-1} \tag{5.41}$$

où H est la fonction de Heavside, ce qui montre que la transformée de Fourier selon la variable r de $p^\pm(r,\beta)$ est :

$$(\mathcal{F}_{(r)} p^\pm)(\rho,\beta) = (\mp i)^{\frac{d-1}{2}} H(\pm\rho)\mathcal{U}h(|\rho|, \pm\beta),\ \rho \in \mathbb{R}. \tag{5.42}$$

D'où, en utilisant le fait que $\mathcal{U}$ est unitaire, on a l'identité :

Corollaire 5.1.1

$$\left\|p^\pm\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \|\mathcal{U}h\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times S^{d-1})} = \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\ \forall h \in \mathcal{H}. \tag{5.43}$$

La relation (5.43) traduit une conservation de l'énergie : elle nous dit que l'énergie totale d'une onde (qui est indépendante du temps) se retrouve asymptotiquement dans la phase entrante ou sortante (aucune énergie n'est dissipée ou piégée entre les deux).

On définit alors l'opérateur $\Pi^\pm$ par

$$\begin{array}{rccc} \Pi^\pm : & \mathcal{H} & \to & L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1}) \\ & h & \to & p^\pm \end{array} \tag{5.44}$$

Théorème 5.1.4 *$\Pi^\pm$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})$. De plus, on a :*

$$L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1}) = \mathrm{Im}\Pi^+ \oplus \mathrm{Im}\Pi^- \tag{5.45}$$

Démonstration. Le fait que $\Pi^\pm$ est une isométrie découle de l'équation (5.43). Comme $p^\pm$ apparait comme une transformée de Fourier inverse d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}_\pm)$ (voir les

expressions (5.41) et (5.42)) et que $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_-)$ alors l'identité (5.45) est vérifiée.

□

Chacun des deux profils p^+ et p^- contient toutes les informations sur l'autre profil et la connaissance de l'un des deux permet de déterminer entièrement l'onde.

Nous allons étudier maintenant l'effet du retournement temporel sur les profils asymptotiques. D'après (5.16) et (5.35), on a

(5.46)

$$\forall h \in \mathcal{U}^*(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})),\ u_R(x,t) = \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} \left\{ \overline{p^-(\|x\| - t, \beta)} + \overline{p^+(\|x\| + t, \beta)} + O(\frac{1}{\|x\|}) \right\}$$

ce qui signifie que

$$\forall h \in \mathcal{U}^*(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})),\ \Pi^{\mp}\overline{h} = \overline{\Pi^{\pm} h} \tag{5.47}$$

ou bien[2]

$$\Pi^{\mp} = \overline{\Pi^{\pm}}$$

$\overline{\Pi^{\pm}}$ peut être définie également sur l'espace $\mathcal{H}$ par la densité de l'espace $\mathcal{U}^*(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1}))$ dans $\mathcal{H}$. La relation (5.47) peut être obtenue directement à partir de l'expression explicite (5.40) de $\Pi^{\pm}$.

Ainsi, du point de vue des profils asymptotiques, retourner le temps équivaut à renverser les rôles entrant et sortant et conjuguer.

Nous allons étudier dans le paragraphe suivant le comportement asymptotique de l'onde $u(x,t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

5.1.6 Comportement asymptotique de $u(x,t)$ lorsque $t \to \pm\infty$

En faisant le changement de variable $r = \|x\| \pm t$ puis en utilisant l'identité (5.43), on montre le lemme suivant

Lemme 5.1.3 *Pour tout $h \in \mathcal{H}$*

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^{\pm}(\|x\| \mp t, \beta) \|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}} \tag{5.48}$$

$$\lim_{t \to \mp\infty} \| \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^{\pm}(\|x\| \mp t, \beta) \|_{\mathcal{H}} = 0 \tag{5.49}$$

[2]Si A est un opérateur défini sur un espace de Hilbert complexe E alors $\overline{A}$ est l'opérateur défini sur E par :

$$\forall\ v \in E,\ \overline{A}\overline{v} = \overline{Av}.$$

De plus, on a les propriètés suivantes : $\overline{(A)^{-1}} = \left(\overline{A}\right)^{-1}$, $\overline{(A)^*} = \left(\overline{A}\right)^*$

En utilisant l'expression (5.35) de $u(x,t)$ et le lemme précédent, C. H. Wilcox a montré le théorème suivant :

Théorème 5.1.5 ([88]) *Pour tout $h \in \mathcal{H}$*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(.,t) - \frac{1}{\|x\|^{(d-1)/2}} p^{\pm}(\|x\| \mp t, \beta)\|_{\mathcal{H}} = 0 \tag{5.50}$$

En d'autres termes, l'onde $u(x,t)$ se comporte asymptotiquement, lorsque $t \to +\infty$ (resp. $t \to -\infty$) comme un profil asymptotique sortant (resp. entrant) modulé par la décroissance en espace $1/\|x\|^{(d-1)/2}$. Dans le cas où $d = 1$, l'onde se comporte lorsque $t \to +\infty$ (resp. $t \to -\infty$) comme une onde plane se propageant vers les $x > 0$ (resp. $x < 0$).

Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation des ondes dans l'espace perturbé tel que les obstacles sont supposés à support compact, puis nous introduisons les opérateurs d'ondes qui permettent de comparer cette étude à celle dans l'espace libre. La section qui suit est une partie de l'Habilitation à diriger les recherches de C. Hazard [42] où il a bien exploré la théorie de diffusion due à Lax et Phillips [55].

5.2 Propagation d'ondes dans l'espace perturbé (en présence d'obstacles)

Considérons un milieu homogène contenant des obstacles rigides et bornés $\mathcal{O}$. La propagation d'ondes dans le domaine extérieur aux obstacles $\Omega = \mathbb{R}^d \backslash \overline{\mathcal{O}}$ peut être décrite par le système suivant :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{dans } \Omega,\ t \in \mathbb{R}, \tag{5.51}$$

$$\tilde{\varphi}(.,0) = \tilde{f} \text{ et } \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(.,0) = \tilde{g} \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\mathcal{O} \tag{5.53}$$

On note par $\tilde{\mathbb{A}}$, l'opérateur Laplacien associé à une condition de Neumann sur Γ.

Théorème 5.2.1 *$\tilde{\mathbb{A}}$ est un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(\Omega)$ de domaine :*

$$\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}}) = \{\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega);\ \Delta\tilde{\varphi} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \tag{5.54}$$

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que $\tilde{\mathbb{A}}$ est donné par

$$(\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\varphi},\tilde{\psi})_{\tilde{\mathcal{H}}} = \tilde{a}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = \int_\Omega \nabla\tilde{\varphi}.\nabla\tilde{\psi},\ \forall\tilde{\varphi}\in \mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}}),\ \forall\tilde{\psi}\in\tilde{\mathcal{V}} = H^1(\Omega) \tag{5.55}$$

$$\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}}) = \{\tilde{\varphi}\in\tilde{\mathcal{V}};\ \exists K_{\tilde{\varphi}}>0,\ \forall\tilde{\psi}\in\tilde{\mathcal{V}},\ |\tilde{a}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})|\le K_{\tilde{\varphi}}\left\|\tilde{\psi}\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}}\} \tag{5.56}$$

En suivant la même démarche que celle de la démonstration du théorème 5.1.1, on montre que l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$ associé à la forme $\tilde{a}$ est auto-adjoint positif et vérifie $\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\varphi} = -\Delta\tilde{\varphi},\ \forall\tilde{\varphi}\in\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}})$. La définition (5.55) de $\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\varphi}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\int_\Omega(-\Delta\tilde{\varphi})\tilde{\psi} = \int_\Omega\nabla\tilde{\varphi}.\nabla\tilde{\psi},\ \forall\tilde{\psi}\in\tilde{\mathcal{V}}$$

ce qui signifie exactement que $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} = 0$ sur Γ d'après la formule de Green. On conclut alors que $\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}})$ est défini par (5.54).

□

Les équations (5.7), (5.8) et (5.9) restent valables si on travaille avec l'état à *valeurs complexes* en changeant respectivement φ, $\mathbb{A}$, u, f, g et h par $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mathbb{A}}$, $\tilde{u}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$.
Le théorème 5.1.2 reste également valable : Pour $\tilde{h}\in\tilde{\mathcal{H}}$, il existe une unique solution $\tilde{u}(t) = e^{-it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}\tilde{h}\ \in\tilde{\mathcal{H}}$. On définit également l'énergie associée à l'onde $\tilde{u}(t)$ par $\frac{1}{2}\|\tilde{u}(t)\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}$. Elle se conserve au cours du temps (c'est une constante égale à $\frac{1}{2}\left\|\tilde{h}\right\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}$). Par ailleurs, nous avons la décroissance locale de l'énergie :

Proposition 5.2.1 *Si Ω est régulier, alors*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{K\cap\Omega}|\tilde{u}(x,t)|^2\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{pour tout compact } K\subset\mathbb{R}^d \tag{5.57}$$

Ainsi, l'onde non entretenue $\tilde{u}(x,t)$ se propage à l'infini et n'est plus perceptible localement (en particulier, au voisinage de $\overline{\mathcal{O}}$) lorsqu'on attend assez longtemps.

5.2.1 Opérateurs d'ondes et opérateur de diffusion

Le but de ce paragraphe est de comparer la propagation d'ondes "sans" et "avec" obstacles, ce qui revient à comparer les deux problèmes : libre et perturbé.

Opérateurs d'ondes

Considérons deux ondes qui se propagent respectivement dans le milieu libre (soit $u(t)$) et dans le milieu perturbé (soit $\tilde{u}(t)$). On se propose de comparer ces deux ondes lorsque

$t \to \pm\infty$.

On construit l'opérateur de restriction $J : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ en posant :

$$Ju = u_{/\Omega}$$

et on évalue la quantité :

$$\|\tilde{u}(t) - Ju(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \left\| e^{-it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}\tilde{h} - Je^{-it\mathbb{A}^{1/2}}h \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \left\| \tilde{h} - e^{+it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}Je^{-it\mathbb{A}^{1/2}}h \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \tag{5.58}$$

$u(t)$ et $\tilde{u}(t)$ correspondent à une *même* onde *incidente* (ou entrante) si cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to -\infty$. De même, elles correspondent à une *même* onde *sortante* si cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

On définit alors les opérateurs d'ondes entrant $\mathcal{W}^-$ et sortant $\mathcal{W}^+$

$$\mathcal{W}^{\pm}h = \lim_{t\to\pm\infty} e^{+it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}Je^{-it\mathbb{A}^{1/2}}h \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}$$

L'intérêt de ces opérateurs d'ondes est de ramener la comparaison des ondes $u(t)$ et $\tilde{u}(t)$ à celle de leurs états initiaux.

Théorème 5.2.2 ([55, 88, 42]) *Les opérateurs d'ondes $\mathcal{W}^{\pm}$ existent de $\mathcal{H}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ et sont unitaires.*

Les grandes lignes de la preuve

i) La démonstration de ce théorème est très délicate. L'idée fondamentale est de trouver d'abord une base de fonctions propres généralisées $\tilde{w}_{\lambda,\alpha}$ pour le problème perturbé. On construit $\tilde{w}_{\lambda,\alpha}$ comme étant la superposition de l'onde incidente $w_{\lambda,\alpha}$ et de la perturbation correspondante due à la présence des obstacles.

$$\tilde{w}_{\lambda,\alpha} = Jw_{\lambda,\alpha} + \tilde{p}_{\lambda,\alpha} \tag{5.59}$$

avec

$$(\tilde{\mathbb{A}} - \lambda^2)\tilde{p}_{\lambda,\alpha} = -\mathbb{D}w_{\lambda,\alpha} \tag{5.60}$$

où $\mathbb{D}$ est défini par $\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{A}}J - J\mathbb{A}$ qui se réduit, en appliquant la formule de Green, à

$$\langle \mathbb{D}u, \tilde{v}\rangle = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\overline{\tilde{v}}\mathrm{d}\sigma, \ \forall u \in \mathrm{D}(\mathbb{A}), \ \forall v \in \mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}})$$

$\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre $\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}})$ et $\mathrm{D}(\tilde{\mathbb{A}})'$.

