HAL open science

Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux.

Lucas Chesnel

▶ **To cite this version:**

Lucas Chesnel. Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00763206

HAL Id: pastel-00763206

https://pastel.hal.science/pastel-00763206

Submitted on 10 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de l'École Polytechnique

Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES »

par

Lucas Chesnel

Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux.

Thèse soutenue publiquement le 12 octobre 2012 devant le jury composé de :

Mme	Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia	Co-directrice de thèse
Mme	Fioralba Cakoni	Examinatrice
M.	Patrick Ciarlet	Directeur de thèse
M.	Martin Costabel	Rapporteur
Mme	Maria J. Esteban	Rapporteuse
M.	Sergei A. Nazarov	Examinateur
M.	Serge Nicaise	Examinateur
M.	Grégory Vial	Examinateur

Remerciements

Les remerciements. C'est la coutume. Exceptionnellement, je m'y plierai. Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à Anne-Sophie et Patrick. C'est dit. Précisons. Tous les deux, je vous remercie d'abord de l'extraordinaire confiance que vous m'avez témoignée, chacun selon votre tempérament. Je vous remercie également de la liberté absolue que vous m'avez offerte. C'était sans doute essentiel pour moi. J'ai appris beaucoup à vos côtés, bien plus que les rouages de la recherche. Merci.

Je remercie le grand frère Xavier Claeys. Xavier Claeys, c'est le type avec les cheveux en bataille qui vous conseille de lire le Kozlov-Mazya-Rossman 1997, un grand cru, et le McLean lorsque vous êtes en stage de Master, avant de débuter votre thèse. Ça peut sembler anodin mais tout comme Proust, Dostoïevski et Céline, ça change la vie. C'est plus généralement le type qui s'intéresse à tout ce qui ressemble de près ou de loin à des mathématiques et qui vous décrit les détails d'un calcul de développement asymptotique par téléphone. C'est enfin le type qui vous invite à manger des ris de veau aux morilles lorsque vous lui rendez visite à Toulouse. Et ça, ça vaut tous les discours ! Un grand merci Xavier, tu m'as énormément apporté et j'espère pouvoir continuer à profiter de ta passion en travaillant avec toi.

Je remercie Martin Costabel et Maria J. Esteban d'avoir accepté de rapporter cette thèse. J'ai bien conscience que dans ce document, parfois, le lyrisme bouleversant (mais lisez donc pour voir !) peine à masquer l'austérité des espaces à poids.

Je remercie les examinateurs Fioralba Cakoni, Sergei A. Nazarov, S. Nicaise et G. Vial de me faire l'honneur d'être membres du jury. J'espère tout de même qu'il n'y a pas eu méprise : l'exposé présentera relativement peu d'effets spéciaux...

Je remercie Eric Lunéville de m'avoir accueilli au sein de l'UMA. La troisième année de l'Ensta, précédant cette thèse, aura été pour moi un bon bol d'air et un retour dans le droit chemin. Je ne l'oublierai pas. Je remercie également tous les membres du laboratoire UMA pour leur chaleur et leur amicalité.

Je remercie Patrick Joly pour son accessibilité, ses conseils singulièrement pertinents. Je remercie la grande sœur Sonia, toujours à l'écoute et d'une générosité insensée.

Je remercie Houssem, avec qui j'ai toujours disctuté avec plaisir, et grâce à qui j'ai pu partir aux États-Unis. Je remercie Fioralba Cakoni et David Colton qui m'ont reçu avec attention et gentillesse dans leur laboratoire de « Newark, Delaware ». Je remercie, bien qu'il ne sache pas vraiment distinguer Georges Brassens de Florent Pagny, le fameux Dinh Liem Nguyen que j'ai rencontré là-bas. Je lui souhaite bien du courage pour terminer sa thèse. Je pense également à son directeur Armin, un chic type aussi gentil que brillant.

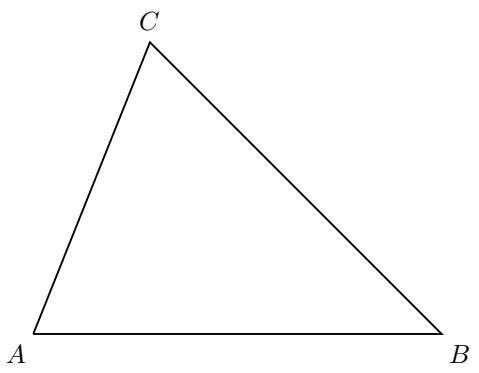
Je remercie Sergei A. Nazarov, l'icône vivante, l'âme russe à lui tout seul. Je remercie Monique Dauge, qui m'a fourni quelques conseils précieux.

Je remercie les enseignants qui m'ont transmis un peu de leur passion et ceux qui m'ont soutenu, en particulier Mme et M. Barlier, M. Poncin, Denis Matignon.

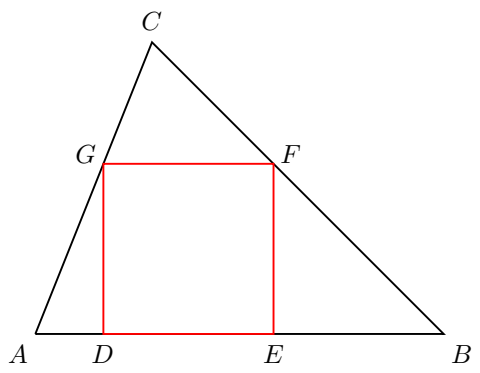
Je remercie les compères Benjamin, Jérémi et Lauris. Leur camaraderie aura assurément constitué un appui important en début de thèse. Je remercie bien entendu mes collègues de bureau, Giovanni, Nicolas C. et Nicolas S. L'un pour sa passion de Dylan, l'autre pour sa loyauté, le dernier pour sa simplicité et tous les trois, pour leur fraternité ... et leur intérêt pour les chants Grégoriens, une spécialité de la Sarthe ! Mais je m'égare aux morilles, encore, il faut conclure. Pour cela, je salue enfin Juliette, Julien, Sébastien, Bérangère, Guillaume, Jerónimo, Euan, Pat, Raphaël, Manuel, Pierre-Henri, Maxence, Mathieu, Maxime, Mohamed, Athéna, Zhiping, Jun-Yi, Estelle, Aliénor, Simon, Cédric B., Camille, Jérémy, Cédric D., Antoine et je demande pardon à tous ceux que j'oublie.

ÉCHAUFFEMENT [1]

Soit ABC un triangle tel que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ soient strictement inférieurs à $\pi/2$. Déterminer une méthode géométrique pour construire l'unique carré $DEFG$ tel que $[DE] \subset [AB]$, $F \in [BC]$ et $G \in [AC]$. Nous rappelons qu'une méthode géométrique est une méthode utilisant exclusivement la règle (non graduée) et le compas.



avant



après

1. Je dois ce joli exercice à M. Philippe Barlier, mon prof de math de sup..

Table des matières

Introduction générale **1**

Partie I Étude du problème scalaire **9**

1 Problème scalaire et méthode de la T-coercivité **11**

Introduction . . . 12
1.1 Notations et résultat préliminaire . . . 14
1.2 Étude de cas élémentaires : des conditions globales . . . 16
1.2.1 Domaine symétrique . . . 16
1.2.2 Sommet intérieur . . . 17
1.2.3 Sommet extérieur . . . 18
1.2.4 Interface de classe $\mathscr{C}^1$ . . . 19
1.3 Localisation pour une interface quelconque . . . 20
1.3.1 Description de la géométrie . . . 20
1.3.2 Énoncé du résultat . . . 21
1.3.3 Construction de la partition de l'unité . . . 22
1.3.4 Une estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathscr{P})$ . . . 24
1.3.5 Conclusion . . . 25
1.4 Applications . . . 25
1.4.1 Coefficients réguliers par morceaux . . . 25
1.4.2 Coefficients constants par morceaux . . . 25
1.5 Discussion sur les hypothèses portant sur σ . . . 27
1.5.1 Domaine symétrique . . . 27
1.5.2 Interface localement droite et contraste égal à -1 . . . 27
1.5.3 Critère pour les sommets . . . 29
1.5.4 Autres cas . . . 31
1.6 Domaines de $\mathbb{R}^3$ . . . 32
1.6.1 Domaine symétrique . . . 32
1.6.2 Arête prismatique . . . 32
1.6.3 Arête axisymétrique . . . 33
1.6.4 Pointe conique . . . 34
1.6.5 Coin de Fichera . . . 36
1.6.6 Géométries générales de $\mathbb{R}^3$ . . . 37
1.7 Conditions aux limites de type Neumann . . . 38
1.7.1 Géométries particulières . . . 39
1.7.2 Interface quelconque en 2D . . . 40
1.7.3 Travail dans l'espace des fonctions à moyenne nulle . . . 41
1.8 Calculs manquants . . . 42
1.8.1 Calculs utilisés dans la Section 1.5 . . . 42

1.8.2 Coordonnées toroïdales . . . 42

2 Étude numérique du problème scalaire **45**
Introduction . . . 45
2.1 Cadre général . . . 46
2.1.1 Point de départ . . . 46
2.1.2 La T-coercivité, une reformulation du théorème de Banach–Nečas–Babuška . 47
2.1.3 Approximation de la solution . . . 48
2.2 Problème de transmission scalaire : caractère bien posé . . . 51
2.2.1 Notations . . . 51
2.2.2 Exemples . . . 52
2.2.3 Régularité de la solution . . . 54
2.3 Approximation avec une hypothèse sur le maillage . . . 55
2.3.1 Approximabilité . . . 55
2.3.2 Approximation numérique : maillage T-conforme . . . 56
2.3.3 Approximation numérique : maillage localement T-conforme . . . 56
2.4 Approximation sans hypothèse sur le maillage . . . 59
2.4.1 Approximation numérique : maillage quelconque . . . 59
2.4.2 Approximation numérique : utilisation de la dissipation . . . 60
2.5 Expériences numériques . . . 62
2.5.1 Influence du maillage pour l'exemple de la cavité . . . 62
2.5.2 Deux propriétés caractéristiques du problème de transmission scalaire avec changement de signe . . . 65

3 Résultats de régularité **67**
Introduction . . . 67
3.1 Bande infinie . . . 69
3.1.1 Espaces de Sobolev à poids dans la bande : définitions, rappels . . . 69
3.1.2 Bande symétrique infinie . . . 71
3.1.3 Bande infinie non symétrique . . . 75
3.1.4 Comportement des solutions à l'infini . . . 81
3.1.5 Applications . . . 84
3.2 Secteurs non bornés . . . 86
3.2.1 Espaces de Sobolev à poids dans les secteurs : définitions, rappels . . . 87
3.2.2 Sommet extérieur . . . 88
3.2.3 Sommet intérieur . . . 91
3.3 Ouvert borné . . . 92
3.3.1 Notations . . . 93
3.3.2 Problème considéré . . . 94
3.3.3 Résultat de régularité dans l'ouvert borné . . . 96
3.3.4 Asymptotique de la solution en domaine borné . . . 99

4 Milieux négatifs et dissipation **103**
Introduction . . . 103
4.1 Position du problème, notations . . . 104
4.2 Modélisation de la dissipation . . . 105
4.2.1 Modèles conduisant à des permittivités négatives . . . 106
4.2.2 Un modèle de perméabilité négative . . . 107
4.2.3 Bilan énergétique . . . 109
4.3 Comportement de la suite des solutions dissipatives . . . 110
4.3.1 Premières estimations . . . 110
4.3.2 Développement asymptotique par rapport à la dissipation . . . 112

4.4 Convergence en norme forte . . . 113

Partie II Extensions pour le problème scalaire **117**

5 Condition de radiation dans l'intervalle critique **119**
Introduction . . . 119
5.1 Position du problème . . . 121
5.1.1 Géométrie, notations . . . 121
5.1.2 Propriétés connues du problème . . . 122
5.2 Analyse modale . . . 123
5.2.1 Calcul des modes du guide d'ondes . . . 123
5.2.2 Un bref rappel d'un problème classique de guide d'ondes . . . 125
5.3 Caractère bien posé dans un cadre fonctionnel adapté . . . 126
5.4 Principe d'absorption limite . . . 130
5.5 Caractère bien posé du problème dans la géométrie initiale . . . 132
5.6 Analyse dans les espaces de Sobolev à poids . . . 136
5.6.1 Norme à paramètre . . . 136
5.6.2 Problème 1D dépendant d'un paramètre . . . 136
5.6.3 Espaces à poids et transformée de Laplace dans la bande infinie . . . 138
5.6.4 Problème dans la bande infinie . . . 140
5.6.5 Problème dans la demi-bande . . . 140
5.7 Aspects numériques . . . 142

6 Développement asymptotique **149**
Introduction . . . 149
6.1 Description du problème . . . 151
6.1.1 Géométrie . . . 151
6.1.2 Problème étudié . . . 152
6.2 Géométries limites . . . 153
6.2.1 Géométrie externe . . . 153
6.2.2 Géométrie interne . . . 155
6.3 Résultat de stabilité . . . 156
6.3.1 Développement en champ lointain . . . 156
6.3.2 Développement en champ proche . . . 158
6.3.3 Le principe de raccord . . . 159
6.3.4 Champ approché . . . 159
6.3.5 Estimation du reste . . . 160
6.3.6 Résultat de stabilité . . . 162
6.4 Développement asymptotique au premier ordre . . . 163
6.4.1 Construction du développement . . . 164
6.4.2 Champ approché et estimations d'erreur . . . 164
6.5 Illustrations numériques . . . 166

Partie III Équations de Maxwell **171**

7 Équations de Maxwell en 2D **173**
Introduction . . . 173
7.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic* . . . 178
7.1.1 Formulation scalaire pour E_z . . . 178
7.1.2 Formulation vectorielle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ . . . 179

7.1.3 Bilan de l'approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic* . . . 183
7.2 Relation entre les opérateurs scalaires . . . 183
7.3 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ . . . 185
7.4 Résumé pour le problème *Transverse Electric* . . . 188
7.4.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Electric* . . . 189
7.4.2 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{E}_\perp$ . . . 190
7.5 Illustration sur un cas particulier . . . 190

8 Un résultat de compacité pour Maxwell 2D 193
Introduction . . . 193
8.1 Notations . . . 195
8.2 Un résultat de décomposition des champs électriques . . . 196
8.3 Une étude de régularité . . . 199
8.3.1 Régularité au voisinage des arêtes internes . . . 200
8.3.2 Régularité au voisinage des sommets extérieurs . . . 200
8.3.3 Régularité au voisinage des sommets internes . . . 207
8.3.4 Régularité globale . . . 208
8.4 Injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . . . 208
8.5 Un exemple d'injection non compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . . . 209

9 Équations de Maxwell en 3D 211
Introduction . . . 211
9.1 Mise en place du problème . . . 213
9.2 Formulations équivalentes . . . 214
9.2.1 Problème pour le champ électrique . . . 214
9.2.2 Problème pour le champ magnétique . . . 216
9.3 Éclairage : T-coercivité dans $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ . . . 217
9.3.1 Étude pour le champ électrique avec une permittivité $\varepsilon = 1$ . . . 217
9.3.2 Étude pour le champ magnétique avec une perméabilité $\mu = 1$ . . . 218
9.4 Résultats de compacité . . . 219
9.4.1 Injection compacte de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . . . 219
9.4.2 Injection compacte de $\mathbf{X}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . . . 220
9.5 Caractère bien posé des problèmes initiaux . . . 221
9.6 Illustrations . . . 223
9.6.1 Domaine symétrique . . . 223
9.6.2 Arête prismatique . . . 224
9.6.3 Coin de Fichera . . . 225
9.6.4 Cavité non symétrique . . . 225
9.7 Extension : problèmes scalaires non injectifs . . . 226
9.7.1 Problèmes scalaires non injectifs : formulations équivalentes . . . 228
9.7.2 Problèmes scalaires non injectifs : résultats de compacité . . . 229
9.7.3 Problèmes scalaires non injectifs : retour aux problèmes initiaux . . . 229
9.8 Extension : géométries non triviales . . . 231
9.8.1 Géométries non triviales : résultats de compacité . . . 234
9.8.2 Géométries non triviales : retour aux problèmes initiaux . . . 235

Partie IV Problèmes de transmission intérieurs 237

10 Application au problème de transmission intérieur 239
Introduction . . . 239
10.1 Étude du problème de Transmission Intérieur scalaire . . . 241

10.1.1 La T-coercivité pour le problème de transmission intérieur 242
10.1.2 Cas $A \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ dans un voisinage de $\partial\Omega$ 243
10.1.3 Cas $\mathrm{Id} < A_\star \mathrm{Id} \leq A$ dans un voisinage de $\partial\Omega$ 245
10.2 Étude du problème de Transmission Intérieur vectoriel 245
10.2.1 Définitions et présentation du problème 246
10.2.2 Propriétés pour le problème scalaire 247
10.2.3 Une condition suffisante pour le caractère discret des valeurs propres de transmission 248
10.2.4 Étude de l'espace $\mathbf{X}_0$ 248
10.2.5 Cas $A \leq A^\star \mathrm{Id}$, avec $A^\star < 1$, dans un voisinage de la frontière 251
10.2.6 Caractère Fredholm de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ 251
10.2.7 Caractère discret des valeurs propres de transmission 252
10.2.8 Localisation des valeurs propres de transmission 253
10.2.9 Une estimation pour la première valeur propre de transmission 253
10.2.10 Cas $A_\star \mathrm{Id} \leq A$, avec $1 < A_\star$, dans un voisinage de la frontière 254
10.3 Quelques questions ouvertes 254

11 Bilaplacien avec changement de signe **257**
Introduction 257
11.1 Formulation du quatrième ordre 258
11.2 Étude de la formulation du quatrième ordre 260
11.2.1 Une première approche 260
11.2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur 262
11.2.3 Étude de l'injectivité en 1D 264
11.3 Utilisation de la T-coercivité géométrique 266
11.4 Bilaplacien avec conditions mixtes 271
11.4.1 Le paradoxe de Sapongyan pour le cas σ positif 271
11.4.2 Étude dans le cas où σ change de signe 273
11.4.3 Résultats en dimension supérieure 280
11.4.4 Problème posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Delta)$ 285

Conclusions et perspectives **287**

Bibliographie **291**

Introduction générale

Les matériaux négatifs ont pris ces dernières années une place considérable en électromagnétisme. Commençons par préciser ce que nous entendons par matériau négatif. Un matériau est caractérisé par sa réponse fréquentielle à une excitation périodique. La permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ déterminent cette réponse. Nous dirons qu'un matériau est négatif à la fréquence ω si l'un au moins de ces deux paramètres physiques est négatif. À présent, décrivons quels peuvent être les matériaux négatifs.

Dans la nature, la grande majorité des matériaux possèdent des paramètres physiques qui demeurent positifs pour la plupart des fréquences. Néanmoins, il est connu depuis fort longtemps que les métaux présentent une permittivité négative pour une large gamme de fréquences. Pour représenter le comportement de ces métaux, il existe différents modèles, plus ou moins sophistiqués selon le degré de précision désiré. Présentons succinctement le plus simple : le modèle de Drude. Nous renvoyons le lecteur au §4.2.1 du Chapitre 4 pour plus de détails. Le modèle de Drude consiste à considérer que les électrons dans un métal sont libres de se déplacer sans subir de force de la part du noyau. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron puis en reliant son déplacement à la polarisation et au champ électriques, on montre qu'en première approximation, il est raisonnable de considérer que la permittivité diélectrique dans un métal suit la loi

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$

Ci-dessus, ε_0 désigne la permittivité du vide et ω_p correspond à la pulsation de plasma du métal. Cette dernière est située dans l'ultraviolet si bien que dans le visible et plus généralement, pour toutes les pulsations inférieures à ω_p, la permittivité diélectrique d'un métal est négative. Grâce à cette propriété, des ondes peuvent se propager à l'interface entre un diélectrique et un métal. Ces ondes sont appelées *plasmons de surface*. Elles ont pris ces vingt dernières années une importance considérable dans le domaine des micro et nano technologies en électromagnétisme [8, 47, 152, 86]. Expliquons brièvement pourquoi.

De façon générale, pour améliorer les performances des dispositifs électroniques, il faut être capable de réduire la taille des composants. Or, il semble qu'on ait atteint les limites pour les composants utilisant les signaux électriques. Une alternative séduisante consiste à transmettre les informations au moyen de la lumière. Mais pour le moment, il est difficile de la manipuler à de petites échelles, avec des matériaux classiques, en raison de la limite de diffraction. Les matériaux à permittivité négative, comme donc, les métaux sous la fréquence plasma, permettraient de s'affranchir de cette limite de diffraction. À terme, les physiciens espèrent pouvoir développer une électronique des plasmons pour construire des puces d'ordinateur. Les potentielles retombées de telles techniques sont donc colossales. Indiquons également que les plasmons sont très sensibles aux propriétés de surface et l'on peut les exploiter pour concevoir des photodétecteurs à l'échelle nanométrique. Pour plus d'applications, nous invitons le lecteur à consulter [135]. En pratique, les technologies plasmoniques

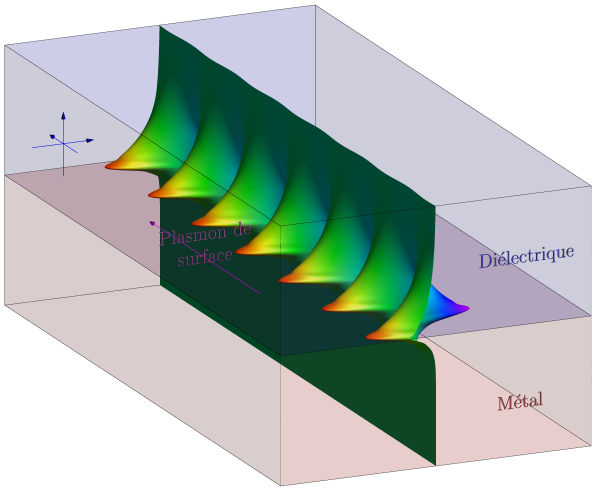


FIGURE 1 – Représentation schématique d'un plasmon de surface.

sont en plein essor car on a beaucoup progressé dans les procédés d'observation. Auparavant, on ne pouvait mesurer que le champ lointain associé à ces ondes. Or cette information est vraiment pauvre car les plasmons sont localisés à l'interface diélectrique/métal et exponentiellement décroissants dans la direction transverse (cf. illustration de la Figure 1). Désormais, grâce aux avancées réalisées en imagerie, il est possible d'accéder au champ proche ce qui se révèle beaucoup plus intéressant. Mathématiquement, par contre, ces plasmons de surface semblent des objets relativement inconnus qui ne rentrent pas dans les théories de guides d'ondes existantes. Ceci provient du changement de signe de la permittivité qui apparaît dans les équations de Maxwell qui gouvernent les variations du champ électromagnétique.

Si les métaux sous la pulsation de plasma constituent les représentants les plus naturels des matériaux négatifs, les médiatiques métamatériaux en sont peut-être le symbole le plus scintillant. Les métamatériaux sont des structures composites artificielles que l'on ne trouve pas dans la nature. Ils sont fabriqués en agençant de façon périodique un motif, petit par rapport à la longueur d'onde de travail, réalisé à partir de matériaux standards. Pour obtenir un matériau qui se comporte comme un matériau négatif, tout le travail consiste à bien choisir ledit motif. En effet, ce sont des résonances locales au niveau de la cellule de base qui confèrent à la structure macroscopique des propriétés originales. À l'heure actuelle, les physiciens semblent avoir une préférence pour les motifs constitués de fils et d'anneaux métalliques coupés.

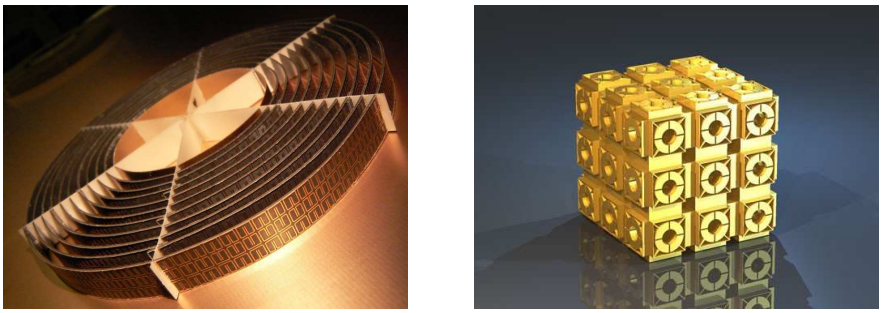


FIGURE 2 – Exemples de métamatériaux. Photos : D. Schurig, Duke University (à gauche) et C. Soukoulis, Ames Laboratory (à droite).

Dans notre travail, nous nous intéresserons en particulier à des structures qui se comportent comme si leur permittivité diélectrique et leur perméabilité magnétique étaient toutes deux négatives. Ce

sont les fameux métamatériaux à indice de réfraction négatif également appelés matériaux de la main gauche. Ils portent ce nom car le trièdre (vecteur d'onde, champ électrique, champ magnétique) y suit la règle de la main gauche. Nous expliquerons dans le §4.2.2 du Chapitre 4 pourquoi un matériau pour lequel ε et μ sont négatifs possède un indice $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ négatif. Au niveau du dioptre entre un matériau usuel et un tel métamatériau doublement négatif, il se produit un phénomène surprenant de réfraction négative (cf. Figure 3). On le comprend sans peine en écrivant la loi de Descartes qui régit le trajet des rayons lumineux et en exploitant le changement de signe de n.

Avant de poursuivre, il est important de préciser que les métamatériaux ne sont pas tous négatifs. Un métamatériau est simplement une structure que l'on construit pour qu'elle se comporte comme un matériau homogène de permittivité et de perméabilité données. C'est cette maîtrise des coefficients physiques qui fait l'intérêt des métamatériaux. Elle permet de contrôler le champ électromagnétique et donc la lumière. C'est ainsi que des physiciens ont imaginé créer des capes d'invisibilité. Pour cette application, l'idée consiste à modifier la permittivité et la perméabilité dans une couronne autour de l'objet que l'on souhaite cacher. On choisit alors ε et μ de sorte qu'un rayon lumineux arrivant sur l'obstacle le contourne sans subir d'interaction (voir une illustration de ce phénomène avec la Figure 3 à droite).

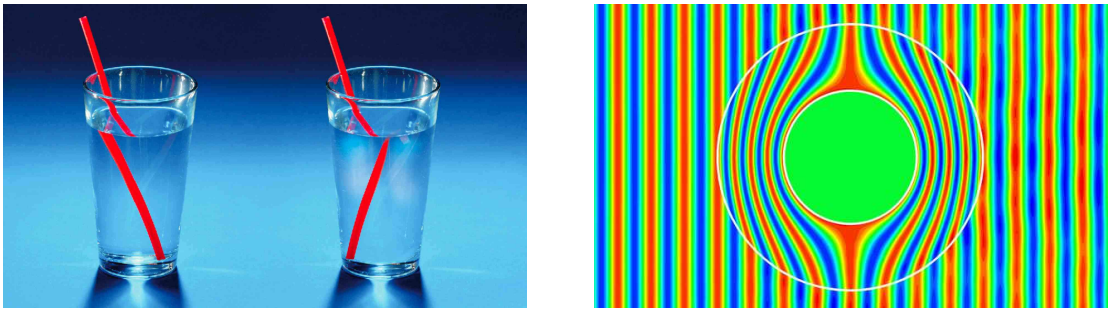


FIGURE 3 – Réfraction négative (à gauche). Un exemple d'invisibilité pour une onde plane (à droite).