Par le principe d'absorption limite[3], on peut construire deux fonctions $\tilde{p}^{\pm}_{\lambda,\alpha}$ solutions de (5.60) : l'une est sortante ($\tilde{p}^{+}_{\lambda,\alpha}$) et l'autre est entrante ($\tilde{p}^{-}_{\lambda,\alpha}$), ce qui permet d'avoir deux bases "orthonormales" du problème perturbé : entrante ($\tilde{w}^{-}_{\lambda,\alpha} = Jw_{\lambda,\alpha} + \tilde{p}^{-}_{\lambda,\alpha}$) et sortante ($\tilde{w}^{+}_{\lambda,\alpha} = Jw_{\lambda,\alpha} + \tilde{p}^{+}_{\lambda,\alpha}$). Le fait que $\tilde{w}^{\pm}_{\lambda,\alpha}$ sont deux bases orthonormales découle du caractère unitaire des transformations spectrales sortante ($\tilde{\mathcal{U}}^{+}$) et entrante ($\tilde{\mathcal{U}}^{-}$) de $\tilde{\mathcal{H}}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$ [42]. $\tilde{\mathcal{U}}^{+}$ (resp. $\tilde{\mathcal{U}}^{-}$) s'interprète comme un opérateur de décomposition sur la famille $\tilde{w}^{+}_{\lambda,\alpha}$ (resp. $\tilde{w}^{-}_{\lambda,\alpha}$).

ii) L'existence et le caractère unitaire des opérateurs d'ondes sont obtenus en montrant que

$$\mathcal{W}^{\pm} = (\tilde{\mathcal{U}}^{\mp})^{*}\mathcal{U} \tag{5.61}$$

En effet, la solution du problème perturbé $\tilde{u}(t) = e^{-it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}\tilde{h}$ peut s'écrire

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \int_{S^{d-1}} \tilde{\mathcal{U}}^{\pm}\tilde{h}(\lambda,\alpha)\tilde{w}^{\pm}_{\lambda,\alpha}(x)\mathrm{d}\sigma(\alpha)\mathrm{d}\lambda.$$

soit, d'après la définition de $\tilde{w}^{\pm}_{\lambda,\alpha}$

$$\tilde{u}(x,t) = Ju^{\pm}(x,t) + \tilde{p}^{\pm}(x,t)$$

où on a noté

$$u^{\pm}(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \int_{S^{d-1}} \tilde{\mathcal{U}}^{\pm}\tilde{h}(\lambda,\alpha)w^{\pm}_{\lambda,\alpha}(x)\mathrm{d}\sigma(\alpha)\mathrm{d}\lambda$$
$$\tilde{p}^{\pm}(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \int_{S^{d-1}} \tilde{\mathcal{U}}^{\pm}\tilde{h}(\lambda,\alpha)\tilde{p}^{\pm}_{\lambda,\alpha}(x)\mathrm{d}\sigma(\alpha)\mathrm{d}\lambda.$$

Intuitivement, $\tilde{p}^{+}(t)$ est un signal qui part d'un état de repos, lorsque $t \to -\infty$, puisqu'il s'agit d'une superposition d'ondes périodiques sortantes ; de même, $\tilde{p}^{-}(t)$ étant associé à des ondes entrantes va tendre vers cet état de repos lorsque $t \to +\infty$. En se basant sur la décroissance locale de l'énergie (proposition 5.2.1) et sur le comportement asymptotique de $\tilde{p}^{\pm}_{\lambda,\alpha}$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ (proposition 5.3.1 où $\tilde{p}_{\lambda,\alpha}$ est exactement $\tilde{p}^{+}_{\lambda,\alpha}$), on montre que $\lim_{t\to\mp\infty} \|\tilde{p}^{\pm}(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0$.

Constatons par ailleurs que $u^{\pm}(t)$ n'est autre que la solution du problème libre (5.8)-(5.9) pour la donnée initiale $h^{\pm}$ telle que $\mathcal{U}h^{\pm} = \tilde{\mathcal{U}}^{\pm}\tilde{h}$, soit $h^{\pm} = \mathcal{U}^{*}\tilde{\mathcal{U}}^{\pm}\tilde{h}$. Or, on a

$$\lim_{t\to\mp\infty} \left\| e^{-it\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}}\tilde{h} - Je^{-it\mathbb{A}^{1/2}}h \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0$$

alors on déduit l'expression (5.61) et donc l'existence et le caractère unitaire des opérateurs d'ondes.

[3]Les $\tilde{p}_{\lambda,\alpha}$ sont des ondes harmoniques en temps d'énergie infinie, elles sont construites comme la limite, lorsque $\epsilon \to 0$, de fonctions d'énergie finie solutions de l'équation

$$(\tilde{\mathbb{A}} - (\lambda^2 \pm i\epsilon))\tilde{p}_{\lambda,\alpha} = -\mathbb{D}w_{\lambda,\alpha}$$

.

Opérateur et matrice de diffusion

Définition 5.2.1 *L'opérateur de diffusion $\mathcal{S}$ est l'opérateur unitaire défini par : (voir figure 5.1)*

$$\mathcal{S} = (\mathcal{W}^+)^{-1}\mathcal{W}^- : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{5.62}$$

En d'autres termes, lorsqu'on se contente d'observer le comportement asymptotique en temps ($t \to \pm\infty$) des ondes, l'influence de l'obstacle peut être ramenée à l'effet d'une “boîte noire” (qui agit seulement sur les états du milieu libre) : une onde incidente défini par son état de référence $h \in \mathcal{H}$ est transformée en l'onde sortante $\mathcal{S}h \in \mathcal{H}$ après avoir interagi avec l'obstacle.

Remarque 5.2.1 *Le caractère unitaire de $\mathcal{S}$ signifie simplement que toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde sortante.*

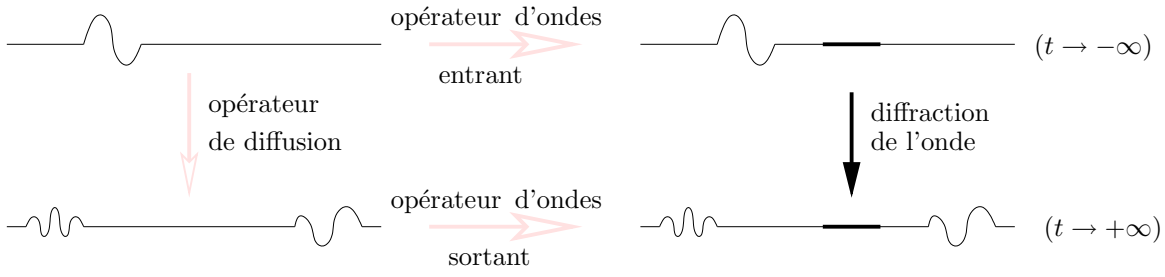


FIG. 5.1 – Opérateurs d'ondes et opérateur de diffusion.

Définition 5.2.2 *La matrice de diffusion $\hat{\mathcal{S}}$ est l'opérateur unitaire sur $\hat{\mathcal{H}}$ défini par :*

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{U}\mathcal{S}\mathcal{U}^* \tag{5.63}$$

Il s'agit de la transformation qu'il faut faire subir aux coordonnées spectrales d'une onde incidente h (relativement aux $w_{\lambda,\alpha}$) pour obtenir celles de l'onde sortante associée $\mathcal{S}h$.

Théorème 5.2.3 ([55, 77])

$$e^{-i\lambda t}\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}e^{-i\lambda t}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.64}$$

Cela signifie que $\mathcal{S}$ ne dépend pas du choix de l'origine du temps. En effet, les coordonnées spectrales d'une onde $u(t) = exp(-i\mathbb{A}^{1/2})h$ dans le milieu libre sont simplement données à chaque instant par $\mathcal{U}u(t) = exp(-i\lambda t)\mathcal{U}h$. En d'autres termes, la translation dans le temps $u(0) \to u(t)$ correspond exactement à l'opération de multiplication par $exp(-i\lambda t)$ dans l'espace spectral $\hat{\mathcal{H}}$.

Définition 5.2.3 *On dit que l'opérateur unitaire $\hat{\mathcal{S}}$ défini sur $\hat{\mathcal{H}}$ est décomposable s'il existe une famille $\hat{\mathcal{S}}_\lambda$, $\lambda \in]0,+\infty[$, d'opérateurs unitaires sur $L^2(S^{d-1})$ telle que :*

$$(\hat{\mathcal{S}}\hat{u},\hat{v})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_0^{+\infty} (\hat{\mathcal{S}}_\lambda \hat{u}(\lambda,.),\hat{v}(\lambda,.))_{L^2(S^{d-1})} \mathrm{d}\lambda,\ \forall\ \hat{u},\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}} \tag{5.65}$$

Et d'après [77], tout opérateur unitaire qui commute avec l'opération de multiplication par $exp(-i\lambda t)$ pour tout t (soit (5.64)) est décomposable.

Remarque 5.2.2 *Le caractère décomposable de $\hat{\mathcal{S}}$ signifie simplement que la matrice de diffusion ne fait pas intervenir de couplage entre les fréquences. Autrement dit, le passage des coordonnées spectrales d'une onde incidente à celles de l'onde sortante associée se fait fréquence par fréquence, de façon découplée les unes des autres : il n'y a pas d'échange d'énergie entre elles. En effet, (5.65) revient à dire que $(\hat{\mathcal{S}}\hat{u})(\lambda,.) = \hat{\mathcal{S}}_\lambda \hat{u}(\lambda,.)$ pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$*

5.3 Processus de retournement temporel

5.3.1 Modèle "Champ lointain" en transitoire

On suppose que le miroir à retournement temporel entoure complètement les obstacles, qu'il est commandé à l'émission par une excitation qui représente "le profil asymptotique entrant de l'onde incidente" et qu'il mesure le profil asymptotique sortant du champ diffracté sans le perturber.

Description du processus

A partir d'une excitation $p_I^- \in \mathrm{Im}\Pi^-$ et en l'absence d'obstacles, on observe le champ incident $u_I(x,t) \in \mathcal{H},\ x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}$ défini par son état de référence $h_I = (\Pi^-)^{-1} p_I^-$.

L'onde qui se propage dans le milieu perturbé (en présence des obstacles) est le champ total $\tilde{u}_T(x,t) \in \tilde{\mathcal{H}},\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}$ qui a le même comportement que u_I lorsque $t \to -\infty$. Ainsi, $\tilde{u}_T$ est défini par son état de référence $\tilde{h} = \mathcal{W}^- h_I$.

A cette onde totale $\tilde{u}_T$ définie dans le milieu perturbé, correspond une onde u_T définie dans le milieu libre qui a le même comportement que $\tilde{u}_T$ lorsque $t \to +\infty$; soit $u_T = e^{-it\mathbb{A}^{1/2}} h_T$ avec $h_T = (\mathcal{W}^+)^{-1}\tilde{h} = (\mathcal{W}^+)^{-1}\mathcal{W}^- h_I = \mathcal{S} h_I$.

La perturbation due à la présence des obstacles est le champ diffracté $\tilde{u}_D = \tilde{u}_T - u_I \in \tilde{\mathcal{H}}$. A cette onde $\tilde{u}_D$ vivant dans le milieu perturbé, correspond alors l'onde $u_D = u_T - u_I$ dont l'état de référence est $h_D = h_T - h_I = (\mathcal{S} - I)h_I$ dans le milieu libre.

Le MRT mesure le profil asymptotique sortant du champ diffracté $p_D^+ = \Pi^+ h_D$.

On note par D, l'opérateur qui décrit les étapes suivantes : émission-diffraction-mesure. D est défini de $\mathrm{Im}\Pi^-$ dans $\mathrm{Im}\Pi^+$ par :

$$p_D^+ = Dp_I^- = \Pi^+(\mathcal{S} - I)(\Pi^-)^{-1} p_I^- \tag{5.66}$$

Etape de retournement temporel

L'étape de retournement temporel se réduit à une conjugaison du profil asymptotique sortant de l'onde u_D, soit $\Pi^+ h_D$.

Opérateur de retournement temporel

L'opérateur de retournement temporel T est défini à partir de deux itérations successives du processus de RT.

$$Tp_I^- = \overline{D\overline{Dp_I^-}} \quad \text{ou} \quad T = \overline{D}D \tag{5.67}$$

Enfin, en utilisant (5.67) et (5.47) et (5.66), on peut écrire T sous la forme

$$T = \Pi^- \overline{(\mathcal{S} - I)}(\mathcal{S} - I)(\Pi^-)^{-1} \tag{5.68}$$

Dans la suite, nous allons établir le lien entre le processus étudié précédemment et le processus de retournement temporel pour le modèle “champ lointain” en régime harmonique ([44]).

5.3.2 Modèle “Champ lointain” en harmonique

Avant de décrire le processus de retournement temporel de type “champ lointain” en régime harmonique, nous commençons par introduire le champ lointain d'une onde diffractée par une onde plane puis celui par une superposition d'ondes planes.

Diffraction d'une onde plane

On note par $\tilde{p}_{\lambda,\alpha}$ le champ diffracté par les obstacles lorsque l'onde incidente est une onde plane égale à $w_{\lambda,\alpha}$ définie par (5.26). $\tilde{p}_{\lambda,\alpha}$ vérifie alors le problème suivant :

$$(\Delta + \lambda^2)\tilde{p}_{\lambda,\alpha} = 0 \ \text{ dans } \Omega \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_{\lambda,\alpha}}{\partial n} = -\frac{\partial w_{\lambda,\alpha}}{\partial n} \ \text{ sur } \Gamma \tag{5.70}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\|x\|=R} \left|\frac{\partial \tilde{p}_{\lambda,\alpha}}{\partial n} - i\lambda \tilde{p}_{\lambda,\alpha}\right|^2 \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{5.71}$$

Proposition 5.3.1 ([42]) *Lorsque $\|x\| \to +\infty$, $\tilde{p}_{\lambda,\alpha}$ possède le développement asymptotique*

$$\tilde{p}_{\lambda,\alpha}(x) = \eta_\lambda \frac{e^{i\lambda\|x\|}}{\|x\|^{(d-1)/2}} A_\lambda(\alpha,\beta) + O\left(\frac{1}{\|x\|^{(d+1)/2}}\right). \tag{5.72}$$

où $\beta = \dfrac{x}{\|x\|}$, $\eta_\lambda = \begin{cases} \dfrac{1-i}{2\lambda\sqrt{\pi}} & d=2 \\ \dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}} & d=3 \end{cases}$ *, et A_λ est défini par*

$$A_\lambda(\alpha,\beta) = \frac{i\pi}{\lambda^{d-2}} \int_\Gamma \left(-\frac{\partial w_{\lambda,\alpha}}{\partial n} w_{\lambda,-\beta} - \tilde{p}_{\lambda,\alpha} \frac{\partial w_{\lambda,-\beta}}{\partial n} \right) \mathrm{d}\sigma, \ \forall\ \alpha,\beta \in S^{d-1}. \tag{5.73}$$

A_λ s'appelle le "champ lointain" ou l'amplitude de diffusion associée aux obstacles $\mathcal{O}$. L'estimation $O\left(\dfrac{1}{\|x\|^{(d+1)/2}}\right)$ est uniforme en β. A_λ est une fonction analytique sur $S^{d-1} \times S^{d-1}$ et vérifie la formule de réciprocité

$$A_\lambda(\alpha,\beta) = A_\lambda(-\beta,-\alpha) \tag{5.74}$$

Diffraction d'une onde de Herglotz

On suppose que l'onde incidente est une superposition d'ondes planes qu'on appelle "onde de Herglotz" de fréquence λ.

$$u_{\lambda,I}(x) = \int_{S^{d-1}} \theta(\alpha) w_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha). \tag{5.75}$$

Par linéarité, le champ diffracté généré par les obstacles lorsque l'onde incidente est égale à $u_{\lambda,I}$, est donné par

$$\tilde{u}_{\lambda,D}(x) = \int_{S^{d-1}} \theta(\alpha) \tilde{p}_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha). \tag{5.76}$$

Le comportement asymptotique de $\tilde{u}_{\lambda,D}$ est

$$\tilde{u}_{\lambda,D}(x) = \eta_\lambda \frac{e^{i\lambda\|x\|}}{\|x\|^{(d-1)/2}} \left(\int_{S^{d-1}} A_\lambda(\alpha,\beta)\theta(\alpha)\mathrm{d}\sigma(\alpha) \right) + O\left(\frac{1}{\|x\|^{(d+1)/2}}\right). \tag{5.77}$$

On définit l'opérateur $\hat{D}_\lambda$ de $L^2(S^{d-1})$ dans $L^2(S^{d-1})$ par

$$\hat{D}_\lambda \theta(\beta) = \int_{S^{d-1}} A_\lambda(\alpha,\beta)\theta(\alpha)\mathrm{d}\sigma(\alpha) \tag{5.78}$$

L'opérateur intégral $\hat{D}_\lambda$ s'appelle opérateur "champ lointain".

Proposition 5.3.2 ([25]) *L'opérateur "champ lointain" $\hat{D}_\lambda : L^2(S^{d-1}) \to L^2(S^{d-1})$ défini par l'équation (5.78) est un opérateur compact et normal*[4]*. Son adjoint $(\hat{D}_\lambda)^*$ est défini de $L^2(S^{d-1})$ dans $L^2(S^{d-1})$ par*

$$(\hat{D}_\lambda)^*\theta = \overline{R\hat{D}_\lambda\overline{R\theta}}, \text{ ou bien, } \hat{D}_\lambda^* = R\overline{\hat{D}_\lambda}R \tag{5.79}$$

où R est l'opérateur de symétrie défini de $L^2(S^{d-1})$ dans $L^2(S^{d-1})$ par

$$R\theta(\alpha) = \theta(-\alpha),\ \forall\alpha \in S^{d-1}$$

Nous avons vu ci-dessus (cf Déf 5.2.3 et Rq 5.2.2) que $\hat{\mathcal{S}}$ est décomposable sur la famille $\hat{\mathcal{S}}_\lambda$. La proposition suivante montre que les opérateurs $\hat{\mathcal{S}}_\lambda$ sont reliés aux opérateurs "champ lointain" $\hat{D}_\lambda$.

Proposition 5.3.3 ([77]) *Pour tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\hat{\mathcal{S}}_\lambda = I + \hat{D}_\lambda \tag{5.80}$$

Pour établir cette identité, on utilise le fait que $\hat{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{U}}^-(\tilde{\mathcal{U}}^+)^*$ (d'après (5.63),(5.62) et (5.61)) et le comportement asymptotique des fonctions propres généralisées $\tilde{w}^\pm_{\lambda,\alpha}$ (proposition 5.3.1).

Processus et opérateur de retournement temporel

Pendant l'étape d'émission, le MRT illumine les obstacles avec l'onde incidente $u_{\lambda,I}$. On néglige l'influence du MRT sur l'onde diffractée par les obstacles lors de la mesure. De plus, on suppose que le MRT mesure le champ lointain du champ diffracté. Après l'avoir mesuré, le MRT conjugue le champ lointain associé au champ diffracté et le réémet. La nouvelle émission est caractérisée par l'onde de Herglotz associée à la densité $\zeta \in L^2(S^{d-1})$ définie par

$$\zeta = \overline{R\hat{D}_\lambda\theta}.$$

Dans cette relation, la présence de l'opérateur de symétrie R est due au fait que le champ lointain mesuré dans une direction donnée $\beta \in S^{d-1}$ est utilisé pour définir la nouvelle onde incidente dans la direction $-\beta$. L'opérateur de retournement temporel en régime harmonique (λ fixé) $\hat{T}_\lambda$ est obtenu en itérant deux fois ce processus (émission-diffraction-mesure-conjugaison).

$$\hat{T}_\lambda\theta = \overline{R\hat{D}_\lambda\overline{R\hat{D}_\lambda\theta}} \text{ ,ou bien, } \hat{T}_\lambda = R\overline{\hat{D}_\lambda}R\hat{D}_\lambda.$$

On déduit finalement, en utilisant la proposition 5.3.2 que

[4] c'est-à-dire $(\hat{D}_\lambda)^*\hat{D}_\lambda = \hat{D}_\lambda(\hat{D}_\lambda)^*$

Proposition 5.3.4 ([44]) *L'opérateur de retournement temporel harmonique* $\hat{T}_\lambda : L^2(S^{d-1}) \to L^2(S^{d-1})$ *est donné par*

$$\hat{T}_\lambda = (\hat{D}_\lambda)^* \hat{D}_\lambda = \hat{D}_\lambda (\hat{D}_\lambda)^*. \tag{5.81}$$

c'est un opérateur autoadjoint positif et compact.

5.3.3 Lien entre le régime transitoire et le régime harmonique

Le lien entre le processus de retournement temporel de type "champ lointain" en régime transitoire et celui en régime harmonique se traduit par le théorème suivant :

Théorème 5.3.1

$$T = \Pi^- \mathcal{U}^* \hat{T} \mathcal{U} (\Pi^-)^{-1} \tag{5.82}$$

avec $\hat{T}$*, l'opérateur défini de* $\hat{\mathcal{H}}$ *dans* $\hat{\mathcal{H}}$ *par*

$$\hat{T} = R\overline{(\hat{\mathcal{S}} - I)} R (\hat{\mathcal{S}} - I) \tag{5.83}$$

est auto-adjoint positif sur $\hat{\mathcal{H}}$ *et est décomposable sur la famille* $\{\hat{T}_\lambda\}_{\lambda \in]0,+\infty[}$ *définie par (5.81).*

Démonstration. En exprimant l'opérateur de diffusion $\mathcal{S}$ en fonction de la matrice de diffusion $\hat{\mathcal{S}}$ (soit $\mathcal{S} = \mathcal{U}^* \hat{\mathcal{S}} \mathcal{U}$ d'après (5.63)) et en utilisant (5.68), l'opérateur T de retournement temporel en régime transitoire s'écrit

$$T = \Pi^- \overline{\mathcal{U}^*} \overline{(\hat{\mathcal{S}} - I)} \overline{\mathcal{U}} \mathcal{U}^* (\hat{\mathcal{S}} - I) \mathcal{U} (\Pi^-)^{-1} \tag{5.84}$$

De plus, en utilisant la définition des opérateurs $\mathcal{U}$, $\overline{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}^*$ et R, on montre que $\overline{\mathcal{U}} = R\mathcal{U}$ et que $\overline{\mathcal{U}^*} = \mathcal{U}^* R$. Finalement, par substitution des expressions de $\overline{\mathcal{U}}$ et de $\overline{\mathcal{U}^*}$ dans l'identité (5.84), on trouve le lien entre T et $\hat{T}$, soit (5.82).

L'opérateur $\hat{T}$ agit sur les composantes spectrales de l'onde incidente à l'itération i pour obtenir celles de l'onde incidente à l'itération $i+2$. Nous allons démontrer que $\hat{T}$ est décomposable sur la famille $\hat{T}_\lambda$ c'est à dire que l'action du processus de retournement temporel s'effectue fréquence par fréquence. En effet, comme $\hat{\mathcal{S}}$ est décomposable sur la famille $\{\hat{\mathcal{S}}_\lambda\}_{\lambda \in]0,+\infty[}$ alors, d'après la proposition 5.3.3, $\hat{D} = \hat{\mathcal{S}} - I$ est décomposable sur la famille $\{\hat{D}_\lambda\}_{\lambda \in]0,+\infty[}$. De plus, en utilisant (5.79), on montre que $R\overline{\hat{D}}R$ est décomposable sur la famille $\{R\overline{\hat{D}_\lambda}R\}_{\lambda \in]0,+\infty[}$ et par conséquent, l'adjoint de $\hat{D}$ est donné par

$$(\hat{D})^* = R\overline{\hat{D}}R \tag{5.85}$$

On déduit d'après (5.83) et (5.85) que

$$\hat{T} = (\hat{D})^* \hat{D} \tag{5.86}$$

d'où le caractère autoadjoint et positif de $\hat{T}$.
Finalement, en utilisant l'identité (5.86), le fait que $\hat{D}$ est décomposable sur la famille $\{\hat{D}_\lambda\}_{\lambda\in]0,+\infty[}$ et (5.81), on montre que $\hat{T}$ est décomposable sur la famille $\{\hat{T}_\lambda\}_{\lambda\in]0,+\infty[}$.

□

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'opérateur de retournement temporel en régime transitoire est décomposable sur la famille d'opérateurs de retournement temporel en régime harmonique dans le cadre du modèle "champ lointain". Or, les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel en régime harmonique fournissent une réponse à la question de focalisation spatiale. Il semble donc naturel de chercher à construire des signaux transitoires à partir de ceux-ci, par des superpositions continues de signaux harmoniques dans une bande de fréquence donnée. Il s'agit donc de trouver une superposition qui conduise à une concentration temporelle de l'énergie acoustique au voisinage de l'obstacle visé.

Comme en régime harmonique, les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel fournissent les maxima de l'énergie diffractée vers le MRT, il est naturel de transposer cette question d'optimisation de l'énergie diffractée au régime transitoire ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Optimisation de l'énergie diffractée

6.1 Motivation

Pour détecter un diffuseur, on est amené à construire des champs acoustiques permettant de l'éclairer de façon "optimale". Mais cette optimalité peut prendre divers sens, qui ne mènent pas aux mêmes champs optimaux. En imagerie, on recherche le meilleur contraste (cf. [13]). Dans ce chapitre, c'est plutôt le critère du plus fort éclairage qui nous préoccupe, plus précisément celui qui maximise l'énergie diffractée par le diffuseur en direction du MRT.