Arrêtons-nous là pour la présentation des différents matériaux négatifs et pour la description des technologies dans lesquelles ils interviennent. Retenons simplement deux idées importantes. D'une part, les applications potentielles fourmillent. D'autre part, on a besoin de ces matériaux négatifs dans des contextes compliqués où l'on travaille bien souvent à l'échelle nanométrique (lorsque l'on souhaite manipuler la lumière en tout cas). Pour cette dernière raison, le développement expérimental des dispositifs se révèle très coûteux. D'ailleurs, pour être réaliste, même s'il existe quelques résultats encourageants en micro-ondes, il semble qu'il reste beaucoup à faire pour construire en pratique des objets utilisant les plasmons ou les métamatériaux dans le domaine du visible. Pour limiter les manipulations onéreuses, il est donc crucial de savoir mettre en place des méthodes de simulations efficaces pour développer les technologies. Pour les structures périodiques que sont les métamatériaux, différentes possibilités s'offrent à nous. Exposons les deux grandes idées.

Une première approche consiste à effectuer les calculs sur le matériau réel considéré dans toute sa complexité. Néanmoins, cette technique est extrêmement dispendieuse en raison du nombre important de degrés de liberté. Naturellement, il faut essayer de tirer parti de la structure périodique de ces composites. Cela demande tout de même des méthodes assez fines. De substantielles avancées ont été réalisées dans ce sens notamment par J. Coatléven, S. Fliss et P. Joly (voir [81, 56]). Une seconde approche pour effectuer les simulations numériques consiste à homogénéiser les métamatériaux en les représentant par des matériaux homogènes équivalents. Cette méthode paraît très attrayante car elle permet de faire les calculs facilement. Malheureusement, la justification du processus d'homogénéisation s'avère délicate. Pour le moment, elle n'a été réalisée que dans certaines géométries bien particulières et il reste d'importantes zones d'ombre pour des

configurations générales. Néanmoins, il est possible de prouver mathématiquement qu'on peut construire des matériaux qui se comportent macroscopiquement comme si leur permittivité et leur perméabilité étaient négatives [30, 29, 28].

Dans cette thèse, nous souhaitons nous intéresser aux équations de Maxwell posées dans un milieu constitué d'un matériau positif classique et d'un matériau négatif. Ce matériau négatif représentera tantôt un métal sous la fréquence plasma, tantôt un métamatériau négatif homogénéisé. Nous nous placerons en régime harmonique en temps et supposerons l'ensemble de la structure entourée par un conducteur parfait. Cette dernière hypothèse conduit à travailler en domaine borné. À cause du changement de signe des coefficients physiques à l'interface entre les deux matériaux homogènes, on ne dispose pas des propriétés usuelles de positivité. Par conséquent, les techniques classiques d'étude des équations de Maxwell ne peuvent être utilisées telles quelles. De façon générale, les questions que nous nous posons sont les suivantes. Les équations de Maxwell sont-elles bien posées dans ces milieux ? Autrement dit, possèdent-elles une unique solution dépendant continûment de la donnée ? Si oui, peut-on mettre en place et justifier des méthodes numériques pour approcher cette solution ? Lorsque les équations de Maxwell ne sont pas bien posées, peut-on déterminer un nouveau cadre fonctionnel pour retrouver ce caractère bien posé ? Tels sont les grands axes, les questions directrices de ce travail de thèse.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'étude des problèmes d'électromagnétisme dans des milieux composites pour lesquels ε et/ou μ change(nt) de signe en est encore à ses balbutiements. Dans ce champ de recherches, M. Costabel et E. Stephan semblent pouvoir être considérés comme des pionniers. En effet, dès 1985, bien avant l'ère des plasmons et des métamatériaux négatifs, ces deux auteurs dans [66] s'intéressent à la question en utilisant des techniques de représentation intégrale. L'apparition des milieux négatifs au sein de l'équipe Poems date de la fin des années quatre-vingt-dix avec la thèse de K. Ramdani encadrée par A.-S. Bonnet-Ben Dhia [138]. Leur travail est alors centré sur les milieux supraconducteurs. Dans le même temps, M. Dauge et B. Texier apportent leur contribution en montrant comment adapter les techniques d'équations elliptiques dans des géométries singulières pour ce problème (cf. [72]). La prise de conscience de l'importance d'une étude mathématique fine des métamatériaux homogénéisés revient sans doute à la thèse de C. M. Zwölf encadrée par A.-S. Bonnet-Ben Dhia et P. Ciarlet [155]. Au cours de ce projet, ils obtiennent les premiers résultats variationnels permettant de justifier la convergence de méthodes numériques. En Italie, à Gênes, il existe une équipe de chercheurs, composée notamment de G. Bozza, P. Fernandes, G. Oliveri et M. Raffetto, qui s'intéresse à l'analyse mathématique et numérique de ces problèmes (voir notamment les articles [131, 80]). Récemment, dans [129], S. Nicaise et J. Venel ont proposé une amélioration des résultats d'approximation de [25]. Mais la communauté ne semble guère plus grande. Pourtant, les phénomènes originaux à découvrir abondent...

Plan de la thèse

Présentons maintenant le plan que nous allons suivre. Ce mémoire se divise en quatre parties. Les deux premières sont consacrées à l'étude du problème scalaire auquel on peut réduire les équations de Maxwell lorsque le domaine et la géométrie présentent une invariance dans une direction. Dans la troisième partie, nous travaillons sur les équations de Maxwell en 2D et en 3D. Dans la quatrième partie, nous nous intéressons au problème de transmission intérieur qui apparaît dans la théorie de la diffraction. L'opérateur associé à ce problème présente également un changement de signe dans sa partie principale.

Partie I : Étude du problème scalaire Nous commençons par étudier le problème scalaire obtenu à partir des équations de Maxwell lorsque ces dernières sont invariantes dans une direction. Dans le Chapitre 1, à l'aide de considérations géométriques, nous revisitons la méthode

de la T-coercivité introduite dans [25]. Nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit bien posé au sens de Fredholm. Nous détaillons le procédé en 2D et nous donnons les outils pour traiter le cas scalaire 3D. Dans le Chapitre 2, nous travaillons dans deux directions. D'une part, nous examinons le lien entre la T-coercivité et les théorie existantes dans la littérature. Nous montrons notamment que cette approche n'est autre qu'une reformulation de la condition *inf-sup*. D'autre part, nous considérons des questions d'approximation numérique de la solution du problème scalaire lorsque celui-ci est bien posé. Nous utilisons la technique de la T-coercivité pour justifier la convergence des méthodes numériques d'éléments finis classiques pour certains maillages. Nous développons également une méthode de pénalisation qui fonctionne sans hypothèse particulière sur le maillage mais qui converge lentement. Enfin, nous présentons quelques simulations numériques pour illustrer nos résultats. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de la régularité des solutions du problème scalaire. Ces résultats sont importants pour démontrer complètement la convergence des méthodes numériques du précédent chapitre. Par ailleurs, ils constituent une introduction aux techniques d'espaces à poids et de transformée de Mellin que nous utiliserons dans la suite. Le Chapitre 4 a une vocation plus physique. Nous y justifions la pertinence d'étudier les équations de Maxwell avec des coefficients physiques réels qui changent de signe. Pour cela, nous montrons que le comportement de la solution des équations de Maxwell dans un milieu légèrement dissipatif (*i.e.* avec des coefficients physiques complexes) est très lié à la nature du problème non dissipatif. Dans ce chapitre, nous revenons également sur la question délicate de la modélisation de l'absorption dans un milieu négatif.

Partie II : Extensions pour le problème scalaire Cette seconde partie est dédiée à l'étude du problème scalaire lorsque ce dernier n'est pas bien posé dans le cadre usuel des fonctions d'énergie finie (H^1). Cela se produit notamment, pour certaines valeurs des paramètres physiques, lorsque l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif présente un coin. Dans le Chapitre 5, nous définissons un nouveau cadre fonctionnel pour restaurer le caractère bien posé du problème. La démarche s'apparente au processus d'absorption limite dans un guide d'ondes non borné pour l'équation de Helmholtz en présence de modes propagatifs, le coin de l'interface dans notre problème jouant le rôle d'infini dans le guide d'ondes. Toutefois, il existe une différence fondamentale par rapport au problème de guide d'ondes classique. En raison, du changement de signe des coefficients, nous ne pouvons pas utiliser un résultat de décomposition sur les vecteurs propres d'un certain opérateur transverse. Nous contournons néanmoins ce problème, au prix d'un petit effort technique, en recourant aux espaces à poids et aux méthodes de type Mellin. Dans ce chapitre, nous donnons également quelques pistes pour approcher la solution dans ce nouveau cadre fonctionnel. L'une d'elle consiste à placer une couche parfaitement adaptée (PML) au voisinage du coin de l'interface, technique relativement inhabituelle. Dans le Chapitre 6, nous effectuons un développement asymptotique de la solution dans ce nouveau cadre fonctionnel par rapport à un petit arrondi du coin. Nous mettons en évidence une instabilité de la solution par rapport à cet arrondi. Pour les applications, ce point présente probablement des conséquences importantes car il n'existe dans la nature que des coins légèrement arrondis.

Partie III : Équations de Maxwell Dans la troisième partie de ce travail, nous nous intéressons aux équations de Maxwell. Nous débutons avec le Chapitre 7 par une étude complète de ces équations lorsque la géométrie et les données sont invariantes dans une direction. Dans le processus, nous prouvons un résultat liant le problème scalaire avec condition de Dirichlet au problème scalaire avec condition de Neumann en 2D. Par ailleurs, nous exhibons une curiosité du cadre fonctionnel pour les équations de Maxwell lorsque les paramètres physiques changent de signe. Dans le Chapitre 8, nous redéployons les outils de type espaces à poids et transformée de Mellin pour obtenir un résultat d'injection compacte pour les équations de Maxwell. Dans ce mémoire, nous démontrons de tels théorèmes en d'autres circonstances en utilisant d'autres techniques. Ce chapitre est néanmoins important car il devrait permettre de définir un nouveau cadre fonctionnel

pour les équations de Maxwell lorsque celles-ci ne sont pas bien posées dans les espaces usuels. Le Chapitre 9 contient assurément le résultat le plus important de cette partie. Nous y montrons que les équations de Maxwell 3D sont bien posées dès lors que les problèmes scalaires 3D sont bien posés.

Partie IV : Problèmes de transmission intérieurs La quatrième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude d'un problème de transmission intérieur que l'on rencontre en théorie de la diffraction. On peut le résumer ainsi. Considérons un milieu de référence contenant une inclusion constituée d'un matériau différent (oublions les matériaux négatifs). À fréquence fixée, peut-on trouver un champ incident pour lequel le champ réfléchi par l'inclusion soit nul ? La mise en équations de cette question conduit à un problème spectral pour lequel l'opérateur présente un changement de signe dans sa partie principale. De nouveau, les outils classiques ne peuvent être utilisés directement. Dans le Chapitre 10, nous établissons le lien entre ce problème et le problème de transmission matériau positif/matériau négatif. En procédant par analogie et en utilisant la technique variationnelle de la `T`-coercivité, nous démontrons des résultats concernant le caractère discret des fréquences pour lesquelles il existe une onde qui ne rayonne pas. Ces résultats sont essentiels pour pouvoir mettre en place les techniques de reconstruction du support de l'inclusion. Nous étudions à la fois le problème scalaire et le problème pour les équations de Maxwell. Pour certains jeux de paramètres physiques de l'inclusion, il est nécessaire de travailler sur une formulation différente de celle étudiée dans le Chapitre 10. De façon un peu brutale, on peut dire que c'est le seul espoir de pouvoir utiliser le théorème de Fredholm analytique pour prouver le caractère discret des valeurs propres de transmission. On est alors amené à étudier un problème de bilaplacien dépendant d'un paramètre. Dans le Chapitre 11, nous nous intéressons à ce problème lorsque le paramètre change de signe sur le domaine. Nous prouvons que ce problème du quatrième ordre possède des propriétés radicalement différentes de celles du problème du second ordre.

Information concernant les notations

Les notations, d'un chapitre à l'autre, peuvent varier quelque peu. Nous les précisons donc en début de chaque chapitre.

Ce travail de thèse a fait l'objet des publications suivantes.

◇ `Articles parus ou à paraître`.

[18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *Math. Mod. Num. Anal.*, 46(06):1363–1387, 2012.

[21] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et X. Claeys : Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Math. Models Meth. App. Sci., Accepté*, 33 pages, 2012.

[22] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et H. Haddar : On the use of T-coercivity to study the Interior Transmission Eigenvalue Problem. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 340(11-12):647–651, 2011.

[48] L. Chesnel : Interior transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations : the T-coercivity as an alternative approach. *Inv. Probl.*, 28(6):065005, 2012.

[49] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : Compact imbeddings in electromagnetism with interfaces between classical materials and metamaterials. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(5):2150–2169, 2011.

[50] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : `T`-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numer. Math., Accepté*, 28 pages, 2012.

◇ `Article soumis`.

[19] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Soumis à Appl. Num. Math., Special Issue : NELIA 2011*, 24 pages, 2012.

◇ `Articles en cours`.

[20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : `T`-coercivity for the Maxwell transmission problem between a dielectric and a negative material. *En cours*, 27 pages, 2012.

[51] L. Chesnel, X. Claeys et S.A. Nazarov : Asymptotics expansion for a non-smooth interface between a dielectric and a negative material. *En cours*, 2012.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DU PROBLÈME SCALAIRE

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE DU PROBLÈME SCALAIRE PAR LA MÉTHODE DE LA T-COERCIVITÉ

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

[18] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *Math. Mod. Num. Anal.*, 46(06):1363–1387, 2012.

Sommaire

Introduction **12**
1.1 Notations et résultat préliminaire **14**
1.2 Étude de cas élémentaires : des conditions globales **16**
1.2.1 Domaine symétrique 16
1.2.2 Sommet intérieur 17
1.2.3 Sommet extérieur 18
1.2.4 Interface de classe $\mathscr{C}^1$ 19
1.3 Localisation pour une interface quelconque **20**
1.3.1 Description de la géométrie 20
1.3.2 Énoncé du résultat 21
1.3.3 Construction de la partition de l'unité 22
1.3.4 Une estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathscr{P})$ 24
1.3.5 Conclusion 25
1.4 Applications **25**
1.4.1 Coefficients réguliers par morceaux 25
1.4.2 Coefficients constants par morceaux 25
1.5 Discussion sur les hypothèses portant sur σ **27**
1.5.1 Domaine symétrique 27
1.5.2 Interface localement droite et contraste égal à -1 27
1.5.3 Critère pour les sommets 29
1.5.4 Autres cas 31
1.6 Domaines de $\mathbb{R}^3$ **32**
1.6.1 Domaine symétrique 32
1.6.2 Arête prismatique 32
1.6.3 Arête axisymétrique 33
1.6.4 Pointe conique 34
1.6.5 Coin de Fichera 36
1.6.6 Géométries générales de $\mathbb{R}^3$ 37
1.7 Conditions aux limites de type Neumann **38**

1.7.1 Géométries particulières 39
1.7.2 Interface quelconque en 2D 40
1.7.3 Travail dans l'espace des fonctions à moyenne nulle 41
1.8 Calculs manquants 42
1.8.1 Calculs utilisés dans la Section 1.5 42
1.8.2 Coordonnées toroïdales 42

Introduction

En électromagnétisme, pour certaines applications, on aimerait travailler avec des composites qui se comportent comme des matériaux homogènes à permittivité diélectrique ε et/ou perméabilité magnétique μ réelle(s) et négative(s). Comme nous l'avons déjà mentionné, les métaux et les tout récents métamatériaux négatifs peuvent entrer, en première approximation, dans cette catégorie pour certaines plages de fréquences. La modélisation de tels objets soulèvent des questions relativement inhabituelles. Considérons une structure hétérogène composée d'un diélectrique classique et d'un matériau négatif. En raison du changement de signe des paramètres physiques, il n'est pas évident de prouver l'existence et l'unicité du champ électromagnétique pour un terme source donné. Dans ce chapitre, nous commencerons par nous intéresser au cas d'un problème bidimensionnel dans un domaine Ω représentant la structure hétérogène, en régime harmonique en temps avec une excitation de pulsation $\omega > 0$. Dans une telle configuration, de façon classique et comme nous le verrons dans le Chapitre 7, les équations de Maxwell se ramènent à des problèmes scalaires de la forme

$$\operatorname{div}(\sigma\,\nabla u) + \omega^2\,\varsigma\,u = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.1}$$

avec (σ, ς) égal à (ε^{-1}, μ) ou (μ^{-1}, ε). Ci-dessus, f désigne le terme source. Nous compléterons cette équation aux dérivées partielles par une condition aux limites sur la frontière. Dans ce chapitre, nous étudierons également le cas de figure $(\sigma, \varsigma) = (\varepsilon, 0)$ modélisant typiquement un problème d'électrostatique en deux ou trois dimensions.

De façon plus mathématique, nous supposons que Ω est partitionné en deux ouverts Ω_1 et Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Nous faisons l'hypothèse que Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ tandis que Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ sont à frontière lipschitzienne ($d = 2, 3$). Nous rappelons qu'un domaine est, par définition, un sous-ensemble ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$ ici) à frontière lipschitzienne. Introduisons $\sigma_k \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, deux fonctions à valeurs réelles telles que

$$\sigma_1 \geq c_1 > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_1 \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 \leq c_2 < 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_2,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Définissons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ de la façon suivante : $\sigma := \sigma_k$ dans Ω_k, $k = 1, 2$. Par ailleurs, prenons $\varsigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Ainsi, nous étudions une situation pour laquelle il y a un diélectrique classique dans Ω_1 et un matériau négatif dans Ω_2. Sur la frontière, nous imposerons dans un premier temps, une condition de Dirichlet homogène, *i.e.* $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Nous effectuerons la plupart de notre étude avec cette condition. Nous montrerons dans la Section 1.7 comment on peut traiter le cas de la condition de Neumann. Les résultats que nous allons obtenir pour le problème (1.1) avec condition de Neumann différeront dans certaines configurations de ceux pour le problème (1.1) avec condition de Dirichlet. Par contre, la méthode que nous allons mettre en œuvre, elle, sera la même.

Dans la suite, pour le problème avec condition de Dirichlet, nous prendrons un terme source f dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, et nous chercherons la solution u dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans ce chapitre, comme dans tout ce document d'ailleurs, $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ désignera l'ensemble des fonctions de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dont la trace est nulle

sur $\partial\Omega$. L'espace $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ est quant à lui constitué des formes linéaires continues sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Puisque l'injection de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ est compacte, il est suffisant d'étudier la partie principale de l'opérateur associé à (1.1). En d'autres termes, nous nous intéresserons au problème

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \quad \text{tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

De façon usuelle, u est solution du problème $(\mathscr{P})$ si, et seulement si, u vérifie « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $a(u,v) = l(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ », avec

$$a(u,v) = (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega, \qquad \text{et} \qquad l(v) = \langle f, v\rangle_\Omega\ .$$

Ci-dessus, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ désignent respectivement le produit scalaire de $(\mathrm{L}^2(\Omega))^d$ et le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Introduisons alors l'opérateur linéaire continu $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle Au, v\rangle_\Omega = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Nous noterons $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ l'ensemble des opérateurs continus de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$).

Notre objectif est de déterminer un critère sur σ pour garantir que le problème $(\mathscr{P})$ possède une et une seule solution, et plus généralement, pour assurer que $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ définit un isomorphisme. Bien entendu, en raison du changement de signe de σ sur Ω, la forme a n'est pas coercive [1] sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. En particulier, on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour autant, cela ne signifie pas que l'opérateur A n'est jamais un isomorphisme. Pour étudier le problème $(\mathscr{P})$, nous utiliserons la méthode de la $\mathtt{T}$-coercivité introduite dans [25, 155]. Présentons-en l'idée. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto a(u, \mathtt{T}v)$ soit coercive. Alors le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé, au sens où il possède une unique solution, en vertu du théorème de Lax-Milgram. En effet, dans ce cas, le problème « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $a(u, \mathtt{T}v) = l(\mathtt{T}v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ » est bien posé. Puisque $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, ceci prouve que le problème initial « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $a(u,v) = l(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ » est bien posé. Dès lors, toute l'astuce dans cette technique consiste à construire ces fameux opérateurs $\mathtt{T}$. Dans [25, 155], il est prouvé que $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ constitue un isomorphisme lorsque $\max\,(\inf_{\Omega_1}\sigma_1/\sup_{\Omega_2}|\sigma_2|, \inf_{\Omega_2}|\sigma_2|/\sup_{\Omega_1}\sigma_1) > I_\Sigma \geq 1$, où I_Σ est une constante qui ne dépend que de la géométrie de l'interface Σ entre Ω_1 et Ω_1. Mais la valeur de I_Σ n'est pas connue. Ceci vient du fait que les $\mathtt{T}$ sont construits à partir d'un opérateur de relèvement abstrait pour lequel on ne peut pas calculer explicitement la norme. Ici, nous nous proposons de compléter les résultats de [25, 155] de deux façons. Tout d'abord, nous obtenons des valeurs explicites des constantes. D'autre part, nous localisons ces résultats, au sens où nous proposons un critère pour assurer le caractère bien posé de $(\mathscr{P})$, quitte à avoir un noyau et un conoyau de même dimension finie, qui ne dépend que des valeurs des paramètres physiques au voisinage de l'interface entre les deux matériaux. Pour obtenir ces résultats, nous prouvons que A est de type Fredholm d'indice zéro, au moyen d'opérateurs $\mathtt{T}$ simples, définis de façon géométrique. Dans ce cas, si l'on possède un résultat d'unicité pour le problème $(\mathscr{P})$ alors il est bien posé. Mais il peut également apparaître un noyau de dimension finie comme nous le verrons plus loin, dans le Chapitre 2, §2.2.2. Bien sûr, si l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ est de type Fredholm d'indice zéro, alors l'opérateur associé au problème $\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) + \omega^2\,\varsigma\,u = f$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est également de type Fredholm d'indice zéro. Nous préciserons dans le Chapitre 2, comment se situe cette technique de la $\mathtt{T}$-coercivité par rapport aux approches classiquement utilisées pour montrer qu'un problème est bien posé. Plus précisément, nous verrons que cette méthode n'est autre qu'une formulation très simple de la théorie *inf-sup* [32].

1. Plus généralement, on ne peut pas trouver $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $(u,v) \mapsto e^{2i\pi\theta}a(u,v)$ soit coercive sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Pour montrer ce résultat, introduisons deux fonctions non nulles $\varphi_1 \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega_1)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega_2)$. Définissons φ telle que $\varphi|_{\Omega_1} = \varphi_1$ et $\varphi|_{\Omega_2} = \alpha\varphi_2$, avec $\alpha := (\int_{\Omega_1}\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 / \int_{\Omega_2}|\sigma_2||\nabla\varphi_2|^2)^{1/2}$. On a alors $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $\varphi \neq 0$ et $a(\varphi,\varphi) = 0$.

Dans le cas où σ_1 et σ_2 sont des nombres constants, il existe dans la littérature au moins deux autres approches pour étudier le problème $(\mathscr{P})$. À l'aide de techniques d'équations d'intégrales, il a d'abord été prouvé dans [66] par Costabel et Stephan que lorsque l'interface Σ est régulière (de classe $\mathscr{C}^2$), le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé au sens de Fredholm si, et seulement si, le contraste $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$ est différent de -1. Postérieurement à cela, l'influence des coins dans l'interface a été spécifiquement étudiée dans [72] (voir également [26, 138]). Les auteurs prouvent que lorsque l'interface présente un angle droit, le problème $(\mathscr{P})$, avec un second membre f dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, n'est pas de type Fredholm si, et seulement si, $\kappa_\sigma \in [-3; -1/3]$ (des résultats similaires peuvent être obtenus pour des valeurs quelconques d'angle). Nous retrouverons ces résultats au cours de notre étude par la technique de la T-coercivité.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Après avoir introduit quelques notations et prouvé un résultat préliminaire, nous étudions des cas élémentaires, pour des géométries simples de $\mathbb{R}^2$ ($d = 2$). Dans la Section 1.3, nous combinons les résultats obtenus à une technique de localisation pour pouvoir traiter des problèmes de transmission de $\mathbb{R}^2$ mettant en jeu des interfaces plus générales. Nous donnons alors des exemples lorsque σ est régulier ou constant par morceaux. En particulier, nous obtenons un critère reposant uniquement sur les valeurs du contraste à l'interface. Dans la Section 1.5, nous discutons l'optimalité de ces résultats pour les domaines de $\mathbb{R}^2$. Nous fournissons ensuite des éléments de preuve pour des géométries simples de $\mathbb{R}^3$ qui ne se ramènent pas nécessairement à des géométries 2D. Le cas du coin de Fichera en constitue l'exemple le plus illustratif. Enfin, nous présentons une démarche possible pour étudier le problème $(\mathscr{P})$ avec une condition aux limites de Neumann plutôt qu'une condition de Dirichlet.

1.1 Notations et résultat préliminaire

Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons quelques notations qui serviront tout au long de ce chapitre.
Étant donné un domaine $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$, nous noterons sans distinction $(\cdot,\cdot)_\mathcal{O}$ (resp. $\|\cdot\|_\mathcal{O}$) les produits scalaires (resp. les normes) de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ et $(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^d$. De même, pour $p \in [1;\infty] \setminus \{2\}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{O})}$ désignera à la fois la norme de $\mathrm{L}^p(\mathcal{O})$ et celle de $(\mathrm{L}^p(\mathcal{O}))^d$. Nous munirons $\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})} := \|\nabla\cdot\|_\mathcal{O}$. Nous notons $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathcal{O}$ le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}) \times \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})$, et nous définissons la norme

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O})} := \sup_{v\in\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, v\rangle_\mathcal{O}|}{\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})}}, \qquad \forall f \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}) .$$

Pour $k = 1, 2$, introduisons $\Gamma_k := \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$. Nous appelons interface l'ensemble $\Sigma := \partial\Omega_1\setminus\Gamma_1 = \partial\Omega_2\setminus\Gamma_2$. Les normes L^p ($p \in [1;\infty]$) sur Σ sont notées comme ci-dessus en remplaçant $\mathcal{O}$ par Σ. D'autre part, $\cdot|_\Sigma$ désignera l'opérateur de trace sur Σ.
Si v est une fonction mesurable sur Ω, nous utilisons la notation $v_k := v|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$. Introduisons ensuite [2]

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1 , \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2| , \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2|.$$

Lorsque c'est possible, nous définissons le contraste $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$ sur Σ. C'est une constante lorsque σ_1, σ_2 sont des fonctions constantes, ou un élément de $\mathscr{C}^0(\overline{\Sigma})$ lorsque $\sigma_1 \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega_1})$, $\sigma_2 \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega_2})$.
Pour $k = 1, 2$, introduisons l'espace des restrictions des éléments de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ à Ω_k :

$$\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k},\, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \right\} .$$

Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathrm{X})$) désignera l'espace des opérateurs linéaires et continus de X dans Y (resp. de X dans X). Enfin, dans tout ce chapitre, si $R_1 \in$

2. Partout dans la suite, nous écrirons sup pour sup ess, respectivement inf pour inf ess.

$\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2))$ et $R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1))$, nous notons

$$\|R_1\| := \sup_{v\in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1),\, \|\nabla v\|_{\Omega_1}=1} \|\nabla(R_1 v)\|_{\Omega_2} \qquad \text{et} \qquad \|R_2\| := \sup_{v\in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2),\, \|\nabla v\|_{\Omega_2}=1} \|\nabla(R_2 v)\|_{\Omega_1}.$$

Commençons par démontrer le théorème ci-dessous. Ce sera la brique de base dans l'approche que nous allons développer tout au long de ce chapitre.