Le problème du plus fort éclairage a été étudié pour les problèmes à fréquence fixée dans la tomographie électrique [48] et dans la diffraction acoustique [59]. Dans le domaine temporel, le problème d'onde optimale en régime transitoire et en dimension 1 d'espace a été étudié dans [22] où une onde harmonique en temps a été trouvé pour être optimale. Dans le cas de dimension 3 de l'espace , M. Cheney et al. [21] ont considéré la géométrie du demi-espace : un plan divise l'espace entier en une région accessible et une autre inaccessible contenant des hétérogénéités à support compact. La mesure s'effectue au niveau du plan. Le meilleur champ incident trouvé est une onde harmonique en temps.

Nous considérons dans ce chapitre le modèle "champ lointain" en régime transitoire étudié dans le chapitre précédent. Nous rappelons que le milieu étudié est un milieu homogène non dissipatif contenant des obstacles diffractants à support compact et que l'émission et la mesure s'effectuent à l'infini. Nous allons adapter l'algorithme du processus de retournement temporel introduit par M. Cheney et al. dans [21] au modèle "champ lointain".

6.2 Formulation du problème

Pour la détection d'un diffuseur, la meilleure onde incidente définie par son profil entrant p_I^- est obtenue par la résolution du problème

$$\sup_{p^- \in \mathrm{Im}\Pi^-} \frac{||Dp^-||_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}}{||p^-||_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}} = \sup_{\hat{h}\in\hat{\mathcal{H}}} \frac{||\hat{D}\hat{h}||_{\hat{\mathcal{H}}}}{||\hat{h}||_{\hat{\mathcal{H}}}} = \sup_{\hat{h}\in\hat{\mathcal{H}}} \sqrt{\frac{\langle \hat{T}\hat{h}, \hat{h}\rangle}{\langle \hat{h}, \hat{h}\rangle}}, \tag{6.1}$$

où $\hat{h} = \mathcal{U}h,\ h = (\Pi^-)^{-1}p^-$.

Pour qu'un diffuseur soit "détectable", la valeur optimale de la quantité (6.1) doit être plus grande que la précision de mesure des instruments utilisés.

6.3 Algorithme pour produire le champ optimal

Si $\hat{T}$ était un opérateur A compact sur $\hat{\mathcal{H}}$ alors on pourrait utiliser la méthode de puissance [49] qui permet de construire le vecteur propre $\hat{h}_\infty$ de A correspondant à la plus grande valeur propre. En particulier, la méthode de puissance construit $\hat{h}_\infty$ comme étant la limite de la suite $A^n\hat{h}_0/c_n$, où c_n est un facteur de normalisation égal à $||A^n\hat{h}_0||$ et $\hat{h}_0$ est l'itérée initiale.

Dans notre cas, $\hat{T}$ n'est pas compact, il est à spectre continu ([32]) donc on s'attend à converger vers une fonction propre généralisée qui n'appartient pas à $\hat{\mathcal{H}}$. Donc le choix de normalisation habituelle par $||\hat{T}^n\hat{h}_0||$ doit être modifié puisqu'il ne permet pas de sortir de l'espace $\hat{\mathcal{H}}$ et donc ne permet pas de converger vers la "bonne limite" (cf. Remarque 6.3.1).

Par ailleurs, $\hat{T}$ est décomposable sur une famille d'opérateurs compacts d'après le théorème 5.3.1, nous allons voir que si on suppose que la donnée initiale $\hat{h}_0$ ($\hat{h}_0 = \mathcal{U}h_0,\ h_0 = (\Pi^-)^{-1}p_0^-$) est à support compact B qui est un intervalle de $]0, +\infty[$ représentant la bande de fréquences d'étude et on introduit une bonne normalisation, on autorise $\hat{T}^n\hat{h}_0$ à converger vers une fonction propre généralisée de $\hat{T}$.

6.3.1 Algorithme

$$\left|\begin{array}{l} \text{Choisir un profil entrant } p_0^- \in \mathrm{Im}\Pi^-, \\ p_{n+1}^- = \dfrac{Tp_n^-}{c_n},\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Une itération de cet algorithme constitue, à la normalisation c_n près, une application de l'opérateur T et ceci représente une étape pour l'algorithme de la méthode de puissance pour

construire le champ optimal. Notons que la seule modification par rapport à la méthode de puissance habituelle réside dans la normalisation.

Pour assurer la convergence de cet algorithme, on introduit la normalisation

$$c_n = (Tp_n^-, \Pi^-\Psi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}$$

où Ψ est choisie dans un espace X telle que $\mathcal{U}\Psi$ soit continue en λ. D'où la définition de X

$$X = \left\{\Phi \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \mathcal{U}\Phi = \hat{\Phi} \in Y\right\} = \mathcal{U}^{-1}(Y)$$
$$Y = C^0(\mathbb{R}_+, L^2(S^{d-1}))$$

Notons bien que $Y \subset \hat{\mathcal{H}}$ et $X \subset \mathcal{H}$.

6.3.2 Convergence de l'algorithme

L'itéré p_n^- $(n \in \mathbb{N})$ s'écrit :

$$p_n^- = \frac{T^n p_0^-}{(T^n p_0^-, \Pi^-\Psi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}} \tag{6.2}$$

En choisissant une fonction test Φ dans X et en utilisant l'équation précédente, on a

$$(p_n^-, \Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{(T^n p_0^-, \Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}}{(T^n p_0^-, \Pi^-\Psi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}} \tag{6.3}$$

ou bien, en exprimant T en fonction de $\hat{T}$ (soit (5.82)) et le fait que $\hat{T}$ est décomposable (théorème 5.3.1)

$$(p_n^-, \Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\hat{T}_\lambda^n \hat{h}_0(\lambda,.), \hat{\Phi}(\lambda,.))_{L^2(S^{d-1})} \mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\hat{T}_\lambda^n \hat{h}_0(\lambda,.), \hat{\Psi}(\lambda,.))_{L^2(S^{d-1})} \mathrm{d}\lambda} \tag{6.4}$$

où $\hat{\Phi} = \mathcal{U}\Phi$ et $\hat{\Psi} = \mathcal{U}\Psi$.

$\hat{T}_\lambda$ est analytique en λ car l'amplitude de diffusion A_λ l'est ([67]). Comme $\hat{T}_\lambda$ est autoadjoint compact et positif, il possède la décomposition spectrale $\hat{T}_\lambda = \sum_{l\in\mathbb{N}} \mu_l(\lambda) P_l(\lambda)$ où $\mu_0 \geq \mu_1 \geq ... > 0$. Les μ_l sont les valeurs propres de $\hat{T}_\lambda$ et les P_l sont les projections orthogonales sur les espaces propres correspondants. μ_l et P_l sont analytiques par morceaux en λ ([53]).

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $\hat{h}_0$ est à support compact $B = [B_{min} B_{max}] \subset]0, +\infty[$. Nous allons commencer par traiter le cas particulier où l'on suppose que la plus grande valeur propre $\mu_0(\lambda)$ atteint son maximum sur B en un unique point λ_* et qu'elle ne change pas de mutiplicité en ce point. Ensuite, nous traitons le cas général.

Cas particulier : $\mu_0(\lambda)$ ne change pas de multiplicité en λ_*

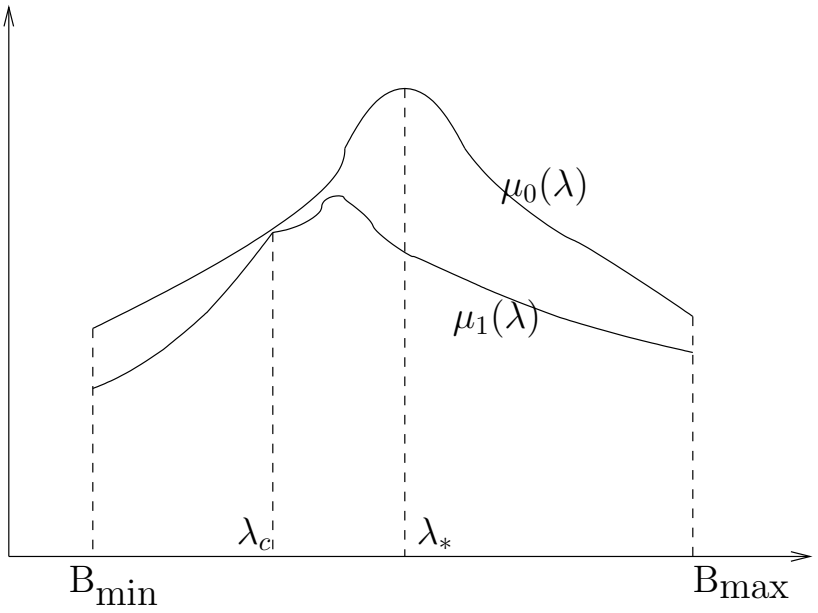


FIG. 6.1 – Cas particulier

On suppose que $\mu_0(\lambda)$ atteint son maximum sur B en un unique point λ_* et qu'elle ne change pas de mutiplicité en ce point (voir la figure 6.1 où μ_0 change de multiplicité en λ_c mais pas en λ_*).

On note $M = \mu_0(\lambda_*)$. Le développement de Taylor de μ_0 au voisinage de λ_* s'écrit :

$$\mu_0(\lambda) = M(1 - b(\lambda - \lambda_*)^p) + o((\lambda - \lambda_*)^p) \tag{6.5}$$

avec $b > 0$ et p est un entier naturel pair. Par définition, l'ordre de la plus grande valeur propre μ_0 au point λ_* est égal à p.

Dans la suite, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.3.1 *[21] On suppose que $b > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et que $0 < h < \inf(1, 1/b)$ alors*

$$I(n,p) = \int_0^h (1 - b\lambda^p)^n \mathrm{d}\lambda \sim \frac{C(p)}{(bn)^{1/p}},\ n \to +\infty$$

où $C(p)$ est une constante non nulle indépendante de n. La convergence vers 0 de $I(n,p)$ est plus lente pour p grand et b petit.

Théorème 6.3.1 *On suppose que $\hat{h}_0$ est à support compact B et que $(P_0(\lambda_*)\hat{h}_0(\lambda_*,.),\hat{\Psi}(\lambda_*,.))_{L^2(S^{d-1})}$ est non nulle. Alors p_n^- possède le comportement suivant lorsque $n \to +\infty$*

$$\forall \Phi \in X,\ \lim_{n\to+\infty}(p_n^-,\Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{(P_0(\lambda_*)\hat{h}_0(\lambda_*,.),\hat{\Phi}(\lambda_*,.))_{L^2(S^{d-1})}}{(P_0(\lambda_*)\hat{h}_0(\lambda_*,.),\hat{\Psi}(\lambda_*,.))_{L^2(S^{d-1})}}$$

Démonstration. En utilisant la décomposition spectrale de $\hat{T}_\lambda$ et l'équation (6.4), on obtient

$$(p_n^-,\Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_l \mu_l^n(\lambda)(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.),\hat{\Phi}(\lambda,.))_{L^2(S^{d-1})}\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_l \mu_l^n(\lambda)(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.),\hat{\Psi}(\lambda,.))_{L^2(S^{d-1})}\mathrm{d}\lambda} \tag{6.6}$$

En posant pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0,+\infty[$, $f_l(\lambda) = \Big(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.),\hat{\Phi}(\lambda,.)\Big)_{L^2(S^{d-1})}$ et $g_l(\lambda) = \Big(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.),\hat{\Psi}(\lambda,.)\Big)_{L^2(S^{d-1})}$, l'équation (6.6) devient (puisque le support de $\hat{h}_0$ est dans B)

$$(p_n^-,\Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{\displaystyle\sum_l \int_B \mu_l^n(\lambda) f_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\sum_l \int_B \mu_l^n(\lambda) g_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda} \tag{6.7}$$

On pose

$$r_l(\lambda) = \mu_l(\lambda)/M.$$

On a donc $|r_0(\lambda)| \leq 1,\ \forall \lambda \in B$ et $|r_l(\lambda)| < 1,\ \forall \lambda \in B$ et $\forall l \in \mathbb{N}^*$. L'équation (6.7) s'écrit alors

$$(p_n^-,\Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{\displaystyle\sum_l \int_B r_l^n(\lambda) f_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\sum_l \int_B r_l^n(\lambda) g_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda} \tag{6.8}$$

On note par

$$I_{l,n} = \int_B r_l^n(\lambda) f_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \left(\int_B \zeta_{l,n}(\lambda) f_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\int_B r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{6.9}$$

où on a posé $\zeta_{l,n} = r_l^n / \int_B r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$.