Théorème 1.1.1 *Soit $R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2))$ un opérateur vérifiant la condition de raccord $(R_1 u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$ pour tout $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. Définissons*

$$\mathtt{T}_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Si $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1\|^2$, alors la forme a est $\mathtt{T}_1$-coercive : il existe une constante $C > 0$ telle que $a(u, \mathtt{T}_1 u) \geq C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans ce cas, $A : u \mapsto -div(\sigma\, \nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.
Soit $R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1))$ un opérateur vérifiant la condition de raccord $(R_2 u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$ pour tout $u_2 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)$. Définissons

$$\mathtt{T}_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Si $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2\|^2$, alors la forme a est $\mathtt{T}_2$-coercive : il existe une constante $C > 0$ telle que $a(u, \mathtt{T}_2 u) \geq C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans ce cas, $A : u \mapsto -div(\sigma\, \nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Par construction, $\mathtt{T}_1 u$ appartient à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathtt{T}_1 : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est continu. De plus, pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on a d'une part $\mathtt{T}_1(\mathtt{T}_1 u) = u$ sur Ω_1 et, d'autre part, $\mathtt{T}_2(\mathtt{T}_2 u) = -(-u_2 + 2R_1 u_1) + 2R_1 u_1 = u_2 = u$ sur Ω_2. On déduit $\mathtt{T}_1 \circ \mathtt{T}_1 = \mathrm{Id}$. Ceci prouve que $\mathtt{T}_1$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Calculons maintenant $a(u, \mathtt{T}_1 u)$, pour $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. L'inégalité de Young permet d'écrire, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} a(u, \mathtt{T}_1 u) &= (\sigma_1\, \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2|\, \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - 2(|\sigma_2|\, \nabla u_2, \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2} \\ &\geq (\sigma_1\, \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2|\, \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} \\ &\quad -\eta\, (|\sigma_2|\, \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - 1/\eta\, (|\sigma_2|\, \nabla(R_1 u_1), \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2} \\ &\geq ((\sigma_1 - \|R_1\|^2\, \sigma_2^+/\eta)\, \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2|\, (1-\eta)\, \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1\|^2$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq a(u, \mathtt{T}_1 u), \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Autrement dit, a est $\mathtt{T}_1$-coercive.
De la même façon, on a $\mathtt{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega))$, $\mathtt{T}_2 \circ \mathtt{T}_2 = \mathrm{Id}$ et donc $\mathtt{T}_2$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Pour $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, nous obtenons pour tout $\eta > 0$,

$$a(u, \mathtt{T}_2 u) \;\geq\; (\sigma_1(1-\eta)\nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + ((|\sigma_2| - \|R_2\|^2\, \sigma_1^+/\eta)\nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}.$$

Ainsi, si $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2\|^2$, alors il existe $C > 0$ telle que

$$C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq a(u, \mathtt{T}_2 u), \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega),$$

i.e. a est $\mathtt{T}_2$-coercive.
Pour terminer la preuve, supposons qu'il existe un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, tel que la forme bilinéaire continue $(u, v) \mapsto \tilde{a}(u, v) = a(u, \mathtt{T}v)$ soit coercive sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Bien sûr, $v \mapsto \tilde{l}(v) = l(\mathtt{T}v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. En vertu du théorème de Lax-Milgram, nous pouvons affirmer qu'il existe une et une seule fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\tilde{a}(u, v) = \tilde{l}(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. De plus, cette fonction dépend continûment de la donnée $\tilde{l}$. Comme $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, cela montre qu'il existe un unique $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $a(u, v) = l(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, u dépendant continûment de l. Cela prouve bien que A définit un isomorphisme. ■

Nous pouvons voir R_1 (resp. R_2) comme un « opérateur de transfert », transformant les fonctions définies sur Ω_1 (resp. Ω_2) en des fonctions définies sur Ω_2 (resp. Ω_1) et préservant la valeur à l'interface ainsi que la condition de Dirichlet sur la frontière. Dans l'énoncé du Théorème 1.1.1, nous avons supposé R_1, R_2 donnés mais ces opérateurs sont en réalité des paramètres. Définissons les espaces d'« opérateurs de transfert »

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1 := \{R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)) \,|\, R_1 v_1|_\Sigma = v_1|_\Sigma,\ \forall v_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)\} \\ \text{et}\quad &\mathcal{R}_2 := \{R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)) \,|\, R_2 v_2|_\Sigma = v_2|_\Sigma,\ \forall v_2 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)\}. \end{aligned}$$

En reprenant la preuve du Théorème 1.1.1, on obtient le

Théorème 1.1.2 *Supposons* $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > (\inf_{R_1\in\mathcal{R}_1} \|R_1\|^2)$ *ou* $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > (\inf_{R_2\in\mathcal{R}_2} \|R_2\|^2)$. *Alors, l'opérateur* $A : u \mapsto -div(\sigma\nabla u)$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Dans la suite du chapitre, R_1 sera toujours un opérateur de $\mathcal{R}_1$, R_2 un opérateur $\mathcal{R}_2$. Par ailleurs, $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ seront les éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ définis respectivement par (1.2) et (1.3).

Remarque 1.1.3 *Notre objectif maintenant consiste à construire des opérateurs de transfert de norme minimale. Nous verrons, au moins en 2D, que ce sont des opérateurs très simples, géométriques, qui réalisent ce minimum.*

Remarque 1.1.4 *Nous aurions pu considérer des isomorphismes* $\mathtt{T}_1$ *et* $\mathtt{T}_2$ *autres que ceux définis en (1.2) et (1.3). Rien n'impose d'utiliser les opérateurs de transfert* R_1, R_2. *Cependant, pour étudier le problème* $(\mathscr{P})$, *nous nous rendrons compte a posteriori que ce choix est judicieux.*

1.2 Étude de cas élémentaires : des conditions globales

Nous construisons à présent de façon explicite ces opérateurs qui assurent la T-coercivité. Nous travaillons d'abord sur une série de géométries particulières. Dans un second temps, (voir §1.3), nous nous servirons de ces cas particuliers pour traiter des géométries plus générales. Rappelons que nous souhaitons obtenir un critère sur les valeurs de σ pour assurer que A est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

1.2.1 Domaine symétrique

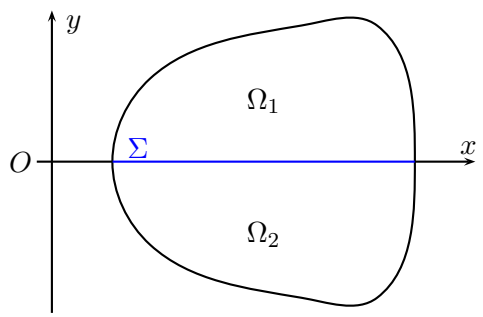


FIGURE 1.1 – Une géométrie symétrique.

Soit Ω un domaine *symétrique*, au sens où Ω_1 est l'image de Ω_2 par une symétrie. Sans perte de généralité et pour fixer les idées, nous supposerons que l'interface Σ est un sous-ensemble de la droite d'équation $y = 0$ (cf. Figure 1.1). Dans ce cas, nous pouvons prouver le

Théorème 1.2.1 (DOMAINE SYMÉTRIQUE) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > 1.$$

Alors, il existe un isomorphisme $\mathtt{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ *tel que la forme a soit* $\mathtt{T}$*-coercive. Par conséquent,* $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Considérons les opérateurs R_1 et R_2 définis respectivement par $(R_1u_1)(x,y) = u_1(x,-y)$ et $(R_2u_2)(x,y) = u_2(x,-y)$. Clairement, on a la condition de raccord $(R_ku_k)|_\Sigma = u_k|_\Sigma$ pour tout $u_k \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ et donc $R_k \in \mathcal{R}_k$, $k = 1,2$. De plus, $\|R_k\| = 1$, pour $k = 1,2$. La conclusion est alors apportée par le Théorème 1.1.1. ■

Remarque 1.2.2 *Dans le cas où σ_1 et σ_2 sont des constantes, le Théorème 1.2.1 indique que A est un isomorphisme dès lors que le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ n'est pas égal à -1.*

1.2.2 Sommet intérieur

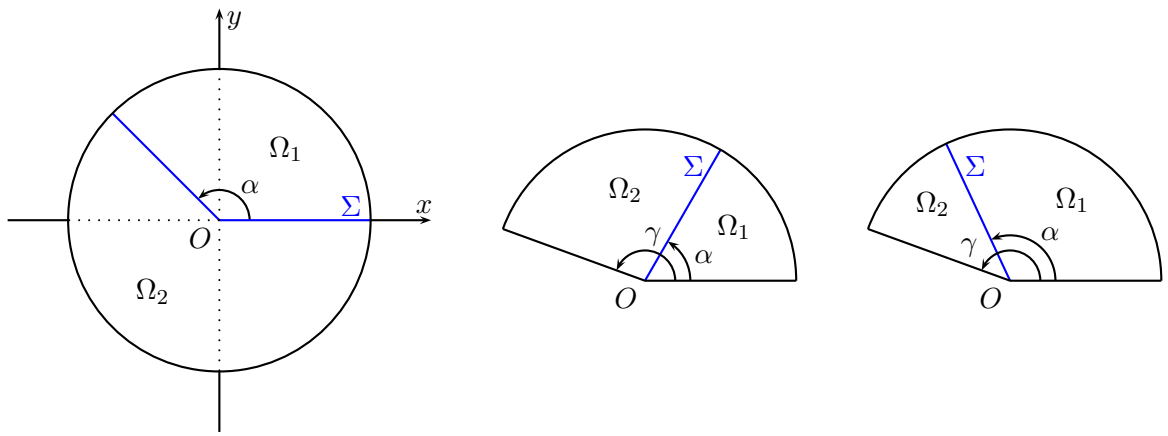


FIGURE 1.2 – Géométrie du sommet intérieur (à gauche). Géométrie du sommet extérieur (au milieu, à droite).

Considérons la géométrie de la Figure 1.2, à gauche. Plus précisément, notons (r,θ) les coordonnées polaires centrées en O avec $\theta = 0$ sur la demi-droite (Ox) (pour les x positifs). Étant donnés $R > 0$ et $\alpha \in]0; 2\pi[$, définissons

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha\}\ ;\\ \Omega_2 &:= \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < 2\pi\}\,.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 (SOMMET INTÉRIEUR) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > I_\alpha, \qquad \textit{avec} \qquad I_\alpha := \max(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}, \frac{\alpha}{2\pi-\alpha}).$$

Alors, il existe un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ tel que la forme a soit $\mathcal{T}$-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Nous utilisons la même notation pour les fonctions exprimées en coordonnées cartésiennes ou polaires. Considérons les opérateurs R_1 et R_2 définis respectivement par $(R_1u_1)(\rho,\Theta) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta-2\pi))$ et $(R_2u_2)(\rho,\Theta) = u_2(\rho, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Theta + 2\pi)$. Par construction, on a les conditions de raccord $(R_1u_1)(\rho,\alpha) = u_1(\rho,\alpha)$ et $(R_1u_1)(\rho,2\pi) = u_1(\rho,0)$, pour tout $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. À présent, calculons la norme de R_1. Pour cela, donnons-nous $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. En effectuant le changement de variables $(r,\theta) = (\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta-2\pi))$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla(R_1u_1)\|^2_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\Theta}\right)^2 \rho d\rho d\Theta\\ &\le \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 r dr d\theta + \frac{\alpha}{2\pi-\alpha}\int_{\Omega_1}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 r dr d\theta\\ &\le I_\alpha\ \|\nabla u_1\|^2_{\Omega_1}\ ;\\ \text{donc } \|R_1\|^2 &\le I_\alpha.\end{aligned}$$

De façon similaire, les conditions de raccord sur l'interface sont vérifiées pour R_2. De plus, $\|R_2\|^2 \leq I_\alpha$.
Le Théorème 1.1.1 permet alors de conclure. ■

Remarque 1.2.4 *On a toujours $-1 \in [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$. D'autre part, si $\alpha = \pi$, cet intervalle se réduit à $\{-1\}$, ce qui est consistant avec le résultat que nous avons obtenu pour la géométrie symétrique (voir le §1.2.1).*

Remarque 1.2.5 *Lorsque σ_1 et σ_2 sont des constantes, le Théorème 1.2.3 indique que A est un isomorphisme lorsque $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$. Par exemple, si $\alpha = \pi/2$, on a $[-I_\alpha; -1/I_\alpha] = [-3; -1/3]$. Dans ce cas, étant donné $\kappa_\sigma \in]-\infty; -3[\cup]-1/3; 0[$, nous savons que A est un isomorphisme.*

Remarque 1.2.6 *Plus généralement, nous pourrions considérer un opérateur $R_1^\dagger$ défini par $(R_1^\dagger u_1)(\rho, \Theta) = u_1(\rho, g_1(\Theta))$ où g_1 est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $[\alpha; 2\pi]$ dans $[0; \alpha]$ tel que $g_1(2\pi) = 0$ et $g_1(\alpha) = \alpha$. On obtient alors $\|R_1^\dagger\|^2 = \max(\|g_1'\|_{\mathrm{L}^\infty([\alpha;\pi])}, \|1/(g_1')\|_{\mathrm{L}^\infty([\alpha;\pi])})$. Avec le théorème des accroissements finis, on déduit qu'on a toujours $\|R_1^\dagger\|^2 \geq I_\alpha$. Ainsi, notre choix $g_1(\Theta) = \frac{\alpha}{\alpha - 2\pi}(\Theta - 2\pi)$ est optimal pour cette configuration. Ce ne sera pas toujours le cas en 3D (voir le §1.6.4).*

1.2.3 Sommet extérieur

Réintroduisons les coordonnées polaires (r, θ) comme dans le paragraphe précédent. Étant données trois constantes R, α, γ avec $R > 0$ et $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$, définissons :

$$\Omega_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha\}\ ;$$
$$\Omega_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < \gamma\}\,.$$

Théorème 1.2.7 *(SOMMET EXTÉRIEUR) Supposons*

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 \quad ou \quad \sigma_2^-/\sigma_1^+ > \dfrac{\gamma - \alpha}{\alpha} & si \quad \alpha \leq \gamma/2\,; \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 \quad ou \quad \sigma_1^-/\sigma_2^+ > \dfrac{\gamma - \alpha}{\alpha} & si \quad \alpha \geq \gamma/2. \end{cases}$$

Alors, il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que la forme a soit T-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Intéressons-nous d'abord au cas $\alpha \leq \gamma/2$ (Figure 1.2, au milieu). Introduisons les opérateurs R_1 et R_2 définis respectivement par

$$(R_1 u_1)(\rho, \Theta) = \begin{cases} u_1(\rho, 2\alpha - \Theta) & \text{si } \Theta \leq 2\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad (R_2 u_2)(\rho, \Theta) = u_2(\rho, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\Theta + \gamma)\,.$$

Pour obtenir le résultat de ce théorème, on travaille avec R_1 comme dans le Théorème 1.2.1, et avec R_2 comme dans le Théorème 1.2.3.
Pour traiter le cas $\alpha \geq \gamma/2$ (Figure 1.2, à droite), il suffit d'inverser le rôle de Ω_1 et Ω_2. ■

Remarque 1.2.8 *Lorsque $\alpha = \gamma/2$, nous retrouvons le résultat des domaines symétriques (cf. Théorème 1.2.1).*

Remarque 1.2.9 *Lorsque σ_1 et σ_2 sont des constantes, par exemple pour $\gamma = \pi$ et $\alpha = \pi/4$, le résultat précédent indique que A est un isomorphisme, dès que $\kappa_\sigma \in]-\infty; -3[\cup]-1; 0[$.*

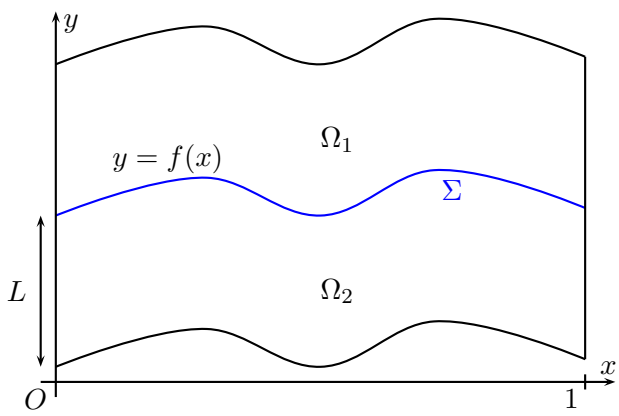


FIGURE 1.3 – Géométrie d'une interface de classe $\mathscr{C}^1$.

1.2.4 Interface de classe $\mathscr{C}^1$

Terminons ce tour d'horizon des géométries particulières 2D par l'étude du cas où l'interface Σ est régulière mais non nécessairement égale à un segment de droite. Considérons g une fonction à valeurs réelles appartenant à $\mathscr{C}^1([0;1])$, et $L > 0$ une constante. Définissons (voir la Figure 1.3)

$$\begin{array}{lcl} \Omega & := & \{(x,y)\,|\,0 < x < 1,\ g(x) - L < y < g(x) + L\}\ ; \\ \Omega_1 & := & \{(x,y)\,|\,0 < x < 1,\ g(x) < y < g(x) + L\}\ ; \\ \Omega_2 & := & \{(x,y)\,|\,0 < x < 1,\ g(x) - L < y < g(x)\}\ . \end{array}$$

Théorème 1.2.10 *Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > (1 + 2\,\|g'\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + 4\,\|g'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)}).$$

Alors, il existe un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ tel que la forme a soit $\mathcal{T}$-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Définissons les opérateurs R_1 et R_2 respectivement par $(R_1u_1)(s,t) = u_1(s, 2g(s) - t)$ et $(R_2u_2)(s,t) = u_2(s, 2g(s) - t)$. Notons que si $(s,t) \in \Sigma$, alors $t = g(s)$ et $(R_1u_1)(s,t) = u_1(s, 2g(s) - t) = u_1(s,t)$, pour tout $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. Ainsi, nous avons bien $R_1 \in \mathcal{R}_1$. Déterminons ensuite une borne supérieure pour la norme de R_1. Pour $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$, en utilisant le changement de variables $(x,y) = (s, 2g(s) - t)$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \|\nabla(R_1u_1)\|^2_{\Omega_2} & = & \displaystyle\int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial t}\right)^2 dsdt \\ & \leq & \displaystyle\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + 2g'(x)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dxdy \\ & \leq & \displaystyle\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + 4\,|g'(x)|\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| + 4\,|g'(x)|^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dxdy \\ & \leq & (1 + 2\,\|g'\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + 4\,\|g'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)})\,\|\nabla u_1\|^2_{\Omega_1}\ . \end{array}$$

Il suit $\|R_1\|^2 \leq (1 + 2\,\|g'\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + 4\,\|g'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)})$.
En inversant les rôles de Ω_1 et Ω_2, on observe que la condition de raccord à l'interface est également vérifiée par R_2. De plus, on a $\|R_2\|^2 \leq (1 + 2\,\|g'\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + 4\,\|g'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)})$.
Encore une fois, on peut alors conclure en utilisant le Théorème 1.1.1. ■

Remarque 1.2.11 *Dans le cas particulier où g' est uniformément égal à 0, le domaine Ω est symétrique par rapport à l'interface et l'on retrouve le résultat du Théorème 1.2.1.*

Remarque 1.2.12 *Dans la suite, le Théorème 1.2.10 apparaîtra uniquement comme un outil pour démontrer le résultat plus général concernant les interfaces quelconques. La version que nous avons proposée sera suffisante pour nos besoins et c'est pourquoi nous n'avons pas cherché à affiner la condition sur le contraste.*

1.3 Étude pour une interface quelconque par un procédé de localisation

Nous dirons que le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé au sens de Fredholm lorsque l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ est Fredholm d'indice 0. Pour faciliter la lecture, et puisque c'est la première fois que nous rencontrons cette notion dans ce document, rappelons la définition d'un opérateur de type Fredholm ou opérateur à indice (voir notamment [98, 151, 116]).

Définition 1.3.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach, et B un opérateur de $\mathcal{L}(X, Y)$. L'opérateur B est de type Fredholm si*

i) $\dim\ker B < \infty$, $\operatorname{im} B$ *est fermée.*
ii) $\dim\operatorname{coker} B < \infty$, *où* $\operatorname{coker} B := Y/\operatorname{im} B$.

Lorsque B est un opérateur de type Fredholm, son indice est défini par $\operatorname{ind} B := \dim\ker B - \dim\operatorname{coker} B$.

Pour énoncer et démontrer notre résultat, nous avons besoin de décrire précisément la géométrie du domaine. C'est ce que nous allons faire maintenant.

1.3.1 Description de la géométrie

Nous rappelons que Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, un sous-ensemble ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne. Nous supposons Ω divisé en deux ouverts Ω_1 et Ω_2 avec $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Nous faisons l'hypothèse que Ω_1 et Ω_2 sont à frontière lipschitzienne. Nous avons introduit $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_1$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_2$ et défini l'interface $\Sigma = \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 = \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2$. On a alors $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \overline{\Sigma}$. Notons $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal à Σ, dirigé de Ω_1 vers Ω_2. Ci-dessous, nous nous intéressons plus particulièrement à la géométrie de l'interface :

- L'interface Σ est de classe $\mathscr{C}^1$, mis à part en un nombre fini de *sommets intérieurs* $\mathcal{S}_{int} = \{\boldsymbol{x}^i,\ 1 \le i \le N_{int}\}$. Pour $1 \le i \le N_{int}$, les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 coïncident avec des cônes dans un voisinage $\mathcal{V}^i$ de $\boldsymbol{x}^i$:

$$\begin{aligned} &\Omega_1 \cap \mathcal{V}^i = \mathcal{K}_1(\boldsymbol{x}^i) \cap \mathcal{V}^i \ \text{ et } \ \Omega_2 \cap \mathcal{V}^i = \mathcal{K}_2(\boldsymbol{x}^i) \cap \mathcal{V}^i, \\ &\text{où } \mathcal{K}_1(\boldsymbol{x}^i) \text{ et } \mathcal{K}_2(\boldsymbol{x}^i) \text{ sont des cônes ouverts centrés en } \boldsymbol{x}^i. \end{aligned} \tag{1.4}$$

- Il y a exactement 0 ou 2 points limites, appelés *sommets extérieurs* : $\mathcal{S}_{ext} := \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega = \{\boldsymbol{x}^i,\ N_{int}+1 \le i \le N_{int}+N_{ext}\}$, avec $N_{ext} \in \{0, 2\}$. Et pour $N_{int}+1 \le i \le N_{int}+N_{ext}$, les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 coïncident avec des cônes ouverts dans un voisinage $\mathcal{V}^i$ de $\boldsymbol{x}^i$: *i.e.*, (1.4) est vérifié.

Pour chaque indice i, nous introduisons l'ouverture $\alpha^i_k \in]0; 2\pi[$ des cônes $\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i)$, $k = 1, 2$. Nous définissons $\gamma^i := \alpha^i_1 + \alpha^i_2$ et $\alpha^i := \min(\alpha^i_1, \alpha^i_2)$. Bien entendu, on a $\gamma^i = 2\pi$ pour les sommets intérieurs, et $\gamma^i < 2\pi$ pour les sommets extérieurs. D'autre part, au niveau d'un sommet intérieur $\boldsymbol{x}^i$, Σ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$, donc $0 < \alpha^i < \pi$.

Nous notons (r^i, θ^i) les coordonnées polaires centrées en $\boldsymbol{x}^i$ où le paramètre angulaire θ^i est tel que

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(\boldsymbol{x}^i) \text{ est isométrique à } \left\{(r^i\cos\theta^i, r^i\sin\theta^i) \,|\, r^i > 0,\ 0 < \theta^i < \alpha^i_1\right\}; \\ &\mathcal{K}_2(\boldsymbol{x}^i) \text{ est isométrique à } \left\{(r^i\cos\theta^i, r^i\sin\theta^i) \,|\, r^i > 0,\ \alpha^i_1 < \theta^i < \gamma^i\right\}. \end{aligned}$$

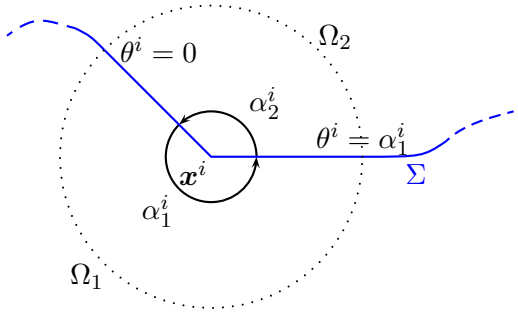


FIGURE 1.4 – Notations pour $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int}$ - $\alpha^i = \alpha_2^i$.

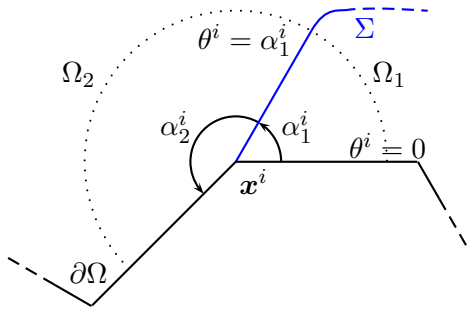


FIGURE 1.5 – Notations pour $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}$ - $\alpha^i = \alpha_1^i$.

Définissons $\mathcal{S}_{ext}^1 := \{\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext} \,|\, \alpha_1^i \leq \alpha_2^i\}$, $\mathcal{S}_{ext}^2 := \{\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext} \,|\, \alpha_2^i < \alpha_1^i\}$ et $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$. Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}$ est noté N.