Pour étudier le comportement de $(p_n^-,\Pi^-\Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})}$, nous commençons par étudier le comportement de $\sum_{l\in\mathbb{N}} I_{l,n}$. Pour cela, nous décomposons cette somme en deux termes, le premier est $I_{0,n}$ et le second est le reste de la somme.

Pour voir le comportement de $I_{0,n}$ lorsque $n \to +\infty$, nous observons d'abord que

$$\int_B \zeta_{0,n}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1. \tag{6.10}$$

D'autre part, d'après (6.5), au voisinage de λ_*, $r_0^n(\lambda)$ se comporte comme $(1 - b(\lambda - \lambda_*)^p)^n$ donc, en utilisant le lemme 6.3.1, on montre que :

$$\forall \lambda \neq \lambda_*,\ \zeta_{0,n}(\lambda) \to 0,\ n \to +\infty. \tag{6.11}$$

En utilisant (6.10), on écrit $I_{0,n}$ sous la forme :

$$I_{0,n} = \left(f_0(\lambda_*) + \int_B \zeta_{0,n}(\lambda)\,(f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*))\,\mathrm{d}\lambda \right) \int_B r_0^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{6.12}$$

Nous allons montrer que le terme intégral à l'intérieur des parenthèses dans le membre de droite de l'équation (6.12) tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Soit $\epsilon > 0$, on choisit B_ϵ un intervalle assez petit inclus dans B et contenant λ_* et tel que $\forall \lambda \in B_\epsilon,\ |f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*)| < \epsilon/2$.

L'intégrale dans (6.12) peut être décomposée en deux :

$$Q_n = \int_{B_\epsilon} \zeta_{0,n}(\lambda)(f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*))\mathrm{d}\lambda \tag{6.13}$$

et

$$R_n = \int_{B\backslash B_\epsilon} \zeta_{0,n}(\lambda)(f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*))\mathrm{d}\lambda \tag{6.14}$$

Donc, en utilisant l'identité (6.10), on montre que $Q_n < \epsilon/2$.

Comme le maximum de $\mu_0(\lambda)$ n'est atteint qu'en λ_* alors il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in B\backslash B_\epsilon,\ r_0(\lambda) < 1 - \delta_\epsilon$. En utilisant le lemme 6.3.1, nous montrons qu'il existe $N_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_\epsilon,\ \forall \lambda \in B\backslash B_\epsilon,\ \zeta_{0,n}(\lambda) \leq C\frac{(1-\delta_\epsilon)^n}{n^{1/p}} \leq C$$

Ainsi, la suite de fonctions $\zeta_{0,n}(\lambda)(f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*))$ est majorée pour tout $n \geq N_\epsilon$ par la fonction $f_0(\lambda) - f_0(\lambda_*)$ qui est intégrable sur l'intervalle $B\backslash B_\epsilon$, or cette suite converge vers 0 pour tout $\lambda \in B\backslash B_\epsilon$ (voir (6.11)) donc d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il existe $N'_\epsilon > N_\epsilon$ tel que $\forall n \geq N'_\epsilon,\ R_n < \epsilon/2$. D'où :

$$I_{0,n} \sim f_0(\lambda_*) \int_B r_0^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ n \to +\infty.$$

Nous nous intéressons maintenant au comportement de $\sum_{l\in\mathbb{N}^*} I_{l,n}$. Pour $l \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_l(\lambda) < M$ et donc $r_l(\lambda) < 1\ \forall \lambda \in B$. Alors, la suite de fonctions $r_l^n(\lambda) f_l(\lambda)$ converge vers zéro pour

tout $\lambda \in B$ lorsque n tend vers l'infini. De plus, elle est majorée par la fonction $f_l(\lambda)$ qui est intégrable sur l'intervalle B donc d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $I_{l,n}$ converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Pour estimer le reste de la somme sur $l \in \mathbb{N}^*$, on choisit un entier l_0 assez grand tel que pour tout $l > l_0$ et tout $\lambda \in B$, on ait $r_l(\lambda) < 1/2$. Le choix d'un tel l_0 est possible car $r_l(\lambda) \to 0$ lorsque $l \to +\infty$:

$$l_0 = \inf_{l \in \mathbb{N}} \left\{ l, \sup_{\lambda \in B} r_l(\lambda) < 1/2 \right\}.$$

On a

$$\left| \sum_{l>l_0} I_{l,n} \right| = \left| \sum_{l>l_0} \int_B r_l^n(\lambda) \left(P_l(\lambda) \hat{h}_0(\lambda, .), \hat{\Phi}(\lambda, .) \right)_{L^2(S^{d-1})} \mathrm{d}\lambda \right| \tag{6.15}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left| \sum_{l>l_0} I_{l,n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \int_B ||\hat{h}_0(\lambda, .)||_{L^2(S^{d-1})} ||\hat{\Phi}(\lambda, .)||_{L^2(S^{d-1})} \mathrm{d}\lambda \tag{6.16}$$

et donc converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

En appliquant les mêmes arguments au dénominateur de l'équation (6.8), on trouve finalement que

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})} \sim \frac{(P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \hat{\Phi}(\lambda_*, .))_{L^2(S^{d-1})}}{(P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \hat{\Psi}(\lambda_*, .))_{L^2(S^{d-1})}}, \ n \to +\infty \tag{6.17}$$

□

Le théorème 6.3.1 nous dit que l'algorithme de puissance renormalisé converge (en un sens faible) vers le profil d'une onde harmonique de fréquence λ_*. Pour le voir, il suffit de considérer l'onde associée au profil p_n^-, soit $u_n = e^{-it\mathbb{A}^{1/2}} \left((\Pi^-)^{-1} p_n^- \right)$.

Corollaire 6.3.1 *À t fixé, l'onde émise à l'itération n, $u_n(., t) = e^{-it\mathbb{A}^{1/2}} \left((\Pi^-)^{-1} p_n^- \right)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers l'onde de Herglotz de fréquence λ_**

$$\frac{1}{C_\Psi} \left(\int_{S^{d-1}} P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, \alpha) w_{\lambda_*, \alpha} \mathrm{d}\sigma(\alpha) \right) e^{-i\lambda_* t}$$

lorsque $n \to +\infty$, où $C_\Psi = (P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \hat{\Psi}(\lambda_*, .))_{L^2(S^{d-1})}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\hat{h}_n = \mathcal{U}(\Pi^-)^{-1} p_n^-$ converge vers $\frac{1}{C_\Psi} P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .) \delta_{\lambda_*}$ dans Y', le dual de Y. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\Phi} \in Y, \ \langle \langle \delta_{\lambda_*} \otimes P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \hat{\Phi} \rangle \rangle &= \langle P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \langle \delta_{\lambda_*}, \hat{\Phi} \rangle \rangle \\ &= (P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), \hat{\Phi}(\lambda_*, .))_{L^2(S^{d-1})} \end{aligned} \tag{6.18}$$

où $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ désigne le produit de dualité entre Y et Y'. En utilisant le fait que $(\hat{h}_n, \hat{\Phi})_{L^2(\mathbb{R}_+ \times S^{d-1})} = (p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})}$ et le comportement asymptotique de p_n^- (soit (6.17)), on trouve alors le comportement asymptotique de $\hat{h}_n$.

D'après l'équation (5.30), on a :

$$u_n(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \int_{S^{d-1}} \hat{h}_n(\lambda, \alpha) w_{\lambda,\alpha}(x) \mathrm{d}\sigma(\alpha) \mathrm{d}\lambda. \tag{6.19}$$

Pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset X$ (et donc $\hat{\Phi} \in Y$), on a :

$$\left\langle \left(u_n - \frac{1}{C_\Psi} \left(\int_{S^{d-1}} P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, \alpha) w_{\lambda_*,\alpha} \mathrm{d}\sigma(\alpha) \right) e^{-i\lambda_* t} \right), \Phi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} =$$
$$\frac{1}{C_\Psi} \left(\int_{S^{d-1}} \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \hat{h}_n(\lambda, \alpha) \overline{\hat{\Phi}(\lambda, \alpha)} \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\sigma(\alpha) - \int_{S^{d-1}} P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, \alpha) e^{-i\lambda_* t} \overline{\hat{\Phi}(\lambda_*, \alpha)} \mathrm{d}\sigma(\alpha) \right)$$

Le premier terme du second membre de l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\langle\langle \hat{h}_n, e^{+i\lambda t} \hat{\Phi} \rangle\rangle$$

qui converge vers $\langle\langle P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .) \delta_{\lambda_*}, e^{+i\lambda t} \hat{\Phi} \rangle\rangle$ qui est égal à $\left(P_0(\lambda_*) \hat{h}_0(\lambda_*, .), e^{+i\lambda_* t} \hat{\Phi}(\lambda_*, .) \right)_{L^2(S^{d-1})}$ et on en déduit finalement le corollaire.

□

L'algorithme converge alors vers une onde harmonique en temps ayant la fréquence qui maximise la plus grande valeur propre μ_0 dans la bande de fréquence B.

Remarque 6.3.1 *Si on prend dans l'algorithme la normalisation habituelle de la méthode de puissance $c_n = ||T^n p_n^-||_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})}$ alors l'équation (6.8) devient*

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})} = \frac{\sum_l \int_B r_l^n(\lambda) f_l(\lambda) \mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\sum_l \int_B r_l^{2n}(\lambda) g_l(\lambda) \mathrm{d}\lambda}} \tag{6.20}$$

où $g_l(\lambda) = \left(P_l(\lambda) \hat{h}_0(\lambda, .), P_l(\lambda) \hat{h}_0(\lambda, .) \right)_{L^2(S^{d-1})}$, la définition de f_l et r_l est inchangée.
En suivant la même démarche, on montre que

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})} \sim \frac{f_0(\lambda_*) \int_B r_0^n(\lambda) \mathrm{d}\lambda}{\sqrt{g_0(\lambda_*) \int_B r_0^{2n}(\lambda) \mathrm{d}\lambda}}, \; n \to +\infty \tag{6.21}$$

et donc, d'après le lemme 6.3.1, p_n^-, $\hat{h}_n$ et u_n convergent faiblement vers 0 respectivement dans $L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})$, $\hat{\mathcal{H}}$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ ce qui ne correspond pas à la "bonne limite".

Cas général : $\mu_0(\lambda)$ peut atteindre son maximum en plusieurs points et changer de multiplicité en ces points

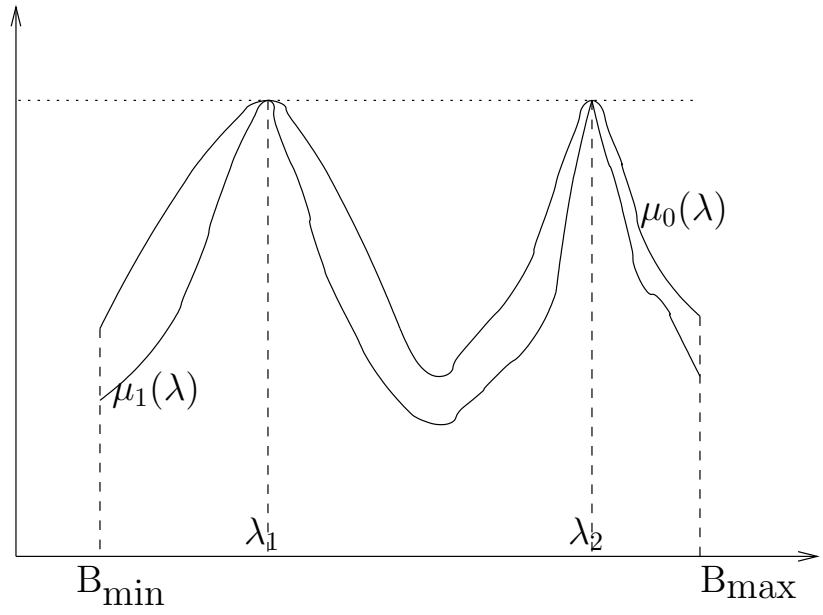


FIG. 6.2 – Cas général

On suppose que, pour λ fixé dans B, il est possible qu'un nombre fini de valeurs propres, noté $N_0(\lambda)$, soit égal à $\mu_0(\lambda)$. Ainsi, si μ_0 atteint son maximum aux points $\lambda_j,\ j = 1, ...J$ alors le développement Taylor de $\mu_l,\ 0 \leq l \leq N_0(\lambda_j) - 1$ au voisinage de λ_j s'écrit : $\mu_l(\lambda) = M(1 - b_{l,j}(\lambda - \lambda_j)^{p_{l,j}}) + o((\lambda - \lambda_j)^{p_{l,j}}))$ où $b_{l,j} > 0$ et $p_{l,j}$ est un entier naturel pair. Par définition, l'ordre de la valeur propre maximale M au point λ_j est égal à $\sup_{0 \leq l \leq N_0(\lambda_j)-1} p_{l,j}$.