Enfin, introduisons

$$I_{\alpha^i} := \frac{\gamma^i - \alpha^i}{\alpha^i} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq i \leq N.$$

Remarque 1.3.2 *Pour tout sommet intérieur, on a $I_{\alpha^i} > 1$. Ceci est également vrai pour les sommets extérieurs appartenant à $\mathcal{S}_{ext}^2$. Par contre, pour un sommet extérieur de $\mathcal{S}_{ext}^1$, on a seulement $I_{\alpha^i} \geq 1$ (il peut arriver que $I_{\alpha^i} = 1$).*

1.3.2 Énoncé du résultat

Nous allons prouver que A est Fredholm d'indice 0, sous certaines hypothèses portant sur la géométrie du domaine et sur σ. Nous noterons $B(\boldsymbol{x}, d)$ la boule ouverte centrée en $\boldsymbol{x}$ et de rayon d.

Théorème 1.3.3 *Supposons que l'une des deux hypothèses, 1. ou 2., ci-dessous, soit vérifiée.*

$$1. \quad \left| \begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma \backslash \mathcal{S} \text{ (partie régulière de l'interface)} : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x},d)\cap\Omega_1} \sigma_1 > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x},d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2 : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_1} \sigma_1 > I_{\alpha^i} \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^1 : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_1} \sigma_1 > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| \end{array} \right. ;$$

$$2. \quad \left| \begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma \backslash \mathcal{S} \text{ (partie régulière de l'interface)} : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x},d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x},d)\cap\Omega_1} \sigma_1 \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1 : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > I_{\alpha^i} \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_1} \sigma_1 \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^2 : \exists d > 0, \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d)\cap\Omega_1} \sigma_1 \end{array} \right. .$$

Alors, l'opérateur $A : u \mapsto -div(\sigma \nabla u)$ de $\mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ est Fredholm d'indice 0.

Remarque 1.3.4 *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.3, A est injectif si et seulement si A est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Toujours sous l'hypothèse du Théorème 1.3.3, lorsque A n'est pas injectif, et il existe de telles situations (cf. Chapitre 2, §2.2.2), $\ker A$ est de dimension finie : $\ker A = vect(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, pour $p \geq 1$. Dans ce cas, le problème $(\mathscr{P})$ possède une solution (unique à une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ près) si, et seulement si le terme source satisfait les conditions de compatibilité $\langle f, \varphi_k \rangle_\Omega = 0$ pour $k = 1 \ldots p$ (voir, classiquement, [116, théorème 2.27]).*

La localisation constitue une démarche classique dans la théorie des équations elliptiques. Pour notre problème, bien que l'opérateur A ne soit pas elliptique, nous allons pouvoir mettre en œuvre ce procédé grâce à la T-coercivité qui permet de retrouver une certaine ellipticité. Nous suivrons la méthode présentée dans [109, chapitre 2, §5] (voir également [102, §6.3] ou [119, §4.1.2]). Nous diviserons notre travail en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous introduirons une partition de l'unité adaptée à la géométrie du domaine, et notamment à celle de l'interface. Puis, nous établirons une estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathscr{P})$. Pour ce faire, nous utiliserons les résultats obtenus dans la section précédente pour les géométries particulières. Enfin, nous conclurons grâce à un lemme classique dû à Peetre.

1.3.3 Construction de la partition de l'unité

Soit $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}$. D'après l'une des deux hypothèses (cas 1. ou cas 2.) du Théorème 1.3.3, il existe $d^i > 0$ tel que $(B(\boldsymbol{x}^i, d^i) \cap \Omega) \subset \mathcal{V}^i$, où $\mathcal{V}^i$ est le voisinage de $\boldsymbol{x}^i$ introduit dans (1.4), et

$$\left.\begin{array}{ll} \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_1} \sigma_1 > I_{\alpha^i} \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_2} |\sigma_2| & \text{si } \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^2_{ext} \\ \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_1} \sigma_1 > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_2} |\sigma_2| & \text{si } \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^1_{ext} \end{array}\right\} \text{ dans le cas 1. ;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > I_{\alpha^i} \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_1} \sigma_1 & \text{si } \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^1_{ext} \\ \inf\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > \sup\limits_{B(\boldsymbol{x}^i,d^i)\cap\Omega_1} \sigma_1 & \text{si } \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^2_{ext} \end{array}\right\} \text{ dans le cas 2..}$$

Pour $1 \leq i \leq N$, considérons $\zeta^i \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ une fonction de troncature, égale à 1 sur $\overline{B(\boldsymbol{x}^i, d^i/2)} \cap \Omega$, de support inclus dans $(B(\boldsymbol{x}^i, d^i) \cap \Omega) \subset \mathcal{V}^i$, et telle que ζ^i ne dépende que de la coordonnée radiale r^i.

Définissons ensuite $\Sigma_r := \Sigma \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{B(\boldsymbol{x}^i, d^i/2)}$, et considérons $\boldsymbol{x} \in \overline{\Sigma_r}$. D'après l'hypothèse sur la partie régulière de Σ, il existe $d^{\boldsymbol{x}} > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, d^{\boldsymbol{x}}) \subset \Omega \backslash \mathcal{S}$, et

$$\inf_{B(\boldsymbol{x},d^{\boldsymbol{x}})\cap\Omega_1} \sigma_1 > \sup_{B(\boldsymbol{x},d^{\boldsymbol{x}})\cap\Omega_2} |\sigma_2| \qquad \text{ou} \qquad \inf_{B(\boldsymbol{x},d^{\boldsymbol{x}})\cap\Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(\boldsymbol{x},d^{\boldsymbol{x}})\cap\Omega_1} \sigma_1. \tag{1.5}$$

D'autre part, puisque Σ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, elle coïncide localement avec le graphe d'une fonction $f^{\boldsymbol{x}}$ de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ (voir l'annexe C de [78]). Soit $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{x} = (s_0, f^{\boldsymbol{x}}(s_0))$. À une rotation du système de coordonnées près, on peut supposer que $f^{\boldsymbol{x}\prime}(s_0) = 0$.
Considérons ensuite trois nombres réels $a^{\boldsymbol{x}}$, $b^{\boldsymbol{x}}$ et $\delta^{\boldsymbol{x}} > 0$ tels que l'ensemble

$$\Omega^{\boldsymbol{x}} := \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^{\boldsymbol{x}} < s < b^{\boldsymbol{x}},\ f^{\boldsymbol{x}}(s) - \delta^{\boldsymbol{x}} < t < f^{\boldsymbol{x}}(s) + \delta^{\boldsymbol{x}}\right\} \tag{1.6}$$

soit inclus dans $B(\boldsymbol{x}, d^{\boldsymbol{x}})$, et tels que $a^{\boldsymbol{x}} < s_0 < b^{\boldsymbol{x}}$ (de sorte que $\boldsymbol{x}$ appartient à $\Omega^{\boldsymbol{x}}$). On peut choisir le système de coordonnées pour que $\Omega^{\boldsymbol{x}} \cap \Omega_1$ et $\Omega^{\boldsymbol{x}} \cap \Omega_2$ coïncident respectivement avec $\Omega^{\boldsymbol{x}}_1$ et $\Omega^{\boldsymbol{x}}_2$ définis par

$$\begin{aligned} \Omega^{\boldsymbol{x}}_1 &:= \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^{\boldsymbol{x}} < s < b^{\boldsymbol{x}},\ f^{\boldsymbol{x}}(s) < t < f^{\boldsymbol{x}}(s) + \delta^{\boldsymbol{x}}\right\} ; \\ \Omega^{\boldsymbol{x}}_2 &:= \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^{\boldsymbol{x}} < s < b^{\boldsymbol{x}},\ f^{\boldsymbol{x}}(s) - \delta^{\boldsymbol{x}} < t < f^{\boldsymbol{x}}(s)\right\}. \end{aligned}$$

Mais puisque $f^{\boldsymbol{x}\prime}$ est continue en $s = s_0$ et s'y annule, d'après (1.5), on peut prendre $a^{\boldsymbol{x}}$ et $b^{\boldsymbol{x}}$ suffisamment proches de s_0 pour avoir

$$\begin{aligned} &\inf_{\Omega^{\boldsymbol{x}}_1} \sigma_1 > \sup_{\Omega^{\boldsymbol{x}}_2} |\sigma_2| \left(1 + 2\,\|f'\|_{\mathrm{L}^\infty(]a^{\boldsymbol{x}};b^{\boldsymbol{x}}[)} + 4\,\|f'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(]a^{\boldsymbol{x}};b^{\boldsymbol{x}}[)}\right) \\ \text{ou} \quad &\inf_{\Omega^{\boldsymbol{x}}_2} |\sigma_2| > \sup_{\Omega^{\boldsymbol{x}}_1} \sigma_1 \left(1 + 2\,\|f'\|_{\mathrm{L}^\infty(]a^{\boldsymbol{x}};b^{\boldsymbol{x}}[)} + 4\,\|f'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(]a^{\boldsymbol{x}};b^{\boldsymbol{x}}[)}\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

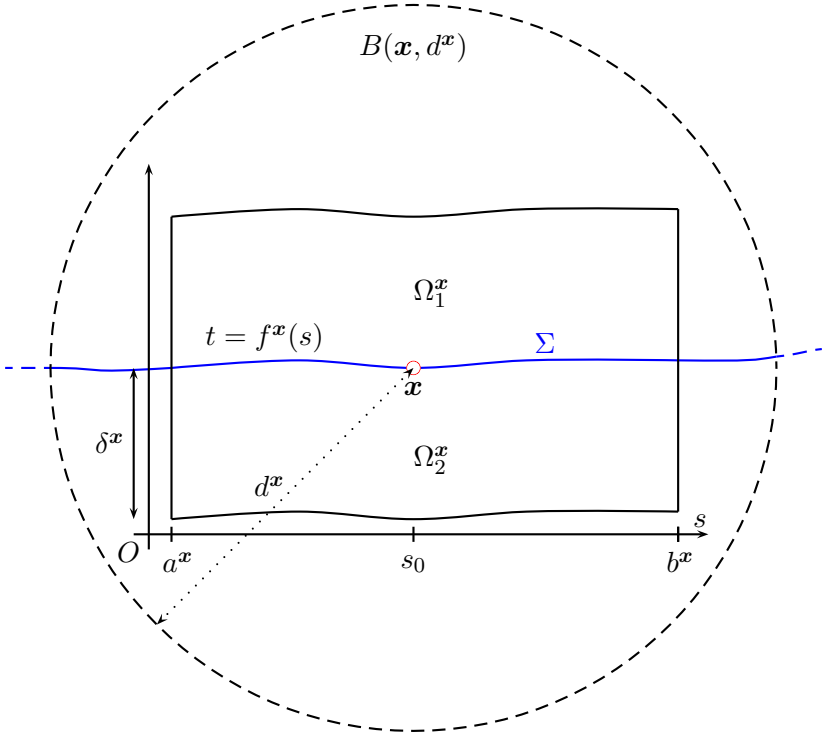


FIGURE 1.6 – Situation dans un voisinage de $\boldsymbol{x}$.

Définissons alors

$$\tilde{\Omega}^{\boldsymbol{x}} := \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^{\boldsymbol{x}} + (s_0 - a^{\boldsymbol{x}})/2 < s < b^{\boldsymbol{x}} - (b^{\boldsymbol{x}} - s_0)/2,\ f^{\boldsymbol{x}}(s) - \delta^{\boldsymbol{x}}/2 < t < f^{\boldsymbol{x}}(s) + \delta^{\boldsymbol{x}}/2\right\}.$$

Par construction, $\tilde{\Omega}^{\boldsymbol{x}}$ est un voisinage de $\boldsymbol{x}$, et $\tilde{\Omega}^{\boldsymbol{x}} \subset \Omega^{\boldsymbol{x}}$.

L'ensemble $\overline{\Sigma_r}$ est compact, donc on peut extraire de l'ensemble $(\tilde{\Omega}^{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Sigma_r}}$ un sous-ensemble fini, noté $(\tilde{\mathcal{O}}^i)_{i=1}^{N_\Sigma}$, dont l'union constitue un recouvrement de $\overline{\Sigma_r}$. Pour $1 \leq i \leq N_\Sigma$, nous notons $\mathcal{O}^i$ l'ouvert $\Omega^{\boldsymbol{x}}$ associé à $\tilde{\Omega}^{\boldsymbol{x}} = \tilde{\mathcal{O}}^i$. Il est alors possible d'introduire un ouvert borné $\mathcal{O}^0$ (de $\mathbb{R}^2$) qui ne rencontre pas Σ, et tel que

$$\Omega \subset \left(\mathcal{O}^0 \cup (\bigcup_{i=1}^{N_\Sigma} \tilde{\mathcal{O}}^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{N} B(\boldsymbol{x}^i, d^i/2))\right).$$

Considérons ensuite
- une fonction $\chi^0 \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$, égale à 1 dans $\mathcal{O}^0$, dont le support n'intersecte pas $\overline{\Sigma}$;
- pour $1 \leq i \leq N_\Sigma$, une fonction $\chi^i \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$, égale à 1 dans $\tilde{\mathcal{O}}^i$, dont le support est inclus dans $\mathcal{O}^i$.

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$, on a

$$\sum_{i=0}^{N_\Sigma} \chi^i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{N} \zeta^i(\boldsymbol{x}) \geq 1.$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$, il existe un indice i_0 tel que $\chi^{i_0}(\boldsymbol{x}) = 1$ ou $\zeta^{i_0}(\boldsymbol{x}) = 1$.

Le décor étant planté, nous pouvons commencer la démonstration de l'estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathscr{P})$. Ce sera l'étape clé de la preuve du Théorème 1.3.3.

1.3.4 Une estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathscr{P})$

Pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, définissons $f := Au = -\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Prouvons qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, telle que

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,\left(\|Au\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} + \|u\|_\Omega\right). \tag{1.8}$$

Pour $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$, définissons $supp^1\chi := \left\{\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}\,|\,\chi(\boldsymbol{x}) = 1\right\}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} &\leq \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(supp^1\chi^0)} + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(supp^1\chi^i)} + \sum_{i=1}^{N} \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(supp^1\zeta^i)} \\ &\leq \|\chi^0 u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \left\|\chi^i u\right\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\zeta^i u\right\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Estimons chacun des trois termes du membre de droite de (1.9).
Le support de $\chi^0 u$ ne rencontre par l'interface. Le terme $\|\chi^0 u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$ est donc relativement simple à traiter car l'opérateur A est « localement elliptique » de part et d'autre de l'interface. Nous pouvons ainsi écrire

$$\begin{aligned} &\left\|\chi^0 u\right\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \\ \leq\ & C\,(|\sigma|\nabla(\chi^0 u), \nabla(\chi^0 u))_\Omega \\ \leq\ & C\,\Big(\,|(|\sigma|\,u\nabla\chi^0, \nabla(\chi^0 u))_\Omega| + |(|\sigma|\nabla u, \nabla((\chi^0)^2 u))_\Omega| + |(|\sigma|\nabla u, \chi^0 u\nabla\chi^0)_\Omega|\,\Big) \\ \leq\ & C\,\Big(\,\|u\|_\Omega\,\|\chi^0 u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}\,\|(\chi^0)^2 u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\,\|u\|_\Omega\,\Big) \\ \leq\ & C\,\left(\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_\Omega\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Pour traiter les termes $\|\chi^i u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$, $i = 1 \ldots N_\Sigma$, nous allons utiliser les opérateurs de T-coercivité de la section précédente. Suivant l'hypothèse que nous souhaitons traiter, cas 1. ou cas 2., définissons $\mathtt{T} := \mathtt{T}_1$ ou $\mathtt{T} := \mathtt{T}_2$, où $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ sont les opérateurs utilisés dans la preuve du Théorème 1.2.10. Dans cette dernière preuve, nous ne travaillons que sur R_1 et R_2, mais le lecteur doit se souvenir que $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ sont définis par (1.2) et (1.3). D'autre part, ici, il faut considérer $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ comme des éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O}^i))$. On trouve

$$\begin{aligned} &\left\|\chi^i u\right\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \\ \leq\ & C\,|(\sigma\nabla(\chi^i u), \nabla(\mathtt{T}(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i}| \\ \leq\ & C\,\Big(\,|(\sigma\,u\nabla\chi^i, \nabla(\mathtt{T}(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i}| + |(\sigma\,\nabla u, \nabla(\chi^i \mathtt{T}(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i}| + |(\sigma\nabla u, \mathtt{T}(\chi^i u)\nabla\chi^i)_{\mathcal{O}^i}|\,\Big) \\ \leq\ & C\,\left(\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_\Omega\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous nous sommes servis du fait que l'opérateur $\mathtt{T}$ constitue également un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}^i))$.

On travaille de la même façon pour traiter les termes $\|\zeta^i u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$, $i = 1 \ldots N$. Cette fois, on utilise $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ définis dans les preuves des Théorèmes 1.2.3 et 1.2.7, en les considérant comme des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(B(\boldsymbol{x}^i, d^i) \cap \Omega))) \cap \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(B(\boldsymbol{x}^i, d^i) \cap \Omega)))$. On obtient

$$\left\|\zeta^i u\right\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,\left(\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_\Omega\,\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\right). \tag{1.12}$$

Finalement, en regroupant les estimations (1.9), (1.10), (1.11) et (1.12), on aboutit à l'estimation *a priori* (1.8).

1.3.5 Conclusion

Rappelons un lemme classique dû à J. Peetre [133] (voir également le lemme 5.1 de [109, Ch. 2], ou le lemme 3.4.1 de [102]).

Lemme 1.3.5 *Soient* X, Y *et* Z *trois espaces de Banach réflexifs, tels que* X *s'injecte de façon compacte dans* Z. *Soit* $B \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\dim\ker B < \infty$, *et* $\operatorname{im} B$ *est fermée dans* Y *;*

ii) il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|x\|_{\mathrm{X}} \leq C\left(\|B\,x\|_{\mathrm{Y}} + \|x\|_{\mathrm{Z}}\right), \qquad \forall x \in \mathrm{X}.$$

Pour notre problème, d'après le théorème de Rellich, $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, car Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Avec le Lemme 1.3.5, on déduit que A a un noyau de dimension finie et est à image fermée dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Puisque la forme a est symétrique, le théorème 2.13 de [116] indique que $\operatorname{coker} A$ est isomorphe à $\ker A$. Par conséquent, $\operatorname{coker} A$ est également de dimension finie et $\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A = 0$. Ceci termine la preuve du Théorème 1.3.3.

1.4 Applications

1.4.1 Coefficients réguliers par morceaux

Dans le cas où $\sigma_k \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega_k})$, $k = 1, 2$, l'énoncé du Théorème 1.3.3 se simplifie quelque peu. Le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ peut être considéré comme un élément de $\mathscr{C}^0(\overline{\Sigma})$.

Théorème 1.4.1 (COEFFICIENTS CONTINUS) *Supposons que l'on ait*

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma\backslash\mathcal{S}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) < -1 \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^2_{ext}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) < -I_{\alpha^i}, \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^1_{ext}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) < -1 \end{cases} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{cases} \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma\backslash\mathcal{S}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) > -1 \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^1_{ext}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) > -1/I_{\alpha^i} \\ \forall \boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^2_{ext}, & \kappa_\sigma(\boldsymbol{x}) > -1 \end{cases}.$$

Alors, l'opérateur $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ *de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ *est Fredholm d'indice* 0.

1.4.2 Coefficients constants par morceaux

Lorsque σ_1 et σ_2 sont des constantes, définissons

$$\hat{R}_\Sigma := \max\left(\max_{\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^1_{ext}} I_{\alpha^i}, 1\right), \qquad \check{R}_\Sigma := \max\left(\max_{\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}^2_{ext}} I_{\alpha^i}, 1\right).$$

On a le

Théorème 1.4.2 (COEFFICIENTS CONSTANTS) *Supposons* $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}^*_-\backslash\left[-\hat{R}_\Sigma; -1/\check{R}_\Sigma\right]$. *Alors, l'opérateur* $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ *de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ *est Fredholm d'indice* 0.

Remarque 1.4.3 *Avec le théorème de Lax-Milgram, on prouve facilement que l'opérateur* A *est un isomorphisme de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ *lorsque* $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. *On déduit que lorsque* $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\left[-\hat{R}_\Sigma; -1/\check{R}_\Sigma\right]$, *l'opérateur* A *est Fredholm d'indice* 0.

Nous donnons quelques illustrations de ces résultats sur les Figures 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 et 1.14.

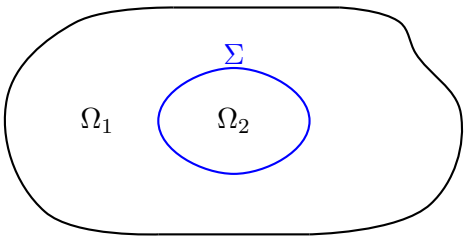


FIGURE 1.7 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$.

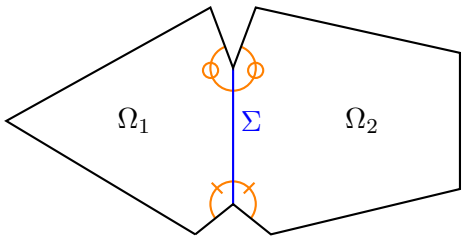


FIGURE 1.8 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$.

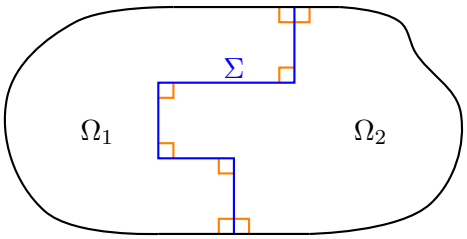


FIGURE 1.9 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$.

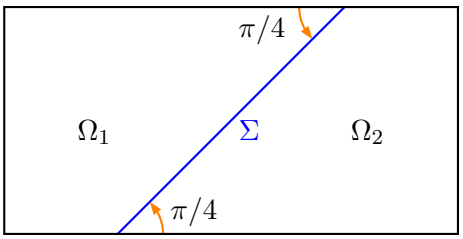


FIGURE 1.10 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$.

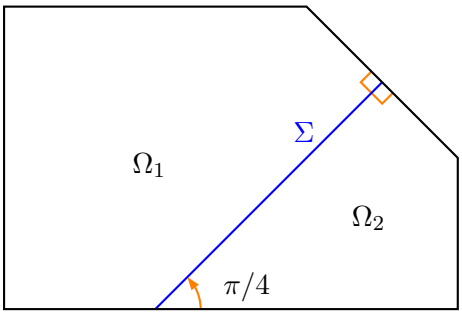


FIGURE 1.11 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-1; -1/3]$.

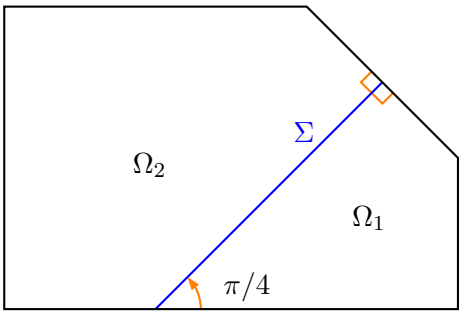


FIGURE 1.12 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1]$.

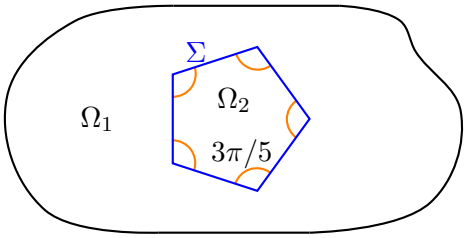


FIGURE 1.13 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-7/3; -3/7]$.

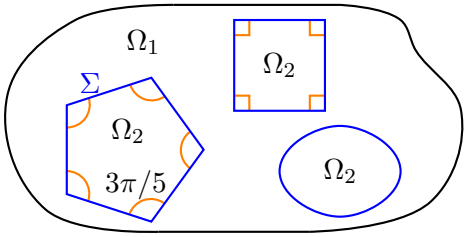


FIGURE 1.14 – A est Fredholm d'indice 0 lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$.

1.5 Discussion sur les hypothèses portant sur σ

Dans cette section, nous établissons des résultats sur l'opérateur $A : u \mapsto -\mathrm{div}(\sigma \nabla u)$ appartenant à $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$, lorsque σ ne satisfait pas les hypothèses du Théorème 1.3.3. Nous prenons σ_1 et σ_2 constants et nous définissons donc le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. Nous montrons que si l'interface présente une portion droite au voisinage de laquelle le contraste est égal à -1, alors l'opérateur A n'est pas de type Fredholm, en raison d'une *distribution de singularités linéique*. En effet, nous prouvons qu'en tout point $\boldsymbol{x}_0$ de la portion droite (ouverte) de Σ, on peut construire une suite de fonctions $(u_n)_n$ pour montrer que A n'est pas un opérateur de type Fredholm (voir le Théorème 1.5.3 ci-dessous). Lorsque $\kappa_\sigma \neq -1$, l'opérateur A peut ne pas être de type Fredholm en raison de *singularités ponctuelles* au niveau des sommets extérieurs ou intérieurs de l'interface. Cette situation se produit lorsque le contraste est situé dans un intervalle, appelé *intervalle critique*, contenant -1 (voir le Théorème 1.5.5 ci-dessous). Dans ce dernier cas, mentionnons ici que le cadre Fredholm peut être recouvré en travaillant dans un autre cadre fonctionnel que H^1 (cf. Chapitre 5). Enfin, nous présentons deux configurations plus exotiques dans le §1.5.4.

1.5.1 Domaine symétrique

Ci-dessous, nous travaillons de nouveau sur le domaine *symétrique* Ω décrit dans le §1.2.1.

Théorème 1.5.1 (DOMAINE SYMÉTRIQUE & COEFFICIENTS CONSTANTS)
- *Si $\kappa_\sigma \neq -1$ alors A est un isomorphisme ;*
- *Si $\kappa_\sigma = -1$ alors A n'est pas un opérateur de type Fredholm (*$\dim \ker A = \infty$*).*

Preuve. Sans perte de généralité, nous supposons que l'interface Σ est contenue dans la droite d'équation $y = 0$ (voir la Figure 1.1).
Le Théorème 1.2.1 prouve que A est un isomorphisme lorsque $\kappa_\sigma \neq -1$.
Maintenant, supposons $\kappa_\sigma = -1$. Nous souhaitons montrer que $\ker A$ est de dimension infinie. Pour ce faire, considérons $g \in \widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(\Sigma)$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma)$ dont le prolongement par 0 à la droite d'équation $y = 0$ appartient à $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbb{R})$. Pour $k = 1, 2$, définissons alors u_k l'unique fonction de $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \Delta u_k & = & 0 & \text{dans } \Omega_k \\ u_k & = & 0 & \text{sur } \Gamma_k \\ u_k & = & g & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. .$$

Par unicité de la solution, on montre que $u_2(x, y) = u_1(x, -y)$ p.p. dans Ω_2. Il suit

$$\sigma_1 \, \partial_{\boldsymbol{n}} u_1 - \sigma_2 \, \partial_{\boldsymbol{n}} u_2 = -\sigma_1 (\partial_y u_1 + \partial_y u_2) = 0 \text{ p.p. sur } \Sigma.$$

L'élément u de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ défini par $u_{|\Omega_k} = u_k$ pour $k = 1, 2$ satisfait $\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = 0$ dans Ω, et donc $Au = 0$. Puisque $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(\Sigma)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, on déduit que $\ker A$ est également un espace vectoriel de dimension infinie. ■

Remarque 1.5.2 *Bien entendu, ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement $\sigma_1 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_1)$ et $\sigma_2(x, y) = -\sigma_1(x, -y)$ pour presque tout $(x, y) \in \Omega_2$.*

1.5.2 Interface localement droite et contraste égal à -1

Ici, Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie les hypothèses du paragraphe §1.3.1.