Dans la figure 6.2, μ_0 atteint son maximum en deux valeurs λ_1 et λ_2, de plus elle change de multiplicité en ces deux points ($N_0(\lambda_1) = N_0(\lambda_2) = 2$).

Théorème 6.3.2 *On suppose que $\hat{h}_0$ est à support compact B, que $\mu_0(\lambda)$ n'est pas constante dans la bande B et que $\sum_{l,j} \beta_{l,j}(P_l(\lambda_j)\hat{h}_0(\lambda_j, .), \hat{\Psi}(\lambda_j, .)))_{L^2(S^{d-1})}$ est non nulle ; $\beta_{l,j} = C(p)/b_{l,j}^{1/p}$ et la somme (finie) est prise sur tous les l, j tel que $\mu_l(\lambda_j) = M$ et μ_l a un ordre maximal égal à p au point λ_j, p est défini par $p = \sup_{1 \leq j \leq J} \sup_{0 \leq l \leq N_0(\lambda_j)-1} p_{l,j}$. Alors p_n^- possède le comportement suivant lorsque $n \to +\infty$*

$$\forall \Phi \in X,\ \lim_{n \to +\infty} (p_n^-, \Pi^- \Phi_B)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{d-1})} = \frac{\sum_{l,j} \beta_{l,j}(P_l(\lambda_j)\hat{h}_0(\lambda_j, .), \hat{\Phi}(\lambda_j, .)))_{L^2(S^{d-1})}}{\sum_{l,j} \beta_{l,j}(P_l(\lambda_j)\hat{h}_0(\lambda_j, .), \hat{\Psi}(\lambda_j, .)))_{L^2(S^{d-1})}}$$

DÉMONSTRATION. Les μ_l et les P_l sont des fonctions analytiques par morceaux de λ. En particulier, $\mu_0(\lambda)$ est analytique par morceaux et donc atteint son maximum sur un ensemble discret inclu dans B. Soit J le nombre de fréquences λ_j, $j = 1, ..J$ tel que $\mu_0(\lambda_j) = M$.

On décompose la restriction de la fonction test $\hat{\Phi}$ sur B de la façon suivante : $\hat{\Phi} = \sum_j \hat{\Phi}_j$, où $\hat{\Phi}_j \in C_0^\infty(N_j)$ et $\hat{\Phi}_j = \hat{\Phi}$ dans un voisinage de λ_j, chaque intervalle N_j contient un unique λ_j. On a donc $B = \cup_{j=1,J} N_j$. On effectue la même décomposition pour $\hat{\Psi}$.

En posant $f_{l,j}(\lambda) = \left(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.), \hat{\Phi}_j(\lambda,.)\right)_{L^2(S^{d-1})}$ et $g_{l,j}(\lambda) = \left(P_l(\lambda)\hat{h}_0(\lambda,.), \hat{\Psi}_j(\lambda,.)\right)_{L^2(S^{d-1})}$, l'équation (6.6) devient

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi_B)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} = \frac{\sum_{l,j} \int_{N_j} \mu_l^n(\lambda) f_{l,j}(\lambda) \mathrm{d}\lambda}{\sum_{l,j} \int_{N_j} \mu_l^n(\lambda) g_{l,j}(\lambda) \mathrm{d}\lambda} \tag{6.22}$$

En suivant la démarche faite pour démontrer le théorème 6.3.1, nous montrons le comportement asymptotique de p_n^-.

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} \sim \frac{\sum_{l,j} f_{l,j}(\lambda_j) \int_{N_j} r_l^n(\lambda) \mathrm{d}\lambda}{\sum_{l,j} g_{l,j}(\lambda_j) \int_{N_j} r_l^n(\lambda) \mathrm{d}\lambda},\ n \to +\infty \tag{6.23}$$

La somme est prise sur tous les $l,\ j$ tel que $\mu_l(\lambda_j) = M$. Pour j fixé entre 1 et J, l varie entre 0 et $N_0(\lambda_j) - 1$.

Etudions le comportement des termes $\int_{N_j} r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$. Dans un voisinage de λ_j, on a $r_l(\lambda) = 1 - b_{l,j}(\lambda - \lambda_j)^{p_{l,j}} + o((\lambda - \lambda_j)^{p_{l,j}})$. Le lemme 6.3.1 montre que l'ordre $p_{l,j}$ contrôle la vitesse avec laquelle $\int_{N_j} r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ converge vers 0 avec n : plus $p_{l,j}$ est grand, plus la convergence de $\int_{N_j} r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ vers 0 est lente (elle est de l'ordre de $1/n^{1/p_{l,j}}$).

On divise le numérateur et le dénominateur du quotient figurant dans (6.23) par la plus grande valeur de $\int_{N_j} r_l^n(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ qui correspond aux valeurs propres μ_l ayant un ordre maximal aux points λ_j. Soit p cet ordre maximal $p = \sup_{1\le j\le J} \sup_{0\le l\le N_0(\lambda_j)-1} p_{l,j}$. Ainsi, on trouve :

$$(p_n^-, \Pi^- \Phi)_{L^2(\mathbb{R}\times S^{d-1})} \sim \frac{\sum_{l,j} \beta_{l,j} (P_l(\lambda_j)\hat{h}_0(\lambda_j,.), \hat{\Phi}_j(\lambda_j,.))_{L^2(S^{d-1})}}{\sum_{l,j} \beta_{l,j} (P_l(\lambda_j)\hat{h}_0(\lambda_j,.), \hat{\Psi}_j(\lambda_j,.))_{L^2(S^{d-1})}},\ n \to +\infty \tag{6.24}$$

où $\beta_{l,j} = C(p)/b_{l,j}^{1/p}$ et la somme est prise sur tous les l, j tel que $\mu_l(\lambda_j) = M$ et μ_l a un ordre

maximal au point λ_j égal à p.

□

Nous concluons que l'onde transitoire qui permet de maximiser l'énergie diffractée par les obstacles est une superposition d'ondes harmoniques en temps dont les fréquences sont celles qui maximisent la plus grande valeur propre de l'opérateur de retournement temporel en régime harmonique ce qui constitue une "mauvaise réponse" à la question de concentration dans le temps de l'énergie locale au niveau de l'obstacle.

Conclusion et perspectives

Les propriétés de focalisation sélective des vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel sont connues pour des diffuseurs suffisamment petits et éloignés, autrement dit, la longueur d'onde est grande devant la taille des diffuseurs et petite devant la distance entre eux. Une telle situation correspond au cas de faibles fréquences. Dans ma thèse, nous avons exploré le cas de fréquences moyennes par une approche numérique. Nous considérons donc des obstacles ayant des diamètres de même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Nous avons présenté un modèle de MRT intrusif qui prend en compte les interactions entre les obstacles et le MRT, ainsi le cas où ces derniers sont proches peut être traité. Nous avons prouvé le caractère autoadjoint et compact de l'opérateur de retournement temporel qui agit sur un espace L^2 représentant l'espace des excitations possibles d'énergies finies. Nous avons proposé également un modèle de MRT non pénétrable et intrusif dans lequel les interactions entre les obstacles et le MRT sont prises en compte de façon approchée. Enfin, nous avons présenté des résultats numériques en dimension 2 d'espace. Nous avons montré que les propriétés de focalisation sélective sont également vérifiées pour des fréqences moyennes. De plus, nous avons montré les modulations des valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel en fonction de la fréquence. Ces oscillations sont dues aux interactions entre les obstacles et le MRT, et entre les obstacles eux-mêmes.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au retournement temporel dans un guide d'ondes. L'étude numérique de l'opérateur de retournement temporel a montré que ses valeurs propres sont plus grandes que celles dans le cas de l'espace libre à cause des interfaces du guide qui augmentent l'ouverture du MRT. Nous avons montré que dans le cas d'obstacles petits et suffisamment distants, la focalisation sélective est effective bien que le nombre de valeurs propres significatives ne soit pas égal au nombre d'obstacles. Dans le cas où la taille des obstacles, la distance entre eux, la distance entre les obstacles et les interfaces du guide et la longueur d'ondes sont du même ordre de grandeur, la focalisation n'a pas eu lieu.

La deuxième partie de la thèse est consacrée au régime transitoire. Les signaux émis sont localisés en temps, leur support fréquentiel est alors non borné contrairement au régime harmonique. Nous avons cherché à savoir comment concentrer dans le temps de l'énergie localement au voisinage de l'obstacle visé. La question reste posée. Par ailleurs, nous avons proposé un modèle "champ lointain" en régime transitoire et nous avons établi le lien entre

celui-ci et le modèle “champ lointain” en régime harmonique étudié dans [44].

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la question de l'optimisation de l'énergie diffractée. En régime harmonique, les maxima de cette énergie sont fournis par les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel. En régime transitoire, nous avons montré que les optima sont atteints asymtotiquement (en temps long) par les éléments propres du régime harmonique. Ainsi, optimiser l'énergie diffractée par les obstacles conduit à un étalement dans le temps et non en une focalisation temporelle !

Plusieurs études ont été faites pour la recherche de la localisation d'obstacles petits et distants entre eux [20, 2, 40]. Par ailleurs, dans plusieurs applications telle que le contrôle non destructif, nous avons besoin d'identifier les obstacles d'où l'importance de déterminer leur géométrie. Zhao et al. [92, 46, 47] ont montré, par une étude asymptotique, que pour des obstacles dont la taille est de même ordre de grandeur que la longueur d'onde et lorsque la taille de l'obstacle et l'ouverture du MRT sont petits devant la distance entre le MRT et l'obstacle, les premières valeurs propres de l'opérateur de retournement temporel (les trois premières pour un obstacle surfacique et les quatre premières pour un obstacle volumique) sont bien séparées des autres et les vecteurs propres associés permettent de localiser l'obstacle. Pour déterminer la forme géométrique de l'obstacle, Zhao et al. exploitent cette estimation sur la localisation et la forme géométrique de l'obstacle pour initier la méthode Level-Set permettant la reconstruction exacte de la forme de l'obstacle. Cette combinaison améliore la robustesse de la méthode dans le sens où elle est insensible au bruit et donne des images exactes même pour des obstacles de forme géométrique compliquée.

Plusieurs questions restent ouvertes. Peut-on déterminer la forme géométrique d'un obstacle en champ proche, autrement dit lorsque le MRT n'est pas loin de l'obstacle, et à fréquence fixée ? Peut-on améliorer la reconstruction si on utilise les vecteurs propres pour plusieurs fréquences ?

La méthode DORT a été rarement étudié dans le domaine temporel. Nous citons les travaux de Prada et al. [63, 69] ou bien de Yavus et al. [90, 91] pour des obstacles ponctuels. Des résultats numériques de focalisation spatiale et temporelle ont été présentés. Que se passe-t-il pour des obstacles quelconques. Y-a-t-il un lien entre la qualité de compression temporelle au niveau de l'obstacle et la qualité de la reconstruction de sa forme géométrique ?

Annexe A

Calcul de la fonction de Green du guide

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour trouver une représentation explicite de la fonction de Green du guide. Les différentes représentations obtenues sont bien sûr équivalentes, mais pas en ce qui concerne l'approximation numérique de cette fonction.

La méthode des images consiste à considérer la fonction de Green du guide comme étant une superposition de fonctions de Green de l'espace libre obtenues par un réseau de sources infini de période $2H$ dans la direction x_2 ayant la même abscisse que celui de la fonction de Green du guide. G s'écrit sous cette forme :

$$G((a_1,a_2),(x_1,x_2)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \{G_0((a_1,a_2+2nH),(x_1,x_2)) - G_0((a_1,-a_2+2nH),(x_1,x_2))\}$$

On peut vérifier par symétrie que cette série vérifie la condition de Dirichlet sur le bord du guide. L'inconvénient majeur de cette représentation est que la convergence de la série est très lente.

La méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles par transformation de Fourier consiste à appliquer la transformation de Fourier dans la direction non bornée x_1 ce qui permet de remplacer les dérivées par rapport à x_1 par des multiplications par la variable de Fourier η. On obtient alors une équation différentielle ordinaire portant sur la transformée de Fourier de la fonction de Green, que l'on peut résoudre explicitement. La fonction de Green elle-même est alors obtenue par transformée de Fourier inverse, qui est effectuée numériquement. Cette représentation a peu d'intérêt numérique dès que la transformée de Fourier de la fonction de Green présente des singularités (dans le cas où $k > \pi/H$) ce qui correspond au critère d'existence de modes propagatifs. Ce résultat étant prévisible puisque s'il existe des modes propagatifs, la fonction de Green n'est pas décroissante à l'infini et sa transformée de Fourier n'est donc pas définie comme une fonction sur $\mathbb{R}$.