Théorème 1.5.3 (INTERFACE LOCALEMENT DROITE & COEFFICIENTS CONSTANTS) *Si $\kappa_\sigma = -1$, et s'il existe une partie non vide de l'interface Σ qui est droite, alors l'opérateur A n'est pas de type Fredholm.*

Remarque 1.5.4 *Ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement σ_1 et σ_2 localement constants avec des valeurs opposées dans un voisinage de la partie droite de Σ.*

Preuve. D'après le Lemme 1.3.5, si A est un opérateur de type Fredholm, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|Au\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \right), \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

En nous inspirant du contre exemple d'Hadamard pour prouver que le problème de Cauchy dans le demi-plan n'est pas bien posé, classiquement (voir par exemple [127, 128]), nous allons montrer notre résultat en contredisant (1.13).

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point appartenant à la partie droite (ouverte) de Σ. À une rotation près du système de coordonnées, nous pouvons supposer que Σ est localement incluse dans la droite d'équation $s = 0$, autour de $\boldsymbol{x}_0$. Considérons ensuite $b > 0$ suffisamment petit, de sorte que $D :=]-b; b[\times]-b; b[\subset \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$u_n(s,t) := \begin{cases} \dfrac{\sinh n(b+s) \sin nt}{e^{nb}} & \text{dans } [-b;0] \times [-b;b] \ ; \\ \dfrac{\sinh n(b-s) \sin nt}{e^{nb}} & \text{dans } [0;b] \times [-b;b] \, . \end{cases} \tag{1.14}$$

Soit $\chi_0 \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0;1])$ une fonction de troncature paire, égale à 1 dans un voisinage de 0 et de support inclus dans $]-b;b[$. Définissons $\chi(s,t) := \chi_0(s)\,\chi_0(t)$. Le prolongement de χu_n par 0 à Ω, également noté χu_n, constitue un élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Prouvons l'estimation ci-dessous, avec C indépendant de n :

$$\|A\,(\chi u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} \leq C \left(\|Au_n\|_{\mathrm{H}^{-1}(D)} + \|u_n\|_D \right). \tag{1.15}$$

Rappelons que

$$\|A\,(\chi u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega),\, \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}=1} |(\sigma\,\nabla(\chi u_n), \nabla v)_\Omega|.$$

Pour $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$(\sigma\,\nabla(\chi u_n), \nabla v)_\Omega = (\sigma\,\nabla u_n, \nabla(\chi v))_\Omega + (\sigma\, u_n\,\nabla\chi, \nabla v)_\Omega - (\nabla u_n, \sigma\, v\,\nabla\chi)_\Omega \, . \tag{1.16}$$

Étudions chacun des membres du terme de droite de (1.16) séparément.

– Premier terme :

$$|(\sigma\,\nabla u_n, \nabla(\chi v))_\Omega| \leq C\ \|\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}(D)}\, \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \, . \tag{1.17}$$

– Pour le second terme, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$|(\sigma\, u_n\,\nabla\chi, \nabla v)_\Omega| \leq C\ \|u_n\|_D\, \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \, . \tag{1.18}$$

– En intégrant par parties dans le troisième terme, on obtient :

$$(\nabla u_n, \sigma\, v\,\nabla\chi)_\Omega = (u_n, \mathrm{div}(\sigma\, v\,\nabla\chi))_D. \tag{1.19}$$

Remarquons que $\mathrm{div}(\sigma\, v\,\nabla\chi)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (et donc à $\mathrm{L}^2(D)$), car on a $\sigma\, v\,\nabla\chi|_{\Omega_1} \in \mathrm{H}^1(\Omega_1)$, $\sigma\, v\,\nabla\chi|_{\Omega_2} \in \mathrm{H}^1(\Omega_2)$, et enfin $\partial_{\boldsymbol{n}}\chi = 0$ sur Σ. De plus, $\|\mathrm{div}(\sigma\, v\,\nabla\chi)\|_D \leq C\, \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. Par conséquent, de (1.19), on déduit

$$|(\nabla u_n, \sigma\, v\,\nabla\chi)_\Omega| \ \leq \ C\ \|u_n\|_D\, \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \, . \tag{1.20}$$

On obtient alors (1.15) en utilisant (1.17), (1.18) et (1.20) pour borner le terme de droite de (1.16).

Mais l'on peut vérifier par un calcul direct que $Au_n = 0$ dans D. En effet, sur $]-b;0[\times]-b;b[$ et sur $]0;b[\times]-b;b[$, on a $\Delta u_n = 0$. Sur l'interface, la trace de u_n se raccorde. De plus, puisque u_n est symétrique par rapport à l'interface et que le contraste est égale à -1, la trace normale $\sigma\,\partial_{\boldsymbol{n}} u_n$ se raccorde également.
Remarquons que $\|u_n\|_D \leq 2b\,\|u_n\|_{\mathrm{L}^\infty(D)} < C$, avec C indépendante de n. Par conséquent, d'après (1.15), $(A\,(\chi u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Mais l'on peut vérifier, toujours par le calcul (voir les détails avec le Lemme 1.8.1), que

$$\|\chi u_n\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi (1.13) n'est pas vérifiée. Avec le Lemme 1.3.5, on déduit que A n'est pas de type Fredholm. ■

1.5.3 Critère pour les sommets

Ici, Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie les hypothèses du paragraphe §1.3.1.

Théorème 1.5.5 (SOMMET & COEFFICIENTS CONSTANTS) *Supposons que l'on soit dans l'une des trois configurations suivantes :*

1. *il existe $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int}$ tel que $\kappa_\sigma \in]-I_{\alpha^i};-1/I_{\alpha^i}[$;*
2. *il existe $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^1_{ext}$ tel que $\kappa_\sigma \in]-I_{\alpha^i};-1]$;*
3. *il existe $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}^2_{ext}$ tel que $\kappa_\sigma \in [-1;-1/I_{\alpha^i}[$.*

Alors l'opérateur $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ de $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega),\mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ n'est pas de type Fredholm.

Remarque 1.5.6 *S'il existe $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int}\cup\mathcal{S}^1_{ext}$ tel que $\kappa_\sigma = -I_{\alpha^i}$ ou s'il existe $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int}\cup\mathcal{S}^2_{ext}$ tel que $\kappa_\sigma = -1/I_{\alpha^i}$, une singularité logarithmique apparaît (au lieu d'une singularité en $r^{i\,\eta}$ comme dans la suite). La conjecture est alors que le problème A n'est pas de type Fredholm dans ces cas.*

Preuve. Concentrons-nous sur la preuve du Théorème dans le cas 1.. Dans le reste de la démonstration, nous omettons l'indice ^{i}. Si $\kappa_\sigma = -1$, le Théorème 1.5.3 permet de conclure que A n'est pas de type Fredholm. Maintenant, supposons $\kappa_\sigma \in]-I_{\alpha^i};-1/I_{\alpha^i}[\backslash\{-1\}$: nous montrons dans ce cas que l'estimation (1.13) ne peut être vraie, en utilisant une idée classique de la théorie des opérateurs elliptiques dans des domaines non réguliers (voir par exemple la partie V de la preuve du théorème 1.2 de [119, page 104] ou le lemme 6.3.3 de [102]). Pour un contraste situé dans l'intervalle critique $]-I_{\alpha^i};-1/I_{\alpha^i}[\backslash\{-1\}$, on prouve (utiliser le paragraphe §7.3.3 de [138]) qu'il existe une fonction singulière $S(r,\theta) = r^{i\,\eta}\varphi(\theta)$, avec $\eta \in \mathbb{R}^*$ et φ régulière par morceaux[3], telle que $\mathrm{div}(\sigma\,\nabla S) = 0$. Cette fonction singulière appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ mais pas à $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Introduisons ensuite la fonction de troncature $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$, telle que $\chi(r) = 1$ pour $r < d/2$ et $\chi(r) = 0$ pour $r > d$, avec $d = d^i$ défini dans le paragraphe §1.3.3. Définissons finalement $S_n(r,\theta) := r^{i\,\eta+1/n}\varphi(\theta)$ et $u_n(r,\theta) := \chi(r)S_n(r,\theta)$. Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n appartient à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, et, d'après le lemme 1.8.2,

$$\exists C > 0,\ \forall n,\ \|u_n\|_\Omega < C \qquad \text{et} \qquad \|u_n\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{1.21}$$

Pour contredire l'estimation (1.13), il reste à prouver que la suite $(\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, ce qui est la partie qui nécessite le plus de travail.
Définissons $\mathrm{H}^1_{0\star}(\Omega) := \{u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,|\,u = 0$ dans un voisinage de $\boldsymbol{x}^i\}$. Puisque $\mathrm{H}^1_{0\star}(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (voir le lemme 1.2.2 dans [55]), on a

$$\|\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in\mathrm{H}^1_{0\star}(\Omega),\,\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}=1} |(\sigma\,\nabla u_n,\nabla v)_\Omega|.$$

3. Précisément, on trouve $\varphi|_{\Omega_1} = a_1\,\sinh(\eta\,\theta)+b_1\,\cosh(\eta\,\theta)$ et $\varphi|_{\Omega_2} = a_2\,\sinh(\eta\,\theta)+b_2\,\cosh(\eta\,\theta)$, où les constantes a_1, a_2, b_1, b_2 sont choisies pour assurer les conditions de raccord pour la trace et le flux sur l'interface Σ.

Comme précédemment, écrivons

$$\begin{aligned}(\sigma\,\nabla u_n,\nabla v)_\Omega &= (\sigma\,S_n\nabla\chi,\nabla v)_\Omega-(\nabla S_n,\sigma\,v\,\nabla\chi)_\Omega+(\sigma\,\nabla S_n,\nabla(\chi v))_\Omega\\ &= (\sigma\,S_n\nabla\chi,\nabla v)_\Omega+(S_n,\mathrm{div}(\sigma\,v\,\nabla\chi))_\Omega-(\mathrm{div}(\sigma\,\nabla S_n),\chi v)_\Omega. \qquad (1.22)\end{aligned}$$

Encore une fois, remarquons que $\mathrm{div}(\sigma\,v\,\nabla\chi)$ est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ car on a $\sigma\,v\,\nabla\chi|_{\Omega_1}\in\mathrm{H}^1(\Omega_1)$, $\sigma\,v\,\nabla\chi|_{\Omega_2}\in\mathrm{H}^1(\Omega_2)$ et $\partial_{\boldsymbol{n}}\chi=0$ sur Σ. On vérifie facilement que

$$|(\sigma\,S_n\nabla\chi,\nabla v)_\Omega+(S_n,\mathrm{div}(\sigma\,v\,\nabla\chi))_\Omega|\le C\,\|S_n\|_\Omega\,\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\,. \qquad (1.23)$$

Maintenant, étudions le troisième terme du membre de droite de (1.22). Par un calcul direct, on obtient

$$\mathrm{div}(\sigma\,\nabla S_n)=\sigma\,(2i\,\eta+1/n)\,r^{i\,\eta-2+1/n}\varphi(\theta)/n.$$

En intégrant par parties par rapport à la variable r, on peut écrire

$$\begin{aligned}-(\mathrm{div}(\sigma\,\nabla S_n),\chi v)_\Omega &= -(1/n)\int_0^{2\pi}\int_0^d\sigma\,(2i\,\eta+1/n)\,r^{i\,\eta-2+1/n}\varphi(\theta)\,(\overline{\chi v})\,rdrd\theta\\ &= (1/n)\int_0^{2\pi}\int_0^d\sigma\,(2i\,\eta+1/n)\,\frac{r^{i\,\eta-1+1/n}}{i\,\eta+1/n}\varphi(\theta)\,\frac{\partial(\overline{\chi v})}{\partial r}rdrd\theta.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$|(\sigma\,\nabla S_n,\nabla(\chi v))_\Omega|\le(C/n)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^d|\sigma\,(2i\,\eta+1/n)|^2\,\frac{r^{-2+2/n}}{|i\,\eta+1/n|^2}|\varphi(\theta)|^2\,rdrd\theta\right)^{1/2}\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\,.$$

Mais,

$$(1/n)^2\int_0^{2\pi}\int_0^d|\sigma\,(2i\,\eta+1/n)|^2\,\frac{r^{-2+2/n}}{|i\,\eta+1/n|^2}|\varphi(\theta)|^2\,rdrd\theta\le C\,(1/n)^2\int_0^d r^{-2+2/n}\,rdr\le C/n.$$

Ainsi,

$$|(\sigma\,\nabla S_n,\nabla(\chi v))_\Omega|\le C\,\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}/\sqrt{n}. \qquad (1.24)$$

En injectant (1.23) et (1.24) dans (1.22), on obtient finalement

$$\|\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}\le C\,(\|S_n\|_\Omega+1/\sqrt{n}). \qquad (1.25)$$

Rappelons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, la limite (1.21) et l'inégalité (1.25), ainsi que le Lemme 1.3.5, prouvent que A n'est pas un opérateur de type Fredholm dans le cas où $\kappa_\sigma\in]-I_{\alpha^i};-1/I_{\alpha^i}[\backslash\{-1\}$.
Les cas 2. et 3. du Théorème 1.5.5 se traitent de façon similaire. ■

Remarque 1.5.7 *Faisons écho aux Remarques 1.1.3 et 1.1.4 relatives à l'optimalité de la méthode de la T-coercivité. Considérons le cas du sommet intérieur décrit dans le §1.2.3, avec, pour fixer les idées, $\alpha\in]0;\pi[$. Supposons σ_1 et σ_2 constants. La technique de la T-coercivité permet de montrer que $A:u\mapsto-div(\sigma\,\nabla u)$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ (Théorème 1.2.3) lorsque $\kappa_\sigma\in]-\infty;-(2\pi-\alpha)/\alpha[\cup]-\alpha/(2\pi-\alpha);0[$. D'un autre côté, le Théorème 1.5.5 indique que A n'est pas de type Fredholm lorsque $\kappa_\sigma\in]-(2\pi-\alpha)/\alpha;-\alpha/(2\pi-\alpha)[$. Avec le Théorème 1.1.2, nous déduisons $\inf_{R_1\in\mathcal{R}_1}\|R_1\|^2=\inf_{R_2\in\mathcal{R}_2}\|R_2\|^2=(2\pi-\alpha)/\alpha$, résultat qui, de prime abord, n'avait rien d'évident. Autrement dit, nous ne pouvions pas être plus efficaces avec la technique de la T-coercivité.*

1.5.4 Autres cas

Présentons ici deux cas qui ne sont pas couverts par le Théorème 1.3.3.
Tout d'abord, définissons le domaine $\Omega :=]-1;1[\times]-1;1[$ et les sous-domaines $\Omega_1 :=]-1;0[\times]-1;1[$ et $\Omega_2 :=]0;1[\times]-1;1[$ (voir la Figure 1.15, à gauche). Supposons $\sigma = 1$ dans Ω_1, $\sigma = -2$ dans $]0;1[\times]0;1[$ et $\sigma = \beta \in \mathbb{R}_-^*$ dans $]0;1[\times]-1;0[$. Pour $\beta > -1$, on a, pour tout $d > 0$,

$$\inf_{B(O,d)\cap\Omega_1} \sigma_1 < \sup_{B(O,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| \qquad \text{et} \qquad \inf_{B(O,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| < \sup_{B(O,d)\cap\Omega_1} \sigma_1.$$

Par conséquent, les hypothèses du Théorème 1.3.3 ne sont pas vérifiées et l'on ne peut conclure que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ est de type Fredholm.

Remarque 1.5.8 *Cependant, on peut construire à la main, pour cette configuration simple, un opérateur $\mathcal{T}$, parmi d'autres, qui permette de recouvrer la $\mathcal{T}$-coercivité pour certains $\beta > -1$. Pour $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, définissons l'action de $\mathcal{T}$ de la façon suivante :*

$$(\mathcal{T}u)(x,y) := \begin{cases} u_a(x,y) - 2u_d(-x,y) & \text{dans } \Omega_a :=]-1;0[\times]0;1[\\ u_b(x,y) - 2u_d(-x,-y) & \text{dans } \Omega_b :=]-1;0[^2 \\ -2u_a(-x,-y) + 2u_b(-x,y) - u_c(x,y) & \text{dans } \Omega_c :=]0;1[\times]-1;0[\\ -u_d(x,y) & \text{dans } \Omega_d :=]0;1[^2 \end{cases},$$

avec $u_k := u|_{\Omega_k}$, pour $k = a,b,c,d$. Nous n'écrivons pas les valeurs de β pour lesquelles on peut prouver que A est un isomorphisme à l'aide de cet opérateur $\mathcal{T}$ car il n'est pas du tout certain que cette construction soit optimale.

Pour $\beta < -1$, on a

$$\inf_{B(O,d)\cap\Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(O,d)\cap\Omega_1} \sigma_1,$$

et le Théorème 1.3.3 permet de conclure que A est Fredholm d'indice 0.

Présentons maintenant un deuxième cas non couvert par le Théorème 1.3.3. Considérons le domaine Ω défini par $\Omega :=]-1;1[\times]-1;1[$ et les sous-domaines $\Omega_1 :=]-1;0[\times]0;1[\cup]0;1[\times]-1;0[$ et $\Omega_2 :=]-1;0[\times]-1;0[\cup]0;1[\times]0;1[$ (voir la Figure 1.15, à droite). Ici, on ne peut utiliser le Théorème 1.3.3, car les frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ ne sont pas lipschitziennes (voir [25, Corrigendum]).

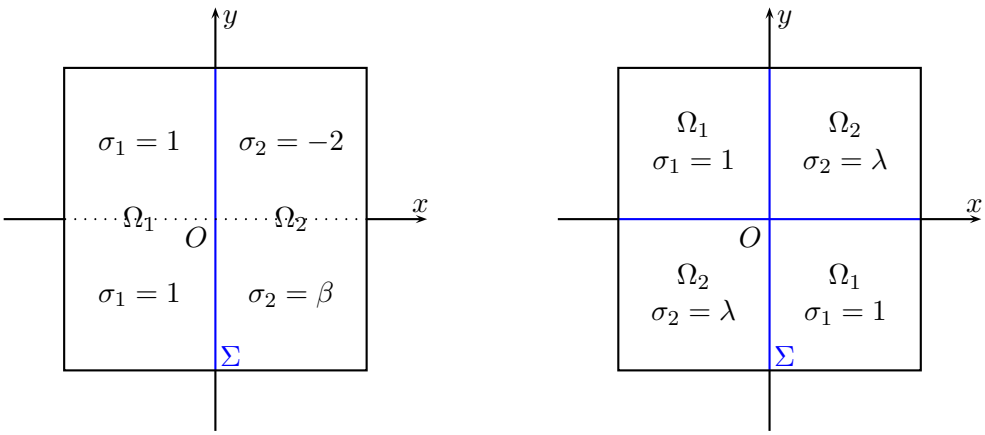


FIGURE 1.15 – Deux configurations qui ne sont pas couvertes par le Théorème 1.3.3 : $\beta > -1$ à gauche ; $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ à droite.

1.6 Domaines de $\mathbb{R}^3$

Pour étudier le problème $(\mathscr{P})$ posé dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$, on procède comme en 2D. Dès lors que l'on est en mesure d'établir des résultats de T-coercivité localement (cf. §1.2), on peut montrer que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ est Fredholm d'indice zéro. La différence principale par rapport au cas 2D tient au fait qu'en 3D il existe une plus grande variété de géométries particulières. En électromagnétisme, ces problèmes scalaires 3D peuvent sembler assez peu intéressants. Néanmoins, ils permettent de modéliser les problèmes d'électrostatique et plus important pour nous, ils constitueront la base de l'étude des équations de Maxwell 3D (cf. Chapitre 9). Les notations que nous avons introduites en 2D sont réutilisées ici.

Nous commençons notre étude par des cas élémentaires. Par souci de concision, nous présentons les preuves uniquement lorsque les cas ne découlent pas directement du 2D.

1.6.1 Domaine symétrique

On obtient aisément le même résultat que celui énoncé dans le Théorème 1.2.1.

1.6.2 Arête prismatique

Introduisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) de sorte que les coordonnées cartésiennes vérifient $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Notons $H > 0$ la hauteur du cylindre et $R > 0$ son rayon.

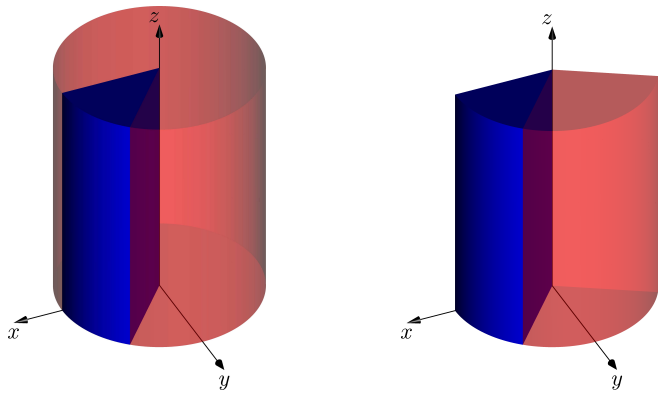


FIGURE 1.16 – Géométrie des arêtes prismatiques : arête interne (à gauche), arête externe (à droite).

Arête prismatique interne

Considérons la géométrie de la Figure 1.16, à gauche. Pour $0 < \alpha < 2\pi$, définissons

$$\Omega_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha,\ 0 < z < H\}\ ;$$
$$\Omega_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < 2\pi,\ 0 < z < H\}\ .$$

Théorème 1.6.1 *(ARÊTE PRISMATIQUE INTERNE) Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > I_\alpha, \qquad \textit{avec} \qquad I_\alpha := \max(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}, \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}).$$

Alors, il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que la forme a soit T-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Définissons les deux opérateurs R_1 et R_2 respectivement par $(R_1u_1)(\rho,\Theta,Z) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta-2\pi), Z)$ et $(R_2u_2)(\rho,\Theta,Z) = u_2(\rho, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Theta + 2\pi, Z)$. Pour $k = 1,2$, La condition de raccord à l'interface est vérifiée pour R_k et donc $R_k \in \mathcal{R}_k$. En travaillant comme dans la preuve du Théorème 1.2.3, on trouve $\|R_1\|^2 \leq I_\alpha$ et $\|R_2\|^2 \leq I_\alpha$. On peut alors conclure avec le Théorème 1.1.1. ■

Arête prismatique externe

Considérons la géométrie de la Figure 1.16, à droite. Pour $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$, définissons

$$\Omega_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha,\ 0 < z < H\}\ ;$$
$$\Omega_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < \gamma,\ 0 < z < H\}\,.$$

On obtient un résultat identique à celui du Théorème 1.2.7.

1.6.3 Arête axisymétrique

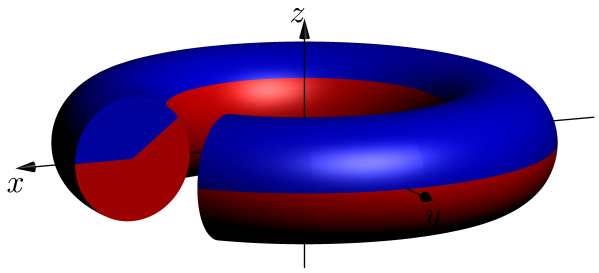


FIGURE 1.17 – Géométrie d'une arête axisymétrique interne.

Considérons la géométrie de la Figure 1.17, avec les coordonnées toroïdales (r,θ,φ) telles que les coordonnées cartésiennes vérifient $(x,y,z) = (\cos\theta\,(R + r\cos\varphi), \sin\theta\,(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi)$. Ici, $R > 0$ désigne le rayon du tore. Pour $0 < d < R$ et $0 < \alpha < 2\pi$, définissons

$$\Omega_1 := \{(\cos\theta\,(R + r\cos\varphi), \sin\theta\,(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi) \,|\, 0 < r < d,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < \alpha\}\ ;$$
$$\Omega_2 := \{(\cos\theta\,(R + r\cos\varphi), \sin\theta\,(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi) \,|\, 0 < r < d,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \alpha < \varphi < 2\pi\}\ .$$

Théorème 1.6.2 *(*ARÊTE AXISYMÉTRIQUE INTERNE*) Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > \frac{1+d/R}{1-d/R} I_\alpha, \qquad \textit{avec} \qquad I_\alpha := \max(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}, \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}).$$

Alors, il existe un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que la forme a soit $\mathcal{T}$-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Introduisons les opérateurs R_1 et R_2 définis respectivement par $(R_1u_1)(\rho,\Theta,\Phi) = u_1(\rho,\Theta,\frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Phi-2\pi))$ et $(R_2u_2)(\rho,\Theta,\Phi) = u_2(\rho,\Theta,\frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Phi + 2\pi)$. Les conditions de raccord à l'interface sont satisfaites pour R_1 et R_2.
Pour calculer la norme de R_1, considérons $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. À l'aide du changement de variables,

dans les coordonnées toroïdales, $(r,\theta,\varphi) = (\rho,\Theta,\frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Phi-2\pi))$, nous obtenons [4]

$$\begin{aligned}
\|\nabla(R_1u_1)\|^2_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_2}\left(\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{(R+\rho\,\cos\Phi)^2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\Theta}\right)^2\right)\rho\,(R+\rho\,\cos\Phi)\,d\rho d\Phi d\Theta \\
&\quad + \int_{\Omega_2}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\Phi}\right)^2\rho\,(R+\rho\,\cos\Phi)\,d\rho d\Phi d\Theta \\
&\leq \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 r\,(R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\varphi))\,drd\varphi d\theta \\
&\quad + \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\int_{\Omega_1}\frac{1}{(R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\varphi))^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 r\,(R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\varphi))\,drd\varphi d\theta \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi-\alpha}\int_{\Omega_1}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right)^2 r\,(R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\varphi))\,drd\varphi d\theta.
\end{aligned}$$

Les relations

$$\frac{R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\theta)}{R+r\cos\theta} \leq \frac{1+d/R}{1-d/R} \quad \text{et} \quad \frac{R+r\cos\theta}{R+r\cos(\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\,\theta)} \leq \frac{1+d/R}{1-d/R}, \quad \forall r\in]0;d[,\ \forall\theta\in]0;\alpha[$$

impliquent $\|R_1\|^2 \leq \frac{1+d/R}{1-d/R}\,I_\alpha$. Pareillement, on trouve $\|R_2\|^2 \leq \frac{1+d/R}{1-d/R}\,I_\alpha$. On conclut comme dans la preuve du Théorème 1.1.1. ■

Remarque 1.6.3 *Si* $\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+,\sigma_2^-/\sigma_1^+) > I_\alpha$, *alors d'après le Théorème 1.6.2,* $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ *pour* d/R *suffisamment petit.*

Remarque 1.6.4 *Nous nous sommes intéressés à l'arête axisymétrique interne. On traiterait le cas de l'arête axisymétrique externe de la même façon, et on obtiendrait un résultat similaire à celui du Théorème 1.2.7.*

1.6.4 Pointe conique

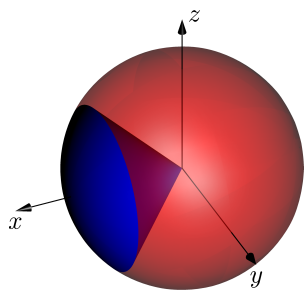


FIGURE 1.18 – Géométrie d'une pointe conique interne.