La méthode de décomposition modale de la fonction de Green consiste à décomposer G sur les modes propres du guide ce qui permet d'expliciter la transformation de Fourier inverse dans la méthode précédente sous la forme d'une série qui sera tronquée pour l'évaluer numériquement. Cette méthode est présentée par plusieurs auteurs (cf par exemple [24]). Nous avons toutefois jugé utile de rappeler ces calculs.

A.1 Décomposition modale de la fonction de Green

Nous considérons la source $A = (a_1, a_2)$ et nous projetons la fonction $x_2 \to G((a_1, a_2), (x_1, x_2))$ sur la base $\{w_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ définie en (3.5).

$$G((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} G_n((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} C_n(x_1) w_n(x_2) \tag{A.1}$$

D'après l'équation (3.19), on a pour tout $x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(a_1, a_2)\}$:

$$\Delta G((a_1, a_2), (x_1, x_2)) + k^2 G((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = \delta_{a_1}(x_1)\delta_{a_2}(x_2) \tag{A.2}$$

En substituant l'expression (A.1) de G dans l'équation (A.2), on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(C_n''(x_1) + (k^2 - \lambda_n) C_n(x_1)\right) w_n(x_2) = \delta_{a_1}(x_1)\delta_{a_2}(x_2) \tag{A.3}$$

En effectuant le produit de dualité des deux membres de cette égalité avec la fonction $w_m(x_2),\ m \in \mathbb{N}^*$, on obtient l'équation différentiellle partielle satisfaite par C_m

$$C_m''(x_1) + (k^2 - \lambda_m) C_m(x_1) = w_m(a_2)\delta_{a_1}(x_1) \tag{A.4}$$

qui a pour solution

$$C_m(x_1) = \frac{1}{2i\mu_m} w_m(a_2) e^{i\mu_m |x_1 - a_1|} \tag{A.5}$$

On en conclut alors l'expression (3.20) :

$$G((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i\mu_n} \sin\frac{n\pi x_2}{H} \sin\frac{n\pi a_2}{H}\ e^{i\mu_n |x_1 - a_1|} \tag{A.6}$$

A.2 Extraction de la singularité et amélioration de la convergence

La série (3.20) ne converge pas uniformément sur Ω, la valeur absolue de son terme général ne pouvant pas être majorée indépendamment des variables x_1 et x_2 par un terme décroissant

plus vite que $\frac{1}{n}$. En revanche, quand n tend vers $+\infty$, μ_n est équivalent à $i\frac{n\pi}{H}$, le comportement de la série (3.20) est donc le même que celui de la série de terme général :

$$S_n = -\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x_2}{H}\sin\frac{n\pi a_2}{H}e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}$$

Or la somme S de cette série est donnée explicitement (cf. [24]) par

$$S((a_1,a_2),(x_1,x_2)) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{B((a_1,a_2),(x_1,x_2))}{A((a_1,a_2),(x_1,x_2))}$$

où on a noté

$$\frac{1}{A((a_1,a_2),(x_1,x_2))} = \cosh^2\frac{\pi(x_1-a_1)}{2H} - \cos^2\frac{\pi(x_2-a_2)}{2H}$$
$$\frac{1}{B((a_1,a_2),(x_1,x_2))} = \cosh^2\frac{\pi(x_1-a_1)}{2H} - \cos^2\frac{\pi(x_2+a_2)}{2H}$$

Les termes généraux de G et de S ayant le même comportement asymptotique, on peut penser alors que $(G-S)$ est une série rapidement convergente, et qu'il sera donc avantageux de calculer G sous la forme $G = S + (G-S)$.

Montrons que $(G-S)$ est une série uniformément convergente. Le terme général en est :

$$U_n = \left(\frac{e^{i\mu_n|x_1-a_1|}}{iH\mu_n} + \frac{e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x_2}{H}\sin\frac{n\pi a_2}{H}$$

Comme $\mu_n = i\frac{n\pi}{H}\sqrt{1-\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2}$ alors

$$|U_n| \le \frac{e^{i\mu_n|x_1-a_1|} - \sqrt{1-\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2}e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}}{n\pi\sqrt{1-\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2}} \sim \frac{e^{i\mu_n|x_1-a_1|} - \sqrt{1-\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2}e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}}{n\pi} = U'_n$$

En utilisant le développement limité $\mu_n = i\frac{n\pi}{H}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2 + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} U''_n &= n\pi U'_n = e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}\left(e^{\frac{k^2H}{2n\pi}|x_1-a_1|+\circ\left(\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{1-\left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2}\right) \\ &= e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}\left(1+\frac{k^2H}{2n\pi}|x_1-a_1| + \circ\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \left(\frac{kH}{n\pi}\right)^2 + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$U'_n \sim \frac{k^2H}{2\pi^2}\frac{e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}}{n^2}|x_1-a_1| = U'''_n$$

En étudiant la fonction $x \geq 0 \mapsto e^{-Cx}x$ avec $C \geq 0$, on montre que :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad e^{-\frac{n\pi}{H}|x_1-a_1|}|x_1 - a_1| \leq \frac{H}{n\pi e}$$

On en déduit que :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in]0, H[, \quad 0 \leq U_n''' \leq \frac{k^2 H}{2e\pi^3 n^3}$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n'''$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\times]0, H[$ et il en est de même pour $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$.

A.2.1 Calcul des dérivées partielles de la fonction de Green

La mise en œuvre de la méthode de couplage entre éléments finis et représentation intégrale nécessite le calcul des dérivées premières et secondes de G. Nous donnons ici les expressions des dérivées partielles de S puis de celles de $G - S$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a_1} &= -\frac{1}{8H}\sinh(\frac{\pi(x1-a1)}{H})(A-B) \\
\frac{\partial S}{\partial a_2} &= -\frac{1}{8H}(A\sin(\frac{\pi(x2-a2)}{H}) + B\sin(\frac{\pi(x2+a2)}{H})) \\
\frac{\partial S}{\partial x_1} &= \frac{1}{8H}\sinh(\frac{\pi(x1-a1)}{H})(A-B) \\
\frac{\partial S}{\partial x_2} &= \frac{1}{8H}(A\sin(\frac{\pi(x2-a2)}{H}) - B\sin(\frac{\pi(x2+a2)}{H})) \\
\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial x_1} &= \frac{\pi}{8H^2}(A-B)(\sinh^2(\frac{\pi(x1-a1)}{H})\frac{A+B}{2} - \cosh(\frac{\pi(x1-a1)}{H})) \\
\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial x_2} &= \frac{\pi}{16H^2}\sinh(\frac{\pi(x1-a1)}{H})(A^2\sin(\frac{\pi(x2-a2)}{H}) - B^2\sin(\frac{\pi(x2+a2)}{H})) \\
\frac{\partial^2 S}{\partial a_2 \partial x_1} &= \frac{\pi}{16H^2}\sinh(\frac{\pi(x1-a1)}{H})(B^2\sin(\frac{\pi(x2+a2)}{H}) + A^2\sin(\frac{\pi(x2-a2)}{H})) \\
\frac{\partial^2 S}{\partial a_2 \partial x_2} &= \frac{\pi}{8H^2}(\frac{A^2}{2}\sin^2(\frac{\pi(x2-a2)}{H}) - A\cos(\frac{\pi(x2-a2)}{H}) - B\cos(\frac{\pi(x2+a2)}{H}) + \frac{B^2}{2}\sin^2(\frac{\pi(x2+a2)}{H}))
\end{aligned}$$

Nous savons que $G-S$ est une série de terme $U_n = G_n - S_n$. Les dérivées partielles de $G-S$ sont alors données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(G-S)}{\partial a_1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{sgn}(x_1-a_1)\left(-i\mu_n G_n((a_1,a_2),(x_1,x_2)) - \frac{n\pi}{H} S_n((a_1,a_2),(x_1,x_2))\right)\\
\frac{\partial(G-S)}{\partial a_2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n\pi}{H}(G_n-S_n)((a_1,a_2+\frac{H}{2n}),(x_1,x_2))\\
\frac{\partial(G-S)}{\partial x_1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{sgn}(x_1-a_1)\left(i\mu_n G_n((a_1,a_2),(x_1,x_2)) + \frac{n\pi}{H} S_n((a_1,a_2),(x_1,x_2))\right)\\
\frac{\partial(G-S)}{\partial x_2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n\pi}{H}(G_n-S_n)((a_1,a_2),(x_1,x_2+\frac{H}{2n}))\\
\frac{\partial^2(G-S)}{\partial a_1\partial x_1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_n^2 G_n((a_1,a_2),(x_1,x_2)) + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 S_n((a_1,a_2),(x_1,x_2))\\
\frac{\partial^2(G-S)}{\partial a_1\partial x_2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n\pi}{H}\mathrm{sgn}(x_1-a_1)\left(-i\mu_n G_n((a_1,a_2),(x_1,x_2+\frac{H}{2n})) - \frac{n\pi}{H} G_n((a_1,a_2),(x_1,x_2+\frac{H}{2n}))\right)\\
\frac{\partial^2(G-S)}{\partial a_2\partial x_1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n\pi}{H}\mathrm{sgn}(x_1-a_1)\left(i\mu_n \frac{n\pi}{H} G_n((a_1,a_2+\frac{H}{2n}),(x_1,x_2)) + \frac{n\pi}{H} G_n((a_1,a_2+\frac{H}{2n}),(x_1,x_2))\right)\\
\frac{\partial^2(G-S)}{\partial a_2\partial x_2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \left(G_n((a_1,a_2+\frac{H}{2n}),(x_1,x_2+\frac{H}{2n})) - S_n((a_1,a_2+\frac{H}{2n}),(x_1,x_2+\frac{H}{2n}))\right)
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les séries des dérivées partielles d'ordre un de $G-S$ sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}\times]0,H[$. Par contre, celles des dérivées partielles d'ordre deux ne le sont pas lorsque $x_1 = a_1$.

Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I", *Comm. Pure Appl. Math., vol. 12, 1959, pp. 623-727.*

[2] D. G. Albert, L. Liu and M. L. Moran, "Time reversal processing for source location in an urban environment", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 118, no. 2, 2005, pp. 616-619.*

[3] J. P. Aubin, "Analyse fonctionnelle appliquée (Tome 2)", *Presses Universitaires de France, 1987.*

[4] G. Bal and L. Ryzhik, "Time reversal and refocusing in random media", *SIAM J. Appl. Math, vol. 63, no. 5, 2004, pp. 1475-1498.*

[5] M. Balabane, "Boundary decomposition for Helmholtz and Maxwell equations 1 : disjoint sub-scatterers", *Asymptotic Analysis, vol. 38, no. 1, 2004, pp. 1-10.*

[6] C. Ben Amar, N. Gmati, C. Hazard and K. Ramdani, "Numerical simulation of acoustic time reversal mirrors", *SIAM J. Appl. Math, vol. 67, no. 3, 2007, pp. 777-791.*

[7] M. Balabane and V. Tirel, "Décomposition de domaine pour un calcul hybride de l'équation de Helmholtz", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I, 324, 1997, pp. 281-286.*

[8] C. Bardos and M. Fink, "Mathematical fondations of the time reversal mirror", *Asymptotic Analysis vol. 29, 2002, pp 157-182.*

[9] J. G. Berryman, L. Borcea, G. C. Papanicolaou and C. Tsogka, "Statistically stable ultrasonic imaging in random media", *J. Acoustic Soc. Am., vol. 112, 2002, pp. 1509-1522.*

[10] P. Blomgren, G. Papanicolaou, and H.Zhao, "Super resolution in time-reversal acoustics", *J. Acoustic Soc. Am., vol. 111, no. 1, 2002, pp. 230-248.*

[11] A.S. Bonnet, "Phénomènes de propagation d'ondes", *cours DEA - ENIT, Avril 2001.*

[12] L. Borcea, G. Papanicolaou and C. Tsogka, "Theory and applications of time reversal and interferometric imaging", *Inverse Problems, vol. 19, 2003, pp. 139-164.*

[13] L. Borcea, G. Papanicolaou and C. Tsogka, "Optimal waveform design for array imaging", *submitted for publication, 2006.*

[14] L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka and J. Berryman, "Imaging and time reversal in random media", *Inverse Problems, vol. 18, no. 5, 2002, pp. 1247-1279.*