Considérons la géométrie de la Figure 1.18 et les coordonnées sphériques (r,θ,φ) naturellement associées, telles que les coordonnées cartésiennes vérifient $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta\,\cos\varphi, r\sin\theta\,\sin\varphi)$. Introduisons $R>0$ et $0<\alpha<\pi$. Définissons

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{(r\cos\theta, r\sin\theta\,\cos\varphi, r\sin\theta\,\sin\varphi),\ 0<r<R,\ 0\leq\theta<\alpha,\ 0\leq\varphi<2\pi\}\ ; \\
\Omega_2 &:= \{(r\cos\theta, r\sin\theta\,\cos\varphi, r\sin\theta\,\sin\varphi),\ 0<r<R,\ \alpha<\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi\}\ .
\end{aligned}$$

4. Voir le §1.8.2 pour le détail des calculs.

Théorème 1.6.5 *(*Pointe conique interne*) Supposons*[5]

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > I_\alpha \quad ou \quad \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 \quad si\ \alpha \le \pi/2 \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > I_\alpha \quad ou \quad \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 \quad si\ \alpha \ge \pi/2 \end{cases}, \qquad avec \qquad I_\alpha := \max(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}).$$

Alors, il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que la forme a soit T-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Considérons le cas $\alpha \le \pi/2$.
Définissons les opérateurs R_1 et R_2 tels que $(R_1u_1)(\rho,\Theta,\Phi) = u_1(\rho, g_1(\Theta), \Phi)$ et $(R_2u_2)(\rho,\Theta,\Phi) = u_2(\rho, g_2(\Theta), \Phi)$. Ici, g_1 est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $[\alpha;\pi]$ dans $[0;\alpha]$ tel que $g_1(\pi) = 0$ et $g_1(\alpha) = \alpha$ tandis que g_2 est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $[0;\alpha]$ dans $[\alpha;\pi]$ tel que $g_2(0) = \pi$ et $g_2(\alpha) = \alpha$. Notons h_1 (resp. h_2) l'inverse de g_1 (resp. g_2).
La condition de raccord à l'interface est vérifiée. Évaluons la norme de R_1. Pour cela, donnons-nous $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$. En effectuant le changement de variables $(r,\theta,\varphi) = (\rho, g_1(\Theta), \Phi)$, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \|\nabla(R_1u_1)\|^2_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\Theta}\right)^2 + \frac{1}{(\rho\,\sin\Theta)^2}\left(\frac{\partial(R_1u_1)}{\partial\Phi}\right)^2 \rho^2 d\rho \sin\Theta d\Theta d\Phi \\ &\le \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 r^2\,dr\,\sin(h_1(\theta))\,|h_1'(\theta)|\,d\theta d\varphi \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \frac{1}{r^2\,|h_1'(\theta)|^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 r^2\,dr\,\sin(h_1(\theta))\,|h_1'(\theta)|\,d\theta d\varphi \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \frac{1}{(r\sin\,h_1(\theta))^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right)^2 r^2\,dr\,\sin(h_1(\theta))\,|h_1'(\theta)|\,d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Il suit

$$\|R_1\|^2 \le \max\left(\|\frac{|h_1'(\theta)|\,\sin(h_1(\theta))}{\sin\theta}\|_{\mathrm{L}^\infty(]0;\alpha[)}, \|\frac{\sin(h_1(\theta))}{|h_1'(\theta)|\,\sin\theta}\|_{\mathrm{L}^\infty(]0;\alpha[)}, \|\frac{|h_1'(\theta)|\,\sin\theta}{\sin(h_1(\theta))}\|_{\mathrm{L}^\infty(]0;\alpha[)}\right).$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver une fonction admissible $\theta \mapsto h_1(\theta)$ qui minimise le terme de droite. Pour y parvenir, adoptons la stratégie suivante : choisissons une fonction h_1 qui rende l'un des trois quotients ci-dessus constant par rapport à θ. Nous prendrons

$$h_1(\theta) = \arccos(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}\cos\theta - 2\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}), \text{ tel que } \frac{|h_1'(\theta)|\,\sin(h_1(\theta))}{\sin\theta} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \forall\theta \in]0;\alpha[.$$

Par une étude de fonctions, on établit

$$\frac{\sin(h_1(\theta))}{|h_1'(\theta)|\,\sin\theta} \le 1, \quad \frac{|h_1'(\theta)|\,\sin\theta}{\sin(h_1(\theta))} \le \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \forall\theta \in]0;\alpha[.$$

Par conséquent, on a $\|R_1\|^2 \le I_\alpha$.
Maintenant, pour R_2, nous devons minimiser

$$\max\left(\|\frac{|h_2'(\theta)|\,\sin(h_2(\theta))}{\sin\theta}\|_{\mathrm{L}^\infty(]\alpha;\pi[)}, \|\frac{\sin(h_2(\theta))}{|h_2'(\theta)|\,\sin\theta}\|_{\mathrm{L}^\infty(]\alpha;\pi[)}, \|\frac{|h_2'(\theta)|\,\sin\theta}{\sin(h_2(\theta))}\|_{\mathrm{L}^\infty(]\alpha;\pi[)}\right).$$

Interrogeons notre consultant Xavier Claeys à Toulouse : « Pour ce problème, il faut considérer la projection stéréographique ». Les idées de Xavier sont généralement bonnes. Écoutons-le. Considérons la projection stéréographique

$$g_2(\Theta) = 2\,\arctan(\frac{\tan(\alpha/2)^2}{\tan(\Theta/2)}) \quad \text{de sorte que} \quad h_2(\theta) = 2\,\arctan(\frac{\tan(\alpha/2)^2}{\tan(\theta/2)}).$$

5. La valeur $(1+\cos\alpha)/(1-\cos\alpha)$ est égale au rapport de l'angle solide occupé par le matériau négatif sur l'angle solide occupé par le matériau positif.

On trouve

$$\frac{|h_2'(\theta)|\,\sin\left(h_2(\theta)\right)}{\sin\theta} \leq 1, \quad \frac{\sin\left(h_2(\theta)\right)}{|h_2'(\theta)|\,\sin\theta} = 1, \quad \frac{|h_2'(\theta)|\,\sin\theta}{\sin\left(h_2(\theta)\right)} = 1, \quad \forall\theta \in]\alpha;\pi[,$$

et donc $\|R_2\|^2 \leq 1$. On conclut alors comme dans la preuve du Théorème 1.1.1.
Le cas $\pi/2 < \alpha < \pi$ se traite en échangeant les rôles de Ω_1 et Ω_2. ■

Remarque 1.6.6 *Le choix des opérateurs de transfert R_1, R_2 dans cette preuve peut dérouter le lecteur. Pourtant, à ce jour, ces R_1, R_2 particuliers sont les opérateurs qui nous permettent d'obtenir le plus petit intervalle critique. On ne peut pas espérer améliorer le résultat apporté par l'utilisation de R_2. En effet, pour $\kappa_\sigma = -1$, l'opérateur A n'est pas de type Fredholm. Si nous avions défini R_1 à partir de la projection stéréographique, nous aurions obtenu un résultat moins bon que celui énoncé dans le Théorème 1.6.5, i.e. nous aurions obtenu un intervalle critique plus grand. Il est assez surprenant que l'intervalle critique ne soit pas « symétrique » par rapport à -1, c'est-à-dire de la forme $[-a;-1/a]$ avec $a > 1$. La conjecture est tout de même que A n'est pas de type Fredholm dans l'intervalle critique du Théorème 1.6.5. Pour montrer ce résultat, il faut calculer les singularités, ce qui est moins évident qu'en 2D.*

1.6.5 Coin de Fichera

Dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, il peut se produire que les arêtes s'intersectent. Au niveau de cette intersection, il apparaît à la fois des singularités liées aux arêtes et au coin, situation complexe que l'on ne rencontre pas en 2D. Ici, nous considérons un exemple caractéristique d'une telle configuration : le « fameux » coin de Fichera. Définissons $\Omega :=]-1;1[^3$, $\Omega_1 :=]0;1[^3$ et $\Omega_2 := \Omega\backslash\overline{\Omega_1}$.

Théorème 1.6.7 *(Coin de Fichera) Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > 7.$$

Alors, il existe un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que la forme a soit T-coercive. Par conséquent, $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Construisons l'opérateur R_1 à l'aide de symétries [6] :

$$(R_1u_1)(x,y,z) = \begin{cases} u_1(-x,y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^1 :=]-1;0[\times]0;1[^2 \\ u_1(x,-y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^2 :=]0;1[\times]-1;0[\times]0;1[\\ u_1(x,y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^3 :=]0;1[^2\times]-1;0[\\ u_1(-x,-y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^4 :=]-1;0[^2\times]0;1[\\ u_1(-x,y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^5 :=]-1;0[\times]0;1[\times]-1;0[\\ u_1(x,-y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^6 :=]0;1[\times]-1;0[^2 \\ u_1(-x,-y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^7 :=]-1;0[^3 \end{cases}.$$

Introduisons ensuite R_2 défini par

$$\begin{aligned}(R_2u_2)(x,y,z) \quad = \quad & u_2^1(-x,y,z) + u_2^2(x,-y,z) + u_2^3(x,y,-z) \\ & -u_2^4(-x,-y,z) - u_2^5(-x,y,-z) - u_2^6(x,-y,-z) \\ & +u_2^7(-x,-y,-z).\end{aligned}$$

Ci-dessus, pour $\ell = 1\ldots7$, u_2^ℓ désigne la restriction de u_2 à Ω_2^ℓ.
On peut vérifier que R_1 et R_2 satisfont la condition de raccord à l'interface (les signes dans la

6. Une approche similaire a été récemment utilisée par Nicaise et Venel dans [129] pour la géométrie de $\mathbb{R}^2$: $\Omega :=]-1;1[^2$ et $\Omega_1 :=]0;1[^2$.

définition de R_2 ont été choisis pour que ce soit le cas), de sorte que $R_1 \in \mathcal{R}_1$ et $R_2 \in \mathcal{R}_2$. On obtient alors pour tout $u_1 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$, $\|\nabla(R_1 u_1)\|^2_{\Omega_2} = 7\,\|\nabla u_1\|^2_{\Omega_1}$. D'autre part, pour tout $u_2 \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)$, on a $\|\nabla(R_2 u_2)\|^2_{\Omega_1} \leq 7\,\|\nabla u_2\|^2_{\Omega_2}$. Pour montrer ce résultat, on utilise l'inégalité $(\sum_{k=1}^7 a_k)^2 \leq 7\,\sum_{k=1}^7 {a_k}^2$, pour tout $(a_1, \ldots, a_7) \in \mathbb{R}^7$. On termine alors comme dans la preuve du Théorème 1.1.1. ■

Remarque 1.6.8 *On peut étendre ce résultat à la dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Définissons $\Omega :=]-1;1[^d$, $\Omega_1 :=]0;1[^d$ et $\Omega_2 := \Omega \backslash \overline{\Omega_1}$. L'opérateur $A : u \mapsto -div(\sigma\,\nabla u)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ lorsque $\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > 2^d - 1$. En dimension 2, on a $2^d - 1 = 3$. En dimension 3, on a $2^d - 1 = 7$.*

1.6.6 Géométries générales de $\mathbb{R}^3$

Pour établir le caractère Fredholm de l'opérateur A dans le cas d'une interface générale de $\mathbb{R}^3$, on peut de nouveau procéder par localisation, comme dans le §1.3 (cf. Théorème 1.3.3). On pourrait

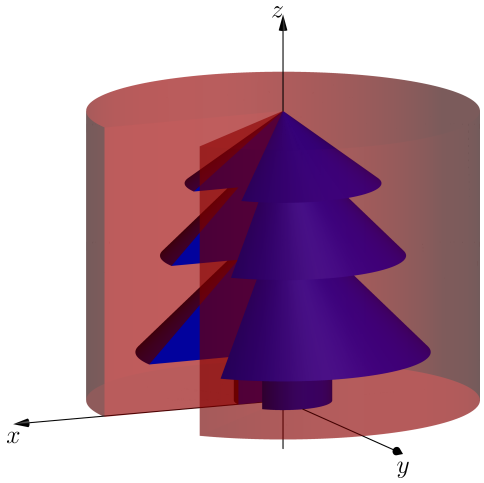


FIGURE 1.19 – Un exemple de géométrie 3D qui peut être traité par localisation.

par ailleurs donner des résultats d'optimalité pour cette méthode de la T-coercivité dans le même esprit que ce qui est fait dans le §1.5. Nous n'entrons pas dans les détails car comme nous l'avons déjà exprimé, le calcul des singularités en 3D n'a rien d'évident. Commentons tout de même le cas du coin de Fichera. Pour simplifier, nous supposons que les coefficients σ_1 et σ_2 sont constants, et nous nous plaçons dans une situation où le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ est situé dans l'intervalle critique $[-7; -1/7]$. Autrement dit, nous nous intéressons précisément au cas qui n'entre pas dans le cadre du Théorème 1.6.7. On distingue alors les situations suivantes.

- Pour $\kappa_\sigma = -1$, il apparaît des *singularités surfaciques*. En effet, en chaque point des faces de l'interface, on peut construire une suite de fonctions pour montrer que A n'est pas Fredholm. Il suffit pour cela de procéder comme dans la preuve du Théorème 1.5.3.
- Pour $\kappa_\sigma \in]-3; -1/3[$, il apparaît des *singularités linéiques*. En chaque point des trois arêtes de l'interface, on peut construire une suite de fonctions pour montrer que A n'est pas Fredholm à l'instar de ce qui est fait dans la preuve du Théorème 1.5.5.
- Pour $\kappa_\sigma \in]-7; -1/7[$, on peut imaginer qu'il apparaît une *singularité ponctuelle* au niveau de l'intersection des arêtes de l'interface.

1.7 Conditions aux limites de type Neumann

Jusqu'à présent, nous avons imposé une condition aux limites de Dirichlet homogène sur la frontière. En utilisant un relèvement, on prouve de façon classique que les résultats obtenus précédemment sont également valides en imposant une condition de Dirichlet non homogène. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'influence d'une condition de Neumann. Intéressons-nous au problème

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) & \text{tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad \sigma \partial u/\partial \boldsymbol{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. , \tag{1.26}$$

avec $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. En multipliant par 1 dans l'équation volumique, et en intégrant par parties, on remarque que les termes sources f et g doivent vérifier la condition de compatibilité $(f,1)_\Omega + \langle g, 1\rangle_{\partial\Omega} = 0$ pour que le problème (1.26) admette une solution. Ici, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ désigne le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)\times\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. D'autre part, si u est une solution de (1.26) alors $u + cste$ est également une solution de (1.26). Ceci nous conduit à introduire l'espace

$$\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) := \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \mid \int_\Sigma v = 0 \right\}.$$

Rappelons que Σ désigne l'interface entre Ω_1 et Ω_2. La condition de moyenne nulle sur l'interface que nous imposons dans l'espace $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ permet d'éliminer les constantes. Si C appartient à $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$, alors $C = 0$. Un peu plus loin, nous verrons un second moyen de quotienter par les constantes, plus classique, en cherchant une solution à moyenne nulle sur Ω. Cependant dans l'approche T-coercivité que nous suivons, nous avons besoin de construire des isomorphismes de l'espace variationnel et nous verrons que les constructions géométriques que nous avons proposées lors de l'étude du problème avec condition de Dirichlet homogène s'accordent mieux avec l'espace $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$.
En utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte et en se servant du fait que Ω est connexe, on prouve en raisonnant par l'absurde le

Lemme 1.7.1 *L'application $(v, v') \mapsto (\nabla v, \nabla v')_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$.*

Considérons alors le problème

$$(\mathscr{P}_N) \left|\begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) & \text{tel que} \\ a^\Sigma(u,v) = l(v), & \forall v \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega), \end{array}\right.$$

avec $a^\Sigma(u,v) := (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega$ et $l(v) := (f,v)_\Omega + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}$ pour tout u, v dans $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$.

Si u est solution de $(\mathscr{P}_N)$ et si f et g satisfont la condition de compatibilité, alors u vérifie le problème (1.26). Concentrons-nous sur l'étude du problème $(\mathscr{P}_N)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ tel que pour tout $v, v' \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$, $(\nabla(A^\Sigma v), \nabla v')_\Omega = a^\Sigma(v, v')$. Considérons également le terme source $\mathrm{F} \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ tel que pour tout $v' \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$, $(\nabla \mathrm{F}, \nabla v')_\Omega = l(v')$. L'élément $u \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ vérifie $A^\Sigma u = \mathrm{F}$ si et seulement si u est solution de $(\mathscr{P}_N)$.

À l'instar de ce que nous avons fait pour le problème de Dirichlet, pour $k = 1, 2$, introduisons l'espace des restrictions des éléments de $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ à Ω_k :

$$\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k},\ v \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \right\}.$$

Si $R_1^\Sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1), \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2))$ et $R_2^\Sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2), \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1))$, nous notons

$$\|R_1^\Sigma\| := \sup_{v \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1),\, \|\nabla v\|_{\Omega_1} = 1} \|\nabla(R_1^\Sigma v)\|_{\Omega_2} \qquad \text{et} \qquad \|R_2^\Sigma\| := \sup_{v \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2),\, \|\nabla v\|_{\Omega_2} = 1} \|\nabla(R_2^\Sigma v)\|_{\Omega_1}.$$

L'équivalent du Théorème 1.1.1 pour le problème de Neumann $(\mathscr{P}_N)$ s'énonce de la manière suivante.

Théorème 1.7.2 *Soit* $R_1^\Sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1), \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2))$ *un opérateur vérifiant la condition de raccord* $(R_1^\Sigma u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$ *pour tout* $u_1 \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1)$. *Définissons*

$$\mathcal{T}_1^\Sigma u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1^\Sigma u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} . \tag{1.27}$$

Si $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1^\Sigma\|^2$, *alors la forme* a^Σ *est* $\mathcal{T}_1^\Sigma$*-coercive : il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $a^\Sigma(u, \mathcal{T}_1^\Sigma u) \geq C \, \|\nabla u\|^2_\Omega$ *pour tout* $u \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$. *Dans ce cas,* $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ *est un isomorphisme.*
Soit $R_2^\Sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2), \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1))$ *un opérateur vérifiant la condition de raccord* $(R_2^\Sigma u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$ *pour tout* $u_2 \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2)$. *Définissons*

$$\mathcal{T}_2^\Sigma u = \begin{cases} u_1 - 2R_2^\Sigma u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} . \tag{1.28}$$

Si $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2^\Sigma\|^2$, *alors la forme* a^Σ *est* $\mathcal{T}_2^\Sigma$*-coercive : il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $a^\Sigma(u, \mathcal{T}_2^\Sigma u) \geq C \, \|\nabla u\|^2_\Omega$ *pour tout* $u \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$. *Dans ce cas,* $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Pour montrer ce résultat, il suffit d'adapter la preuve du Théorème 1.1.1. Mentionnons simplement que $\mathtt{T}_1^\Sigma$ et $\mathtt{T}_2^\Sigma$ sont bien à valeurs dans $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$. En effet, on a $\int_\Sigma \mathtt{T}_1^\Sigma u = \int_\Sigma u_1 = 0$ et $\int_\Sigma \mathtt{T}_2^\Sigma u = -\int_\Sigma u_2 = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$. ■

1.7.1 Géométries particulières

Reconsidérons les cas particuliers étudiés dans les paragraphes 1.2 (2D) et 1.6 (3D). En définissant R_1^Σ et R_2^Σ de la même façon que R_1 et R_2, on montre que $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ constitue un isomorphisme pour une condition sur le contraste identique à celle des Théorèmes 1.2.1 (DOMAINE SYMÉTRIQUE), 1.2.3 (SOMMET INTÉRIEUR), 1.2.10 (INTERFACE RÉGULIÈRE), 1.6.1 (ARÊTE PRISMATIQUE INTERNE), 1.6.2 (ARÊTE AXISYMÉTRIQUE INTERNE) , 1.6.5 (POINTE CONIQUE INTERNE) et 1.6.7 (COIN DE FICHERA). En 2D, seul diffère le résultat pour le SOMMET EXTÉRIEUR. Étudions le problème $(\mathscr{P}_N)$ pour cette configuration.

Rappelons la géométrie considérée. On note (r, θ) les coordonnées polaires. Pour $R > 0$ et $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$, définissons :

$$\Omega_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha\} \ ;$$
$$\Omega_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < \gamma\} \, .$$

Théorème 1.7.3 *Supposons*

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > \dfrac{\gamma - \alpha}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 & \text{si} \quad \alpha \leq \gamma/2\,; \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > \dfrac{\gamma - \alpha}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 & \text{si} \quad \alpha \geq \gamma/2. \end{cases}$$

Alors, il existe un isomorphisme $\mathcal{T}^\Sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega))$ *tel que la forme* a^Σ *soit* $\mathcal{T}^\Sigma$*-coercive. Par conséquent,* $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Considérons le cas $\alpha \leq \gamma/2$. Définissons R_1^Σ et R_2^Σ les opérateurs tels que

$$(R_1^\Sigma u_1)(\rho, \Theta) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha - \gamma}(\Theta - \gamma)) \qquad ; \qquad (R_2^\Sigma u_2)(\rho, \Theta) = u_2^\Sigma(\rho, 2\alpha - \Theta) \, .$$

D'une part, on remarque que $(R_1^\Sigma u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$ pour tout $u_1 \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_1)$ et $(R_2^\Sigma u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$ pour tout $u_2 \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2)$. D'autre part, on trouve $\|R_1^\Sigma\|^2 = (\gamma - \alpha)/\alpha$ et $\|R_2^\Sigma\|^2 = 1$. On conclut alors avec le Théorème 1.7.2.
Pour traiter le cas $\alpha \geq \gamma/2$, on échange les rôles de Ω_1 et Ω_2. ■

Remarque 1.7.4 *Expliquons pourquoi les résultats pour les problèmes avec condition de Dirichlet et Neumann diffèrent pour le sommet intérieur. Pour fixer les idées, supposons $\alpha \leq \gamma/2$. Pour définir R_1, nous pouvons procéder à une symétrie par rapport à l'interface et à un prolongement par zéro. Cela constitue bien un opérateur à valeurs dans $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)$. Pour R_1^Σ, on ne peut opérer ainsi car cela ne donne pas un opérateur à valeurs dans $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega_2)$, en raison du possible saut de trace en $\theta = 2\alpha$. Inversement, pour définir R_2, nous devons effectuer une dilatation en θ de façon à vérifier la condition de Dirichlet homogène en $\theta = 0$. Dans $\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$, il n'y a pas cette contrainte. Une simple symétrie par rapport à l'interface suffit pour construire R_2^Σ.*

1.7.2 Interface quelconque en 2D

Nous n'écrirons pas le processus de localisation pour l'étude du problème $(\mathscr{P}_N)$ car nous démontrerons plus loin dans ce document deux résultats qui permettent de passer outre cette étape technique en 2D. Pour les énoncer, introduisons avec le Théorème de Riesz les opérateurs bornés $A(\sigma) : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $A^\Sigma(\sigma) : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{rcll} (\nabla(A(\sigma)u), \nabla v)_\Omega & = & (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega); \\ (\nabla(A^\Sigma(\sigma)u), \nabla v)_\Omega & = & (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \times \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega). \end{array}$$

Avec cette notation, on a $A^\Sigma(\sigma) = A^\Sigma$. Dans le Chapitre 7, nous montrerons que $A(\sigma) : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est un isomorphisme si et seulement si $A^\Sigma(\sigma^{-1}) : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ est un isomorphisme (Théorème 7.2.1). D'autre part, nous prouverons que $A(\sigma) : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $A^\Sigma(\sigma^{-1}) : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro (Théorème 7.2.3).

Ceci montre que $A(\sigma)$ n'est pas de type Fredholm si et seulement si $A^\Sigma(\sigma^{-1})$ n'est pas de type Fredholm. En utilisant les résultats du §1.5 qui donnent des critères pour que $A(\sigma)$ ne soit pas de type Fredholm, on obtient des conditions pour que $A^\Sigma(\sigma^{-1})$ ne soit pas de type Fredholm.

Ainsi, en 2D, les problèmes avec condition aux limites de Dirichlet et condition aux limites de Neumann sont intimement liés. Ce résultat remarquable ne semble pas exister en 3D.

Remarque 1.7.5 *Considérons de nouveau le cas du sommet extérieur (cf. §1.2.3). Supposons σ_1 et σ_2 constants. Fixons $\gamma = \pi$ et $\alpha = \pi/4$. Avec le Théorème 1.2.7, on prouve que $A(\sigma)$ est un isomorphisme, dès que $\kappa_\sigma \in \,]-\infty; -3[\, \cup \,]-1; 0[$. Le Théorème 1.5.5 permet lui de montrer que $A(\sigma)$ n'est pas de type Fredholm pour $\kappa_\sigma \in \,]-3; -1[$. Le Théorème 1.7.3 indique que $A^\Sigma(\sigma)$ est un isomorphisme dès que $\kappa_\sigma \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]-1/3; 0[$. Ces résultats sont donc parfaitement cohérents avec les Théorèmes 7.2.1 et 7.2.3 que nous venons de mentionner.*

Remarque 1.7.6 *Revenons sur le cas du sommet intérieur (cf. §1.2.2 et Remarque 1.5.7). Fixons $\alpha \in]0; \pi[$. Appelons cette géométrie $\mathscr{G}$. Supposons σ_1 et σ_2 constants. En vertu du Théorème 1.2.3, nous savons que $A(\sigma)$ définit un isomorphisme lorsque $\kappa_\sigma \in]-\infty; -(2\pi-\alpha)/\alpha[\cup]-\alpha/(2\pi-\alpha); 0[$. Par ailleurs, le Théorème 1.5.5 indique que $A(\sigma)$ n'est pas de type Fredholm pour $\kappa_\sigma \in]-(2\pi-\alpha)/\alpha; -\alpha/(2\pi-\alpha)[$. Précisons la structure des singularités (voir la preuve du Théorème 1.5.5) qui sont responsables de cet intervalle critique.*
Introduisons la géométrie du sommet extérieur (cf. §1.2.3) avec $\gamma = \pi$ et un secteur, pour Ω_1, d'ouverture $\alpha/2$. Appelons cette géométrie $\mathscr{G}^{1/2}$. Nous pouvons voir cette configuration comme un « demi sommet intérieur ».
D'après le Théorème 1.5.5, l'opérateur associé au problème avec condition aux limites de Dirichlet dans $\mathscr{G}^{1/2}$ n'est pas de type Fredholm pour $\kappa_\sigma \in]-(\pi-\alpha/2)/(\alpha/2); -1] =]-(2\pi-\alpha)/\alpha; -1]$. Ceci s'explique par l'existence d'une singularité qui « sort » de H^1 pour de telles valeurs du contraste. En appliquant une antisymétrie à cette singularité, on construit une singularité dans $\mathscr{G}$. L'existence de cette dernière empêche $A(\sigma)$ d'être de type Fredholm pour $\kappa_\sigma \in]-(2\pi-\alpha)/\alpha; -1]$.
En reprenant les idées de la preuve du Théorème 1.5.5, on peut montrer que l'opérateur associé

au problème avec condition aux limites de Neumann dans $\mathscr{G}^{1/2}$ n'est pas de type Fredholm pour $\kappa_\sigma \in [-1; -(\alpha/2)/(\pi - (\alpha/2))[= [-1; -\alpha/(2\pi - \alpha)[$. En symétrisant la singularité associée à ce problème, on obtient une singularité dans $\mathscr{G}$ qui permet de montrer que $A(\sigma)$ n'est pas de type pour $\kappa_\sigma \in [-1; -\alpha/(2\pi - \alpha)[$.

1.7.3 Travail dans l'espace des fonctions à moyenne nulle

De façon plus usuelle, nous aurions pu supprimer les constantes de l'espaces variationnel en imposant aux fonctions d'être à moyenne nulle sur Ω. Introduisons l'espace

$$\mathrm{H}^1_\#(\Omega) := \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \mid \int_\Omega v = 0 \right\}.$$

L'application $(v, v') \mapsto (\nabla v, \nabla v')_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Considérons alors le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \text{ tel que} \\ a^\#(u, v) = l(v), \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega), \end{array} \right. \tag{1.29}$$

avec $a^\#(u, v) := (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega$ et $l(v) := (f, v)_\Omega + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega}$ pour tout u, v dans $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$.

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $A^\# : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que pour tout $v, v' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$, $(\nabla(A^\# v), \nabla v')_\Omega = a^\#(v, v')$. Le problème (1.29) est bien posé pour tout $l \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)^*$ (le dual topologique de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ avec la notation américaine) si et seulement si $A^\#$ définit un isomorphisme.

Considérons les opérateurs

$$\begin{array}{rccc} P^\Sigma_\# : & \mathrm{H}^1_\#(\Omega) & \to & \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \\ & u & \mapsto & u - \displaystyle\int_\Sigma u / \int_\Sigma 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} P^\#_\Sigma : & \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) & \to & \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \\ & u & \mapsto & u - \displaystyle\int_\Omega u / \int_\Omega 1 \end{array}.$$

On vérifie sans difficulté que $P^\Sigma_\#$ et $P^\#_\Sigma$ sont des isomorphismes avec $P^\Sigma_\# \circ P^\#_\Sigma = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)}$ et $P^\#_\Sigma \circ P^\Sigma_\# = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^1_\#(\Omega)}$. Ces opérateurs vont nous permettre de prouver qu'on a des résultats identiques pour A^Σ et $A^\#$.

Proposition 1.7.7 *L'opérateur $A^\#$ vérifie $A^\# = P^\#_\Sigma \circ A^\Sigma \circ P^\Sigma_\#$. Par conséquent, on a les deux assertions suivantes.*
L'opérateur $A^\# : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ définit un isomorphisme si et seulement si $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ constitue un isomorphisme.
L'opérateur $A^\# : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $A^\Sigma : \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro.

Preuve. Montrons $A^\# = P^\#_\Sigma \circ A^\Sigma \circ P^\Sigma_\#$. Pour tout u, v dans $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\nabla(P^\#_\Sigma(A^\Sigma(P^\Sigma_\# u))), \nabla v)_\Omega & = & (\nabla(A^\Sigma(P^\Sigma_\# u)), \nabla v)_\Omega \\ & = & (\nabla(A^\Sigma(P^\Sigma_\# u)), \nabla(P^\Sigma_\# v))_\Omega \\ & = & (\sigma \nabla(P^\Sigma_\# u), \nabla(P^\Sigma_\# v))_\Omega = (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega = (\nabla(A^\# u), \nabla v)_\Omega. \end{array}$$

Ceci permet d'obtenir le résultat de la proposition. ■

1.8 Calculs manquants

1.8.1 Calculs utilisés dans la Section 1.5

Commençons par détailler un calcul intervenant dans la preuve du Théorème 1.5.3. Soit $b > 0$ tel que $[-b;b] \times [-b;b] \subset \Omega$. Reconsidérons la suite $(u_n)_n$ définie en (1.14) et introduisons une fonction de troncature $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, égale à 1 dans $[-b/2;b/2] \times [-b/2;b/2]$.

Lemme 1.8.1 *On a* $\|\chi u_n\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Preuve. Considérons $\tilde{D} := [-b/2;b/2] \times [-b/2;b/2]$, et écrivons

$$\begin{aligned}
\|\chi u_n\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} &\geq \|\nabla u_n\|^2_{\tilde{D}} \geq \|\partial_t u_n\|^2_{\tilde{D}} \\
&\geq 2\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^{b/2} n^2 \cos^2 nt \,\frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}}\,ds\,dt \\
&\geq 2\,n^2 \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 nt\,dt \int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}}\,ds \\
&\geq 2\,n^2 \left[\frac{b}{2} + \frac{\sin nb}{2n}\right] \int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}}\,ds.
\end{aligned}$$

Mais, l'on a

$$\begin{aligned}
4\int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}}\,ds &= \int_0^{b/2} e^{-2ns} - 2e^{-2nb} + e^{2ns-4nb}\,ds \\
&= (\frac{1}{2n} - \frac{e^{-nb}}{2n}) - (b\,e^{-2nb}) + e^{-4nb}(\frac{e^{nb}}{2n} - \frac{1}{2n}) \sim \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C > 0$, telle que pour n assez grand, on ait $\|\chi u_n\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} > C\,n$. ■

Présentons ensuite un calcul utilisé dans la preuve du Théorème 1.5.5. Définissons $u_n(r,\theta) := \chi(r)S_n(r,\theta)$, où χ est une fonction de troncature égale à 1 pour $0 \leq r \leq d/2$ et $S_n(r,\theta) := r^{i\,\eta+1/n}\varphi(\theta)$.

Lemme 1.8.2 *On a* $\|u_n\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Preuve. Pour obtenir ce résultat, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} &\geq \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} r^{-2+2/n}|\partial_\theta\varphi|^2\,r dr d\theta \\
&\geq C\int_0^{d/2} r^{-1+2/n} d\theta \\
&\geq C\,n\,(d/2)^{2/n}/2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

■

1.8.2 Coordonnées toroïdales

Considérons la géométrie de la Figure 1.17 et introduisons le changement de variables $(x,y,z) = (\cos\theta\,(R + r\cos\varphi), \sin\theta\,(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi)$, pour $R > 0$. La matrice jacobienne associée à ce changement de variables a pour expression

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\,(R + r\cos\varphi) & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\,(R + r\cos\varphi) & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Le volume élémentaire dans les coordonnées toroïdales est alors $r\,(R + r\cos\varphi)\,dr d\varphi d\theta$.
D'autre part, le gradient en coordonnées toroïdales s'écrit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{1}{R + r\cos\varphi}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Chapitre Deux

Étude numérique du problème scalaire

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

[50] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numer. Math., Accepté*, 28 pages, 2012.

Sommaire

Introduction **45**
2.1 Cadre général **46**
2.1.1 Point de départ 46
2.1.2 La T-coercivité, une reformulation du théorème de Banach–Nečas–Babuška 47
2.1.3 Approximation de la solution 48
2.2 Problème de transmission scalaire : caractère bien posé **51**
2.2.1 Notations 51
2.2.2 Exemples 52
2.2.3 Régularité de la solution 54
2.3 Approximation avec une hypothèse sur le maillage **55**
2.3.1 Approximabilité 55
2.3.2 Approximation numérique : maillage T-conforme 56
2.3.3 Approximation numérique : maillage localement T-conforme 56
2.4 Approximation sans hypothèse sur le maillage **59**
2.4.1 Approximation numérique : maillage quelconque 59
2.4.2 Approximation numérique : utilisation de la dissipation 60
2.5 Expériences numériques **62**
2.5.1 Influence du maillage pour l'exemple de la cavité 62
2.5.2 Deux propriétés caractéristiques du problème de transmission scalaire avec changement de signe 65

Introduction

Dans le Chapitre 1, nous nous sommes intéressés au problème de transmission scalaire ($\mathscr{P}$) « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f$ ». De façon générale dans cette thèse, nous souhaitons modéliser des problèmes d'électromagnétisme mettant en jeu des structures alliant matériaux classiques et matériaux négatifs. C'est pourquoi nous nous sommes spécifiquement

concentrés sur des configurations où σ présente un changement de signe de part d'autre d'une interface divisant le domaine borné Ω. Nous avons proposé une technique, la $\mathtt{T}$-coercivité, permettant d'obtenir des critères portant sur les valeurs de σ et la géométrie du domaine pour assurer que $(\mathscr{P})$ possède une unique solution. En particulier, si nous appelons a la forme sesquilinéaire telle que

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega),$$

nous avons prouvé que $(\mathscr{P})$ est bien posé dès que a est *$\mathtt{T}$-coercive*, autrement dit, dès qu'il existe un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $(u,v) \mapsto a(u, \mathtt{T}v)$ soit coercive. Classiquement, pour montrer qu'un problème est bien posé, on peut utiliser la théorie de Banach–Nečas–Babuška, également appelée théorie *inf–sup*. Puisque a est hermitienne, le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé si et seulement si a satisfait une condition inf–sup. Il est facile de voir que si a est $\mathtt{T}$-coercive alors a satisfait une condition inf–sup. Dans ce chapitre, nous prouverons que la réciproque est également vraie : si a vérifie une condition inf–sup alors a est $\mathtt{T}$-coercive. Ainsi, nous pouvons voir la $\mathtt{T}$-coercivité comme une reformulation de la théorie de Banach–Nečas–Babuška. Cette observation simple a déjà été effectuée dans la littérature (voir [140, remarque 2.1.48] ou [33, proposition 3]) mais l'idée reste encore peu répandue.

Le deuxième grand axe de ce chapitre concernera l'approximation numérique de la solution du problème $(\mathscr{P})$ lorsque celui-ci possède une unique solution. Nous souhaitons mettre en œuvre les méthodes d'approximation par éléments finis de Lagrange classiques et justifier leur convergence. Pour démontrer ces résultats de convergence, nous développerons une théorie de la $\mathtt{T}$-coercivité discrète. Pour une autre application de cette théorie, dans le cas des équations de Helmholtz et de Maxwell classiques, nous renvoyons le lecteur à [53]. Dans ce chapitre, nous présenterons également des expériences numériques mettant en évidence les traits caractéristiques de ces problème de transmission avec changement de signe.

Notre plan de travail sera le suivant. Nous commençons par étudier le lien entre la théorie inf–sup et la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité. Ensuite, nous expliquons comment on peut utiliser cette approche pour justifier les méthodes d'approximation de Galerkin usuelles. Dans la Section 2.2, nous appliquons ces résultats pour étudier le problème $(\mathscr{P})$ dans quelques configurations de référence. Ce sera l'occasion de préciser et d'illustrer certains points du Chapitre 1. Dans les deux paragraphes suivants, nous proposons des méthodes de discrétisation du problème $(\mathscr{P})$. Plus précisément, dans la Section 2.3, nous présentons des techniques avec une contrainte sur le maillage tandis que dans la Section 2.4, nous étudions des approches ne nécessitant pas d'hypothèse sur le maillage. Nous discuterons les avantages et les inconvénients de ces différents méthodes tout au long de ces deux paragraphes. Dans un dernier temps, nous fournissons un jeu d'expériences numériques illustrant ces résultats.

2.1 Cadre général

Ci-dessous, nous rappelons quelques outils standards d'analyse fonctionnelle utilisés pour prouver le caractère bien posé d'un problème abstrait écrit sous forme variationnelle. Nous reformulons ces outils en utilisant la théorie de la $\mathtt{T}$-coercivité.

2.1.1 Point de départ

Soient V et W deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{V}}$ et $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{W}}$. Nous notons $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{W}}$ les normes associées. Introduisons $a(\cdot,\cdot)$ une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ et $f \in \mathrm{W}^*$. Ici, W^* désigne le dual topologique de W. Le produit de dualité est quant à lui noté

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme sur W^* est définie par

$$\|f\|_{\mathrm{W}^*} := \sup_{w \in \mathrm{W} \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, w \rangle|}{\|w\|_{\mathrm{W}}}.$$

Nous nous intéressons au problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{V} \text{ tel que} \\ a(u, w) = \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in \mathrm{W}. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Commençons par rappeler la définition classique ci-dessous.

Définition 2.1.1 `(Hadamard)` *Le problème (2.1) est dit* bien posé *si, et seulement si, pour tout f, il possède une unique solution u, qui dépend continûment de la donnée :*

$$\|u\|_{\mathrm{V}} \leq C \|f\|_{\mathrm{W}^*},$$

où C est une constante indépendante de f.

Définissons l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{W}^*)$ (l'ensemble des opérateurs bornés de V dans W^*) tel que $\langle Au, w \rangle = a(u, w)$ pour tout $w \in \mathrm{W}$. On peut reformuler le problème (2.1) de la façon suivante

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{V} \text{ tel que} \\ Au = f \text{ dans } \mathrm{W}^*. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Le problème (2.1) est bien posé si et seulement si A est un isomorphisme V de W^*.

2.1.2 La T-coercivité, une reformulation du théorème de Banach–Nečas–Babuška

Le caractère bien posé du problème (2.1) est classiquement lié à une *condition de stabilité*, également appelée *condition inf-sup*.

Définition 2.1.2 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$. Nous dirons qu'elle satisfait une condition de stabilité si*

$$\exists \alpha' > 0 \quad \textit{telle que} \quad \sup_{w \in \mathrm{W} \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|w\|_{\mathrm{W}}} \geq \alpha' \|v\|_{\mathrm{V}}, \quad \textit{pour tout } v \in \mathrm{V}. \tag{2.3}$$

Introduisons à présent une condition *a priori* intermédiaire.

Définition 2.1.3 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$. Nous dirons qu'elle est* T-coercive *s'il existe un isomorphisme $\mathtt{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tel que*

$$\exists \underline{\alpha} > 0 \quad \textit{telle que} \quad |a(v, \mathtt{T}v)| \geq \underline{\alpha} \|v\|_{\mathrm{V}}^2, \quad \textit{pour tout } v \in \mathrm{V}. \tag{2.4}$$

Théorème 2.1.4 `(Caractère bien posé)` *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le problème (2.1) est bien posé ;*

(ii) *la forme a vérifie une condition de stabilité et $\operatorname{im} A = \mathrm{W}^*$;*

(iii) *la forme a vérifie une condition de stabilité et le seul élément $w \in \mathrm{W}$ qui satisfait $a(v, w) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{V}$ est $w = 0$;*

(iv) *la forme a est* T*-coercive.*

Preuve. L'équivalence entre les trois premières assertions est classique (voir par exemple [77, théorème 2.6]).

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ tel que $(v,v') \mapsto a(v,\mathtt{T}v')$ soit coercive sur $\mathrm{V}\times\mathrm{V}$. Puisque cette forme est sesquilinéaire et continue, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un, et un seul $u \in \mathrm{V}$ tel que pour tout $v' \in \mathrm{V}$, $a(u,\mathtt{T}v') = \langle f, \mathtt{T}v'\rangle$. Or $\mathtt{T}$ est bijectif. Par conséquent, il existe un, et un seul $u \in \mathrm{V}$ tel que pour tout $w \in \mathrm{W}$, $a(u,w) = \langle f, w\rangle$. Ceci prouve que le problème (2.1) est bien posé.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) : avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'isométrie $I_{\mathrm{W}^*\to\mathrm{W}} \in \mathcal{L}(\mathrm{W}^*,\mathrm{W})$ définie par $(I_{\mathrm{W}^*\to\mathrm{W}}w, w')_{\mathrm{W}} = \langle w, w'\rangle$, $\forall (w,w') \in \mathrm{W}^*\times\mathrm{W}$. Définissons ensuite l'opérateur $\mathtt{T} := I_{\mathrm{W}^*\to\mathrm{W}} \circ A$. Par hypothèse, $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$. Pour tout $v \in \mathrm{V}$, on a

$$a(v,\mathtt{T}v) = \langle Av, \mathtt{T}v\rangle = (I_{\mathrm{W}^*\to\mathrm{W}} \circ Av, \mathtt{T}v)_{\mathrm{W}} = \|\mathtt{T}v\|^2_{\mathrm{W}} \geq \|v\|^2_{\mathrm{V}}/\|\mathtt{T}^{-1}\|^2.$$

Ceci montre que la forme a est $\mathtt{T}$-coercive. ■

Remarque 2.1.5 *Supposons* $\mathrm{W} = \mathrm{V}$. *Si une forme sesquilinéaire est coercive alors elle vérifie une condition de stabilité. Dans ce cas, il est facile de déterminer un isomorphisme* $\mathtt{T}$ *tel que* a *soit* $\mathtt{T}$*-coercive. Il suffit en effet de prendre* $\mathtt{T} = \mathtt{I}_{\mathrm{V}}$. *En résumé, on peut dire qu'une forme sesquilinéaire est coercive si, seulement si elle est* $\mathtt{I}_{\mathrm{V}}$*-coercive.*

Remarque 2.1.6 *Supposons* $\mathrm{W} = \mathrm{V}$.
Si la forme a *est* hermitienne, *c'est-à-dire si elle vérifie* $a(v,w) = \overline{a(w,v)}$ *pour tout* $v, w \in \mathrm{V}$, *alors la condition de stabilité (2.3) est* suffisante *pour assurer le caractère bien posé du problème.*
Dans le même esprit, pour une forme hermitienne a, *la Définition 2.1.3 peut se simplifier en :* $a(\cdot,\cdot)$ *est* $\mathtt{T}$-coercive *s'il existe un opérateur continu* $\mathtt{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *tel que*

$$\exists \underline{\alpha} > 0 \quad \textit{telle que} \quad |a(v,\mathtt{T}v)| \geq \underline{\alpha}\|v\|^2_{\mathrm{V}}, \quad \textit{pour tout } v \in \mathrm{V}.$$

En d'autres termes, le fait que $\mathtt{T}$ *soit bijectif n'est pas nécessaire. En effet, la condition précédente implique que* $\mathtt{T}$ *est injectif. De plus, pour tout* $v \in \mathrm{V}\setminus\{0\}$, *on a*

$$\frac{|a(v,\mathtt{T}v)|}{\|\mathtt{T}v\|_{\mathrm{V}}} \geq \underline{\alpha}\frac{\|v\|_{\mathrm{V}}}{\|\mathtt{T}v\|_{\mathrm{V}}}\|v\|_{\mathrm{V}} \geq \frac{\underline{\alpha}}{\|\mathtt{T}\|}\|v\|_{\mathrm{V}}.$$

Donc la condition (2.3) est vérifiée.

Pour résumer, dans le cas $\mathrm{W} = \mathrm{V}$, le théorème de Lax-Milgram donne une condition suffisante pour assurer le caractère bien posé du problème (2.1), tandis que le Théorème 2.1.4 fournit une condition nécessaire et suffisante qui s'écrit :
- ou bien la forme a vérifie une condition de stabilité et $\operatorname{im} A = \mathrm{V}^*$;
- ou bien la forme a est $\mathtt{T}$-coercive.

2.1.3 Approximation de la solution

Supposons le problème (2.1) bien posé. Intéressons-nous à l'approximation de la solution u. D'après le Théorème 2.1.4, il existe un opérateur $\mathtt{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive. Introduisons $(\mathrm{V}_h)_h$ et $(\mathrm{W}_h)_h$ deux suites d'espaces vectoriels de dimension finie. Le paramètre h, destiné à tendre vers 0, prend des valeurs strictement positives. De plus, si $n(h)$ désigne la dimension de V_h, alors on a $\lim_{h\to 0} n(h) = +\infty$, de sorte que V_h « approche » V. Nous supposons que cette propriété est également vérifiée pour la suite d'espaces $(\mathrm{W}_h)_h$. Lorsque, pour tout h, $\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$ et $\mathrm{W}_h \subset \mathrm{W}$, l'approximation est dite *conforme*. Dans la suite, nous ferons toujours cette hypothèse. Pour un exemple d'approximation non conforme, nous renvoyons le lecteur à [52], article dans lequel les auteurs développent une technique d'approximation basée sur une méthode de Galerkin discontinu.

Discrétisation naturelle

La discrétisation naturelle du problème (2.1) conduit à introduire le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = \langle f_h, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in \mathrm{W}_h, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

avec des formes discrètes a_h et f_h (possiblement) différentes respectivement de a restreinte à $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$ et f restreinte à W_h. Sous forme d'opérateur, ce problème s'écrit

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ tel que} \\ A_h u_h = f_h \text{ dans } \mathrm{W}_h^*, \end{array} \right. \tag{2.6}$$

avec $A_h \in \mathcal{L}(\mathrm{V}_h, \mathrm{W}_h^*)$ défini par $\langle A_h v_h, w_h \rangle = a_h(v_h, w_h)$ pour tout $(v_h, w_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$.
Ci-dessous, nous étudions la question du caractère bien posé du problème approché (2.5) et nous établissons des estimations d'erreur. Pour que le problème (2.5) soit bien posé, il est nécessaire que la condition $\dim \mathrm{V}_h = \dim \mathrm{W}_h$ soit vérifiée : nous ferons toujours cette hypothèse.

Définition 2.1.7 *La famille de formes sesquilinéaires* $(a_h)_h$ *est dite* uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable *si*

$$\exists \alpha_\dagger > 0,\ \forall h > 0,\ \forall v_h \in \mathrm{V}_h,\ \sup_{w_h \in \mathrm{W}_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathrm{W}}} \geq \alpha_\dagger \|v_h\|_{\mathrm{V}}. \tag{2.7}$$

Comme pour le problème continu, nous écrivons une condition *a priori* intermédiaire.

Définition 2.1.8 *La famille de formes sesquilinéaires* $(a_h)_h$ *est dite* uniformément $\mathtt{T}_h$-coercive *si*[1]

$$\exists \alpha^\star, \beta^\star > 0,\ \forall h > 0,\ \exists \mathtt{T}_h \in \mathcal{L}(\mathrm{V}_h, \mathrm{W}_h),\ \forall v_h \in \mathrm{V}_h,\ |a_h(v_h, \mathtt{T}_h v_h)| \geq \alpha^\star \|v_h\|_{\mathrm{V}}^2 \text{ et } \|\mathtt{T}_h\| \leq \beta^\star. \tag{2.8}$$

Introduisons ensuite pour tout $h > 0$ et tout $v_h \in \mathrm{V}_h$,

$$Cons_{f,h} = \sup_{w_h \in \mathrm{W}_h \setminus \{0\}} \frac{|\langle f - f_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_{\mathrm{W}}}, \tag{2.9}$$

$$Cons_{a,h}(v_h) = \sup_{w_h \in \mathrm{W}_h \setminus \{0\}} \frac{|(a - a_h)(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathrm{W}}}. \tag{2.10}$$

Nous qualifierons ces termes de *termes de consistance* car ils mesurent l'écart entre les formes exactes (resp. a et f) et les formes approchées (resp. a_h et f_h). On peut obtenir des estimations d'erreur mettant en jeu ces termes de consistance. Le Théorème 2.1.4 prouve que le problème (2.5) est bien posé dans $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$. Lorsque a_h est égale à a restreinte à $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$ pour tout $h > 0$, classiquement, on utilise le lemme de Fortin (voir [32, 77]) pour montrer que la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable et pour obtenir des estimations d'erreur. Avec nos notations, ce lemme s'énonce ainsi : a est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable si et seulement s'il existe $\beta' > 0$ tel que, pour tout $h > 0$ et tout $v \in \mathrm{V}$, il existe $\Pi_h(v) \in \mathrm{V}_h$ tel que

$$a(\Pi_h(v), w_h) = a(v, w_h), \quad \forall w_h \in \mathrm{W}_h \qquad \text{et} \qquad \|\Pi_h(v)\|_{\mathrm{V}} \leq \beta' \|v\|_{\mathrm{V}}.$$

Ci-dessous, nous proposons une approche alternative pour prouver que la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable, basée une fois de plus sur la théorie de la $\mathtt{T}$-coercivité.

Théorème 2.1.9 `(Caractère bien posé du problème discrétisé)` *Si* $\dim \mathrm{V}_h = \dim \mathrm{W}_h$ *et si la famille de formes sesquilinéaires* $(a_h)_h$ *est uniformément bornée, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Notons que si $\mathtt{T}_h$ vérifie $|a_h(v_h, \mathtt{T}_h v_h)| \geq \alpha^\star \|v_h\|_{\mathrm{V}}^2$ pour tout $v_h \in \mathrm{V}_h$ alors $\mathtt{T}_h$ est injectif. Puisque V_h et W_h sont de dimension finie avec $\dim \mathrm{V}_h = \dim \mathrm{W}_h$, on déduit que $\mathtt{T}_h$ est un isomorphisme.

(i) *le problème (2.5) est bien posé et* $(A_h^{-1})_h$ *est uniformément borné ;*
(ii) *la famille* $(a_h)_h$ *est uniformément* $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$*-stable ;*
(iii) *la famille* $(a_h)_h$ *est uniformément* $\mathtt{T}_h$*-coercive.*

De plus, si l'une des conditions ci-dessus est satisfaite, alors l'erreur $\|u - u_h\|_{\mathrm{V}}$ *est bornée par*

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{V}} \leq C \inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \left(\|u - v_h\|_{\mathrm{V}} + Cons_{f,h} + Cons_{a,h}(v_h)\right), \tag{2.11}$$

avec $C := \max\left(\frac{1}{\alpha_\dagger}, \frac{\|a\|}{\alpha_\dagger} + 1\right) > 0$ *indépendante de* h.