[15] M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", *Academic Press, New York, 1970.*

[16] S. C. Brenner and L. R. Scott, "The mathematical theory of finite element methods", *Springer-Verlag, New York, 2002.*

[17] H. Brezis, "Analyse fonctionnelle, Théorie et application", *Masson, 1992.*

[18] N. Burq, "Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel", *Acta Math., vol. 180, no. 1, 1988, pp 1-29.*

[19] D. Cassereau and M. Fink, "Time reversal of ultrasonic fields. Part III : Theory of the closed time reversal cavity", *IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectric and Frequency Control, vol. 39, 1992, pp 579-793.*

[20] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Target characterization using decomposition of the time-reversal operator : electromagnetic scattering from small ellipsoids", *Inv. Problems, vol. 22, 2006, pp. 2145-2163.*

[21] M. Cheney, D. Isaacson, and M. Lassas, "Optimal acoustic measurements", *SIAM J. Appl. Math., vol. 61, 2001, pp. 1628-1647.*

[22] E. Cherkaeva and A. C. Tripp, "On optimal design of transcient electromagnetic waveforms", *SEG97 Expanded abstracts, 67th Annual Meeting of Society of Exploration Geophysicists, SEG Publications, Tulsa, OK, 1997, pp. 438-441.*

[23] P. G. Ciarlet, "The finite element method for elliptic problems", *Studies in mathematics and its applications, North Holland, Amsterdam, 1978.*

[24] R.E. Collin, "Field theory of guided waves", *IEEE Press, 1991.*

[25] D. Colton and R. Kress, "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory", *Springer-Verlag, Berlin, 1993.*

[26] R. Dautray and J.L. Lions, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques (Tome I)", *Masson, Paris, 1985.*

[27] A. Derode, A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon and M. Fink, "Taking advantage of multiple scattering to communicate with time reversal antennas", *Phys. Rev. Lett, vol. 90, no. 1, 2003, pp 014301-1-014301-4.*

[28] E. Domany and O. Entin-Wohlman, "Application of multiple scattering theory to subsurface defects", *J. Appl. Phys., vol. 56, 1984, pp. 137-142.*

[29] C. Draeger and M. Fink, "One channel time reversal in chaotic cavities : Theoretical limits", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 105, no. 2, 1999, pp 611-617.*

[30] C. Draeger and M. Fink, "One channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2D-Silicon cavity", *Phys. Rew. Letters, vol. 79, no. 3, 1997, pp 407-410.*

[31] A. Dubois, K. Belkebir and M. Saillard, "Localization and characterization of two-dimensional targets buried in a cluttered environment", *Inverse Problems, vol. 20, 2004, pp 1-17.*

[32] N. Dunford and J. T. Schwartz, "Linear operators Part III Spectral operators", *Interscience Publishers, New York, 1963.*

[33] *www.espci.fr*

[34] M. Fink, "Time reversed acoustics", *M.Sci. Am., Nov 1999, pp. 91-97.*

[35] M. Fink and C. Prada, "Acoustic time-reversal mirrors", *Inverse Problems, vol. 17, 2001, pp. R1-R38.*

[36] T. Folegot, C. Prada and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 113, no. 6, 2003, pp. 3155-3160.*

[37] J. P. Fouque, J. Garnier and A. Nachbin, "Time reversal for dispersive waves in random media", *SIAM J. Appl. Math., vol. 64, no. 5, 2004, pp. 1810-1838.*

[38] J. P. Fouque, J. Garnier, A. Nachbin and K. Solna, "Time reversal refocusing for point source in randomly layered media", *Wave Motion, vol. 42, 2005, pp. 238-260.*

[39] C.F. Gaumond, D.M. Fromm, J.F. Lingevitch and al., "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 119, no. 2, 2006, pp. 976-990*

[40] F. K. Gruber, E. A. Marengo and A. J. Devaney, "Time-reversal imaging with multiple signal classification considering multiple scattering between the targets", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 115, no. 6, 2004, pp. 3042-3047.*

[41] O. S. Haddadin and E. S. Ebbini, "Ultrasonic focusing through inhomogeneous media by application of the inverse scattering problem", *J. Acous. Soc. Am., vol. 104, no. 1, July 1998, pp. 313-325.*

[42] C. Hazard, "Analyse modale de la propagation des ondes", *Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2001.*

[43] C. Hazard and M. Lenoir, "Modélisation et résolution des problèmes de diffraction", *cours Math. Appl. - ENSTA, 2001.*

[44] C. Hazard and K. Ramdani, "Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors", *SIAM J. App. Math., vol 64, no. 3, 2004, pp. 1057-1076.*

[45] L. Hormander, "The analysis of Linear Partial Differential Operators I", *Springer-Verlag, New York, 1983.*

[46] S. Hou, K. Solna and H. Zhao, "Imaging of location and geometry for extended targets using the response matrix", *J. Comput. Phys., vol. 199, 2004.*

[47] S. Hou, K. Solna and H. Zhao, "A direct imaging algorithm for extended targets", *Inv. Problems, vol. 22, 2006, pp. 1151-1178.*

[48] D. Isaacson, "Distinguishability of conductivities by electric current computed tomography", *IEEE Trans. on Medical Imaging, vol. 5, no. 2, 1986, pp. 92-95.*

[49] E. Isaacson and H. B. Keller, "The Analysis of Numerical Methods", *John Wiley and Sons, New York, 1966.*

[50] D. R. Jackson and D. R. Dowling "Phase Conjugation in Underwater Acoustics", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 89, no. 1, 1991, pp. 171-181.*

[51] A. Jami and M. Lenoir, "A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 16, 1978, pp. 341-359.*

[52] B. L. G. Jonsson, M. Gustafsson, V. H. Weston and M. V. De Hoop "Retrofocusing of acoustic wave fiels by iterated time reversal", *SIAM J. Appl. Math., vol. 64, no. 6, pp. 1954-1986, 2004.*

[53] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators", *Springer-Verlag, Berlin, 1966.*

[54] E. Kerbrat, D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, D. Cassereau and M. Fink, "Detection of cracks in a thin air-filled hollow cylinder by application of the DORT method to elastic components of the echo", *Ultrasonics, vol. 40, 2002, pp. 715-720.*

[55] P. Lax and R. Phillips, "Scattering Theory", *Academic Press, 1989.*

[56] J.F. Lingevitch, H.C. Song and W.A. Kuperman, "Time reversed reverberation focusing in a waveguide", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 111, no. 6, 2002.*

[57] D. Martin, "Documentation MELINA, ENSTA, Mai 2002", *http ://www.maths.univ-rennes1.fr/ dmartin/melina/www/homepage.html.*

[58] P.A. Martin, "Multiple Scattering : Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles", *Cambridge University Press, 2006.*

[59] T.D. Mast, A.I. Nachman and R.C. Waag, "Focusing and imaging using eigenfunctions of the scattering operator", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 102, no. 2, 1997, pp. 715-725.*

[60] G. Micolau, "Etude théorique et numérique de la méthode de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (D.O.R.T) en diffraction électromagnétique", *Thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille, 2003.*

[61] G. Micolau, and M. Saillard, "D.O.R.T method as applied to electromagnetic subsurface sensing", *Radio Science, vol. 38, no. 3, 2003.*

[62] G. Micolau, M. Saillard and P. Borderies, "D.O.R.T method as applied to ultrawideband signals for detection of buried objects", *IEEE Trans. on Geo. and Rem. Sens., vol. 41, no. 8, 2003.*

[63] N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T method", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 105, no. 5, 1999, pp. 2634-2642.*

[64] P.M. Morse and K.U. Ingard "Theoretical Acoustics", *Princeton University Press, 1986.*

[65] J. Necàs, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", *Masson, Paris, 1967.*

[66] J. C. Nédélec, "Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique", *Ecole polytechnique, juin 1977.*

[67] R. G. Newton, "Inverse Schrodinger Scattering in Three Dimensions", *Springer-Verlag, New York, 1989.*

[68] A.D. Pierce, *Acoustics, an introduction to its physical principle and applications*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[69] C. Prada, "Detection and imaging in complex media with the D.O.R.T method", *Chapter in Imaging of Complex Media with Acousic and Seismic Waves, Topics in Applied Physics, Springer-Verlag, Berlin, Vol. 84, 2002, pp. 107-133.*

[70] C. Prada and M. Fink, "Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media", *Wave motion 20, 1994, pp. 151-163.*

[71] C. Prada and M. Fink, "Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariants of the time-reversal operator. Application to Lamb waves characterization", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 104, no. 2, 1998, pp. 801-807.*

[72] C. Prada, E. Kerbrat, D. Cassereau and M. Fink, "Time reversal techniques in ultrasonic nondestructive testing of scattering media", *Inverse Problems, vol. 18, 2002, pp. 1761-1773.*

[73] C. Prada, N. Lartillot, and M.Fink, "Selective Focusing in Multiple-Target Media : The Transfer Method", *Proc. of IEEE Int. Ultrasonics Symposium, Baltimore, MD, USA, 1993, pp. 1139-1142.*

[74] C. Prada, S. Maneville, D. Spoliansky and M.Fink, "Decomposition of the time reversal operator : Detection and selective focusing on two scatterers", *J. Acoustic. Soc. Am., vol. 99, no. 4, 1996, pp. 2067-2076.*

[75] B. Pinçon and K. Ramdani, "Selective focusing on small scatterers in acoustic waveguides using time reversal mirrors", *à paraître dans Inverse Pb.*

[76] J. Razafiarivelo, "Optimisation de la forme de transition entre guides électromagnétiques par une méthode intégrale d'éléments finis", *Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie curie, 1996.*

[77] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. III : Scattering Theory", *Academic Press, New York, 1979.*

[78] J. de la Gorgue de Rosny, "Milieux réverbérants et réversibilité", *Thèse de doctorat de l'université Paris VI, octobre 2000.*

[79] H.A. Schenck, "Helmholtz integral formulation of the sonar equations", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 79, 1986, pp. 1423-1433.*

[80] G.T. Schuster, "A hybrid BIE+Born series modeling scheme : generalized Born series", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 77, 1985, pp. 865-879.*

[81] H. C. Song, W. A. Kuperman, W. S. Hodgkiss, T. Akal and C. Ferla, "Iterative time reversal in the ocean", *J. Acoust. Soc. Am., vol. 105, no. 6, June 1999, pp. 3176-3184.*

[82] M. Tanter, "Application du retournement temporel à l'hyperthermie ultrasonore du cerveau", *Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7, Mai 1999.*

[83] M. Tanter, J. F. Aubry, J. Gerber, J-L. Thomas and M. Fink, "Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter Part I. Basic principles", *J. Acous. Soc. Am., vol. 101, 2001, pp. 37-47.*

[84] M. Tanter, J-L. Thomas and M. Fink, "Time reversal and the inverse filter", *J. Acous. Soc. Am., vol. 108, no. 1, July 2000, pp. 223-234.*

[85] J. L. Thomas, F. Wu and M. Fink "Time Reversal Focusing Applied to Lithotripsy", *Ultrasonic Imaging, vol. 18, no. 2, 1996, pp. 106-121.*

[86] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard, "Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering", *J. Electromag. Waves and Appl., vol. 13, 1999, pp. 687-719.*

[87] B. R. Vainberg, "Asymptotic methods in equations of mathematical physics", *Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.*

[88] C. H. Wilcox, "Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains", *Springer-Verlag, Berlin, 1975.*

[89] T. Yokoyama T, T. Kikuchi, T. Tsuchiya T and al., "Detection and selective focusing on scatterers using decomposition of time reversal operator method in Pekeris waveguide model ", *Jap. Journal of App. Phys. Part 1- Regular papers short notes Rev. Papers 40 (5B), 2001, pp. 3822-3828.*

[90] M. E. Yavus and F. L. Teixeira, "Selective focusing via time reversal : time-domain DORT method", *ElectroScience Lab., Ohio State Univ., Columbus, OH, USA ; ESL student presentation series, october 2005.*

[91] M. E. Yavus and F. L. Teixeira, "Time-domain DORT method for ultrawideband electromagnetic fields under dispersive and conductive random media", *IEEE Ant. and Propag. Soc. Inter. Symp., July 2006, pp. 711- 714.*

[92] H. Zhao, "Analysis of the response matrix for an extended target", *SIAM J. App. Math., vol. 64, 2004, pp. 725-745.*

[93] N. Zrelli, "Etude numérique de quelques solveurs itératifs de problèmes de propagation d'ondes acoustiques en domaine non borné", *Thèse de Doctorat de l'E.N.I.T. Université de Tunis El Manar, Avril 2006.*