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (iii) : définissons $\mathtt{T}_h := I_{\mathrm{W}_h^* \to \mathrm{W}_h} \circ A_h$ où $I_{\mathrm{W}_h \to \mathrm{W}_h^*}$ est l'isométrie de W_h^* dans W_h. La famille de formes $(a_h)_h$ est uniformément bornée. Par conséquent, la famille $(\mathtt{T}_h)_h$ l'est également. Par ailleurs, puisque $(A_h^{-1})_h$ est uniformément bornée, il existe une constante C_1 telle que, pour tout $h > 0$, $\|\mathtt{T}_h^{-1}\| \leq C_1$. Pour tout $v_h \in \mathrm{V}_h$, on a alors

$$a_h(v_h, \mathtt{T}_h v_h) = \langle A_h v_h, \mathtt{T}_h v_h \rangle = \|\mathtt{T}_h v_h\|_{\mathrm{W}}^2 \geq \frac{1}{C_1^2} \|v_h\|_{\mathrm{V}}^2.$$

Ceci prouve que la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathtt{T}_h$-coercive.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : pour $v_h \in \mathrm{V}_h \setminus \{0\}$, on a

$$\sup_{w_h \in \mathrm{W}_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathrm{W}}} \geq \frac{|a_h(v_h, \mathtt{T}_h v_h)|}{\|\mathtt{T}_h v_h\|_{\mathrm{W}}} \geq \alpha^\star \frac{\|v_h\|_{\mathrm{V}}^2}{\|\mathtt{T}_h v_h\|_{\mathrm{W}}} \geq \frac{\alpha^\star}{\beta^\star} \|v_h\|_{\mathrm{V}}.$$

Ainsi, $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : D'après le Théorème 2.1.4, si la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$-stable, le problème (2.5) est bien posé. De plus, la famille (A_h^{-1}) est uniformément bornée. En effet, $\|A_h^{-1} f\| \leq \|f\|/\alpha_\dagger$.

Maintenant, concentrons-nous sur l'estimation d'erreur. Par hypothèse, (2.7) est vraie pour un certain $\alpha_\dagger > 0$. Étant donnée $v_h \in \mathrm{V}_h$, il existe $w_h \in \mathrm{W}_h$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\dagger \|u_h - v_h\|_{\mathrm{V}} \|w_h\|_{\mathrm{V}} &\leq |a_h(u_h - v_h, w_h)|, \text{ et on peut vérifier que} \\ a_h(u_h - v_h, w_h) &= \langle f_h - f, w_h \rangle + a(u - v_h, w_h) + (a - a_h)(v_h, w_h). \end{aligned}$$

Il suit

$$\|u_h - v_h\|_{\mathrm{V}} \leq \frac{1}{\alpha_\dagger}(Cons_{f,h} + \|a\| \, \|u - v_h\|_{\mathrm{V}} + Cons_{a,h}(v_h)),$$

ce qui conduit à (2.11), puisque $\|u - u_h\|_{\mathrm{V}} \leq \|u - v_h\|_{\mathrm{V}} + \|u_h - v_h\|_{\mathrm{V}}$. ■

Corollaire 2.1.10 *Supposons qu'il existe un isomorphisme* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ *tel que* $(v, v') \mapsto a(v, \mathtt{T}v')$ *soit coercive sur* $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$. *Supposons aussi* $T\mathrm{V}_h \subset \mathrm{W}_h$ *et* $\lim_{h \to 0} \|a_h - a\| = 0$. *Alors, la famille* $(a_h)_h$ *est uniformément* $\mathtt{T}_h$*-coercive pour* h *suffisamment petit de sorte que l'estimation d'erreur (2.11) est vraie.*

Preuve. En effet, on a, en notant $\mathtt{T}_h = \mathtt{T}_{|\mathrm{V}_h}$,

$$|a_h(v_h, \mathtt{T}_h v_h)| = |a(v_h, \mathtt{T}v_h) - (a_h - a)(v_h, \mathtt{T}v_h)| \geq (\underline{\alpha} - \|a_h - a\| \, \|T\|)\|v_h\|_{\mathrm{V}}^2.$$

Il suffit alors de prendre h_0 assez petit pour avoir $\|a_h - a\| \, \|T\| < \underline{\alpha}$ pour tout $h \in]0; h_0]$. ■

Remarque 2.1.11 *Bien entendu, si la forme* a *est* $\mathtt{T}$*-coercive, si* $T\mathrm{V}_h \subset \mathrm{W}_h$ *pour tout* $h > 0$ *et si* a_h *est égale à la restriction de* a *à* $\mathrm{V}_h \times \mathrm{W}_h$, *alors la famille* $(a_h)_h$ *est uniformément* $\mathtt{T}_h$*-coercive. Dans ce cas le problème (2.5) est bien posé pour tout* $h > 0$ *et l'estimation d'erreur (2.11) est vraie.*

Discrétisation de la forme coercive

Présentons une seconde méthode pour approcher la solution du problème (2.1) que nous supposons bien posé. D'après le Théorème 2.1.4, il existe un opérateur $\mathtt{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive. La forme $\tilde{a} \ : \ (v, v') \mapsto a(v, \mathtt{T}v')$ est sesquilinéaire continue et coercive sur $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$. Par conséquent, à condition que l'opérateur $\mathtt{T}$ soit *connu explicitement*[2], au lieu de résoudre le problème (2.1) directement, on peut résoudre le problème équivalent

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{V} \text{ tel que} \\ \tilde{a}(u, v) = \langle \tilde{f}, v \rangle, \quad \forall v \in \mathrm{V}, \end{array} \right. \tag{2.12}$$

où $\tilde{f} \in \mathrm{V}^*$ est définie par $v \mapsto \langle f, \mathtt{T}v \rangle$. En effet, étant donné V_h un sous-espace de V, on peut résoudre le problème approché

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ tel que} \\ \tilde{a}_h(u_h, v_h) = \langle \tilde{f}_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in \mathrm{V}_h. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Ci-dessus, les formes sont définies par

$$\tilde{a}_h(v_h, w_h) = a_h(v_h, \mathtt{T}w_h) \quad \text{et} \quad \langle \tilde{f}_h, w_h \rangle = \langle f_h, \mathtt{T}w_h \rangle, \qquad \forall v_h, w_h \in \mathrm{V}_h.$$

On peut alors utiliser le lemme de Céa (si $a_h = a_{|\mathrm{V}_h \times (\mathtt{T}\mathrm{V}_h)}$, $f_h = f_{|(\mathtt{T}\mathrm{V}_h)}$)) ou plus généralement le premier lemme de Strang pour obtenir une estimation d'erreur qui s'écrit

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{V}} \leq C \inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \left\{ \|u - v_h\|_{\mathrm{V}} + Cons_{\tilde{f},h} + Cons_{\tilde{a},h}(v_h) \right\}. \tag{2.14}$$

Dans l'estimation précédente, $C > 0$ est indépendante de h et de la donnée f. Les termes de consistance sont respectivement définis, pour tout $h > 0$ et tout $v_h \in \mathrm{V}_h$, par

$$Cons_{\tilde{f},h} = \sup_{w_h \in \mathrm{V}_h \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{f} - \tilde{f}_h, w_h \rangle_{\mathrm{V}}|}{\|w_h\|_{\mathrm{V}}}, \qquad Cons_{\tilde{a},h}(v_h) = \sup_{w_h \in \mathrm{V}_h \setminus \{0\}} \frac{|(\tilde{a} - \tilde{a}_h)(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathrm{V}}}.$$

Remarque 2.1.12 *Dans ce cas simple, on approche directement le problème (2.1) dans* $\mathrm{V}_h \times (\mathtt{T}\mathrm{V}_h)$.

Comparaison entre les deux méthodes d'approximation

D'un point de vue pratique, il y a une différence fondamentale entre ce que nous appelons la discrétisation « naturelle » et la discrétisation de la forme coercive. En effet, pour la discrétisation naturelle, l'isomorphisme $\mathtt{T}$ est simplement un outil théorique et son action n'est pas implémentée dans le code de calcul. À l'inverse, la discrétisation de la forme coercive nécessite la discrétisation de $\mathtt{T}$. L'avantage de cette dernière approche réside dans le fait que la démonstration de la convergence de la méthode est obtenue directement.

2.2 Application au problème de transmission scalaire : caractère bien posé

2.2.1 Notations

Revenons au problème de transmission scalaire entre un matériau positif et un matériau négatif que nous avons étudié dans le Chapitre 1. Rappelons-en les caractéristiques principales. Donnons-nous Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux domaines vérifiant

2. Par « $\mathtt{T}$ est *connu explicitement* », il faut entendre que l'action de $\mathtt{T}$ sur les éléments $v_h \in \mathrm{V}_h$ peut être calculée facilement.

$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Nous supposons que les frontières $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ sont des polygones (connexes). Pour $k = 1, 2$, introduisons $\Gamma_k := \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$. Nous appelons interface l'ensemble $\Sigma := \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 = \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2$. De façon générale, si $\mathcal{O}$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$, nous notons $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ et $(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^2$, et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées.

Le problème que nous étudions est le suivant

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = \langle f, w\rangle, \quad \forall w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f \text{ dans } \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \end{array} \right. . \tag{2.15}$$

avec $a(u,w) = (\sigma\nabla u, \nabla w)_\Omega$. Ci-dessus, $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dont la trace est nulle sur $\partial\Omega$ tandis que $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ note le dual topologique de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$: $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) := \mathrm{H}^1_0(\Omega)^*$. En d'autres termes, avec les notations que nous avons déjà introduites dans ce chapitre, nous avons $\mathrm{V} = \mathrm{W} = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathrm{V}^* = \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Nous notons $\|\cdot\|_{\mathrm{V}} = \|\cdot\|_{\mathrm{W}} = \|\nabla\cdot\|_\Omega$. Pour $k = 1, 2$, on a $\mathrm{V}_k := \{v_{|\Omega_k} \ : \ v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\}$ muni de la semi-norme $\|v\|_{\mathrm{V}_k} := \|\nabla v\|_{\Omega_k}$. Nous utiliserons de nouveau les espaces d'« opérateurs de transfert »

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= \{R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \,|\, R_1 v_1|_\Sigma = v_1|_\Sigma, \forall v_1 \in \mathrm{V}_1\} \\ \text{et} \quad \mathcal{R}_2 &:= \{R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_1) \,|\, R_2 v_2|_\Sigma = v_2|_\Sigma, \forall v_2 \in \mathrm{V}_2\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier la présentation, nous supposerons que $\sigma_1 := \sigma|_{\Omega_1}$ et $\sigma_2 := \sigma|_{\Omega_2}$ sont des constantes vérifiant $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$. De façon générale, pour toute fonction mesurable v, nous définissons $v_k := v_{|\Omega_k}$, $k = 1, 2$.

Définition 2.2.1 *Nous appelons* contraste *le rapport* $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$.

2.2.2 Exemples

◇ Exemple de la cavité. Nous illustrons ci-dessous, sur un cas pratique, la différence entre les résultats fournis par les Théorèmes 1.1.2 et 1.4.2. Rappelons que le Théorème 1.1.2 fournit une condition suffisante pour que l'opérateur $A : u \mapsto -\mathrm{div}(\sigma\nabla u)$ soit un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Le Théorème 1.4.2 donne un critère pour que A soit Fredholm d'indice zéro.

Considérons la cavité (voir la Figure 2.3) définie par $\Omega := \{(x,y) \in]-a;b[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-a;0[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;b[\times]0;1[$ avec $a > 0$ et $b > 0$. L'interface Σ est alors égale au segment $\{0\}\times]0;1[$. Sans perte de généralité, nous supposons $a \geq b$. On traite le cas $a < b$ en échangeant les rôles de Ω_1 et de Ω_2.

- D'après le Théorème 1.4.2 (ici $\mathcal{S}_{int} = \mathcal{S}^2_{ext} = \emptyset$), l'opérateur A est Fredholm d'indice 0 dès lors que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$.

- Lorsque $\kappa_\sigma = -1$, l'opérateur A n'est pas de type Fredholm. En particulier, si $a = b$, on a $\dim\ker A = \infty$. Maintenant, supposons $a \neq b$. Prouvons que A est injectif. Considérons u un élément de $\ker A$. Définissons $e := u_1 - u_2 \circ s$ sur $]-b;0[\times]0;1[$ avec $s(x,y) = (-x,y)$. Cet élément e satisfait les équations suivantes :

  $$\Delta e = 0 \ \text{ dans } \ ]-b;0[\times]0;1[; \qquad e = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma \quad \text{ et } \quad \partial_x e = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma.$$

  Remarquons que $\sigma_1\partial_x u_1 = \sigma_2\partial_x u_2$ sur Σ et donc $\partial_x e = 0$ sur Σ. Notons que ce résultat n'est vrai que parce que $\kappa_\sigma = -1$. Le théorème de Holmgren (voir le lemme 4.15 dans [117]) implique $e = 0$ dans $]-b;0[\times]0;1[$. Puisque $u_2 = 0$ sur $\{b\}\times]0;1[$, on déduit $u_1 = 0$ sur $\{-b\}\times]0;1[$. Définissons $\tilde{\Omega} :=]-a;-b[\times]0;1[$. On a $\Delta u_1 = 0$ dans $\tilde{\Omega}$ et $u_1 = 0$ sur $\partial\tilde{\Omega}$. Par conséquent, $u_1 = 0$ sur $\tilde{\Omega}$. Toujours en vertu du théorème de Holmgren, cela prouve $u = 0$ dans Ω. Ainsi, lorsque $\kappa_\sigma = -1$ et lorsque $a \neq b$, A est injectif. Puisque A n'est pas de type Fredholm, on déduit que $\mathrm{im}\,A$ n'est pas fermée dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

- Étudions les configurations pour lesquelles A est un isomorphisme. Pour cela, introduisons les opérateurs $R_1 : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ et $R_2 : \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_1$ tels que

$$(R_1 v_1)(x,y) = v_1(-a\,x/b, y) \qquad \text{et} \qquad (R_2 v_2)(x,y) = \begin{cases} v_2(-x,y) & \text{si } -b \le x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{2.16}$$

pour tout $v_1 \in \mathrm{V}_1$, $v_2 \in \mathrm{V}_2$. On a $R_1 \in \mathcal{R}_1$, $R_2 \in \mathcal{R}_2$, $\|R_1\|^2 = a/b$ et $\|R_2\|^2 = 1$. Par conséquent, d'après le Théorème 1.1.2, A est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ dès que $\kappa_\sigma \notin [-1; -b/a]$.

- Pour cette géométrie particulière, on peut étudier plus précisément la question de l'injectivité de A quand $\kappa_\sigma \in]-1; -b/a]$ $(a \neq b)$. Considérons u un élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $Au = 0$. Le couple (u_1, u_2) vérifie les équations

$$\begin{array}{rcll} \Delta u_1 & = & 0 & \text{dans } \Omega_1; \\ \Delta u_2 & = & 0 & \text{dans } \Omega_2; \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} u_1 - u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma; \\ \sigma_1 \partial_x u_1 - \sigma_2 \partial_x u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}$$

En décomposant u_1 et u_2 en série de Fourier (la famille de $\{y \mapsto \sin(n\pi y)\}_{n=1}^\infty$ est une base de $\mathrm{L}^2(]0;1[)$), on obtient

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^\infty u_1^n \sinh(n\pi(x+a)) \sin(n\pi y) \qquad \text{et} \qquad u_2(x,y) = \sum_{n=1}^\infty u_2^n \sinh(n\pi(x-b)) \sin(n\pi y),$$

où u_1^n et u_2^n sont des constantes. De plus, les conditions de transmission impliquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \begin{array}{rcl} u_1^n \sinh(n\pi a) & = & -u_2^n \sinh(n\pi b) \\ u_1^n \sigma_1 \cosh(n\pi a) & = & u_2^n \sigma_2 \cosh(n\pi b) \end{array} \right. . \tag{2.17}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une solution non triviale au système (2.17) (en (u_1^n, u_2^n)) si et seulement si

$$\sigma_2 \sinh(n\pi a)\cosh(n\pi b) + \sigma_1 \sinh(n\pi b)\cosh(n\pi a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{\tanh(n\pi b)}{\tanh(n\pi a)} = \kappa_\sigma.$$

En conséquence, A est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ si et seulement si $\kappa_\sigma \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a),\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa_\sigma = -\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a)$, l'opérateur A est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension égale à un. La fonction φ_n définie par

$$\varphi_n(x,y) = \begin{cases} \sinh(n\pi(x+a))\sin(n\pi y) & \text{sur } \Omega_1 \\ -\dfrac{\sinh(n\pi a)}{\sinh(n\pi b)} \sinh(n\pi(x-b))\sin(n\pi y) & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

constitue alors une base de $\ker A$.

Remarque 2.2.2 *La fonction $g : z \mapsto -\tanh(z\pi b)/\tanh(z\pi a)$ est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (pour $a > b$) et $g(1) = -\tanh(\pi b)/\tanh(\pi a) < -b/a$ tandis que $\lim_{z\to+\infty} g(z) = -1$.*

◇ Exemple du coin intérieur. Considérons la géométrie de la Figure 2.4. Plus précisément, définissons $\Omega :=]-1;1[\times]-1;1[$, $\Omega_2 :=]0;1[^2$ et $\Omega_1 := \Omega \backslash \overline{\Omega_2}$. D'après le Théorème 1.4.2, l'opérateur A est Fredholm d'indice 0 dès que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-3; -1/3]$. Comme dans [129], introduisons les

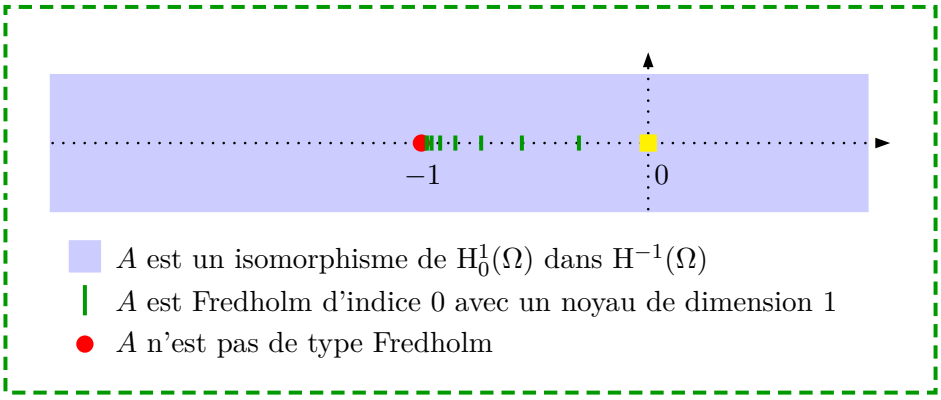


FIGURE 2.1 – Résumé des propriétés de l'opérateur A pour la cavité en fonction de la valeur du contraste $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}^*$. Pour cette cavité $a > b$ et les points en vert sont situés en $(-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a), 0)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

opérateurs $R_1 : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ et $R_2 : \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_1$ tels que

$$(R_1 v_1)(x,y) = v_1(-x,y) + v_1(x,-y) - v_1(-x,-y) \qquad \text{pour } v_1 \in \mathrm{V}_1; \tag{2.18}$$

$$(R_2 v_2)(x,y) = \begin{cases} v_2(-x,y) & \text{sur }]-1;0[\times]0;1[\\ v_2(x,-y) & \text{sur }]0;1[\times]-1;0[\\ v_2(-x,-y) & \text{sur }]-1;0[^2 \end{cases} \qquad \text{pour } v_2 \in \mathrm{V}_2. \tag{2.19}$$

On a $R_1 \in \mathcal{R}_1$, $R_2 \in \mathcal{R}_2$, $\|R_1\|^2 = 3$ et $\|R_2\|^2 = 3$. Ainsi, d'après le Théorème 1.1.2, A est en fait un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ dès que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-3;-1/3]$. Le Théorème 1.5.5 prouve lui que A n'est pas de type Fredholm lorsque $\kappa_\sigma \in]-3;-1/3[$.

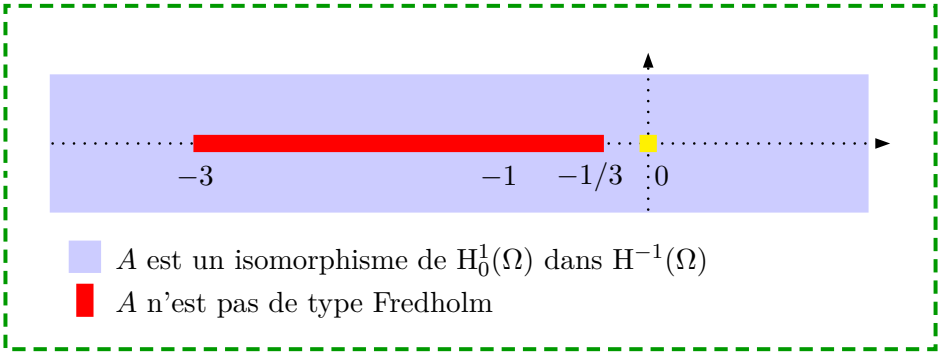


FIGURE 2.2 – Résumé des propriétés de l'opérateur A pour le sommet intérieur de la Figure 2.4 en fonction de la valeur du contraste $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}^*$.

2.2.3 Régularité de la solution

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposons le problème (2.15) bien posé. Considérons un terme source dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Nous nous concentrons donc sur le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = (f,w)_\Omega, \quad \forall w \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.20}$$

Résumons ici quelques résultats concernant la régularité de la solution $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ du problème (2.20). Nous les démontrerons dans le Chapitre 3. Nous les énonçons ici car ils seront utiles pour

établir les estimations d'erreur. Classiquement (voir [109, volume 1, chapitre 2], [88, théorème 2.1.3] et, pour l'étude au voisinage des sommets extérieurs, [88, théorème 2.1.4]), on a le résultat de régularité intérieure suivant.

Proposition 2.2.3 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}}$ ne rencontre pas l'interface Σ. Alors la solution u du problème (2.20) appartient à $\mathrm{H}^{1+s}(\mathcal{O})$, avec l'estimation*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{1+s}(\mathcal{O})} \leq C \|f\|_{\Omega},$$

où la constante C est indépendante de f, et $s \in]0;1]$ dépend uniquement de l'ouverture des coins situés sur la frontière[3].

Au voisinage de l'interface, l'opérateur $v \mapsto -\mathrm{div}\,(\sigma\nabla v)$ n'est plus elliptique et les résultats de régularité ne sont pas classiques. Cependant, les techniques usuelles basées sur les transformées de Fourier et de Mellin peuvent encore être utilisées (cf. Chapitre 3). En particulier, dans un voisinage de la partie régulière de l'interface, on peut prouver que u est localement H^2 de part et d'autre de Σ. Plus précisément, on a la

Proposition 2.2.4 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. Considérons un ouvert $\mathcal{O}$ de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$ et $\overline{\mathcal{O}}$ ne rencontre aucun coin de Σ. Alors la solution u du problème (2.20) est telle que $u_k \in \mathrm{H}^2(\mathcal{O}\cap\Omega_k)$, $k = 1, 2$, avec l'estimation*

$$\|u_1\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O}\cap\Omega_1)} + \|u_2\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O}\cap\Omega_2)} \leq C \|f\|_{\Omega}.$$

Au voisinage d'un coin de Σ, la régularité de u dépend à la fois de la géométrie et de la valeur du contraste. Encore une fois, nous détaillerons tout ceci dans le Chapitre 3. Cependant, pour résumer, puisque nous avons supposé le problème (2.15) bien posé, indiquons qu'il existe $s \in]0;1]$ tel que $u_k \in \mathrm{H}^{1+s}(\mathcal{O} \cap \Omega_k)$, $k = 1, 2$, avec l'estimation

$$\|u_1\|_{\mathrm{H}^{1+s}(\mathcal{O}\cap\Omega_1)} + \|u_2\|_{\mathrm{H}^{1+s}(\mathcal{O}\cap\Omega_2)} \leq C \|f\|_{\Omega}.$$

Il est important de mentionner que $s > 0$ peut être arbitrairement petit, selon le contraste et la géométrie de l'interface. Bien entendu, cela aura des conséquences sur les vitesses de convergence des méthodes d'approximation. Ceci dit, nous pouvons poursuivre.

2.3 Application au problème de transmission scalaire : approximation de la solution avec une hypothèse sur le maillage

Ci-dessous, nous proposons une méthode d'approximation simple de la solution du problème (2.15) basée sur l'élément fini de Lagrange P_1. Nous établissons en outre des estimations d'erreur. Pour améliorer ces dernières, nous pourrions utiliser des méthodes de raffinement de maillage ou employer des éléments finis d'ordres plus élevés. Cependant, nous ne nous attarderons pas sur ces points.

2.3.1 Approximabilité

Considérons $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulations régulière de $\overline{\Omega}$. Nous supposons que pour tout triangle τ, on a $\tau \subset \overline{\Omega_1}$ ou bien $\tau \subset \overline{\Omega_2}$.
Définissons la famille d'espaces de dimension finie

$$\mathrm{V}_h := \left\{ v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que } v|_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{T}_h \right\},$$

3. Si Ω est convexe ou si $\overline{\mathcal{O}}$ ne rencontre aucun coin de $\partial\Omega$, alors on peut prendre $s = 1$.

où $\mathbb{P}_1(\tau)$ est l'espace des polynômes de degré 1 sur le triangle τ. Considérons la famille de problèmes (indexée par h)

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ tel que} \\ a(u_h, w_h) = (f, w_h)_\Omega, \quad \forall w_h \in \mathrm{V}_h. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

Définition 2.3.1 *Nous dirons que la suite* $(\mathrm{V}_h)_h$ *satisfait la* propriété d'approximabilité *si*

$$\forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \qquad \lim_{h\to 0}\left(\inf_{v_h\in \mathrm{V}_h} \|v - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}\right) = 0.$$

Définition 2.3.2 *Pour* $\mathtt{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$*, nous dirons que les maillages* $(\mathcal{T}_h)_h$ *sont* $\mathtt{T}$*-conformes si* $\mathtt{T}\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}_h$ *pour tout* h*.*

2.3.2 Approximation numérique : maillage T-conforme

Nous souhaitons appliquer le Corollaire 2.1.10 pour obtenir des estimations d'erreur. Dans cette optique, nous avons besoin de $\mathtt{T}$-coercivité sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ avec un isomorphisme $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mathtt{T}\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}_h$.

◇ Exemple de la cavité. Nous considérons ici la géométrie de la Figure 2.3 : $\Omega := \{(x, y) \in]-2; 1[\times]0; 1[\}$, $\Omega_1 :=]-2; 0[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 :=]0; 1[\times]0; 1[$. Nous supposons les maillages symétriques par rapport à $\Sigma := \{0\}\times]0; 1[$. Comme nous l'avons fait dans le Chapitre 1, travaillons avec les opérateurs $\mathtt{T}_1$, $\mathtt{T}_2$ tels que pour $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

$$\mathtt{T}_1 v = \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 + 2R_1 v_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad ; \quad \mathtt{T}_2 v = \begin{cases} v_1 - 2R_2 v_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}, \tag{2.22}$$

où R_1 et R_2 sont respectivement des éléments de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Intéressons-nous à la situation $\kappa_\sigma < -1$. L'opérateur $\mathtt{T}_2$ défini en (2.22) à partir de R_2 introduit (2.16) est tel que $\mathtt{T}_2\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}_h$. Ceci vient du fait que nous supposons les maillages symétriques par rapport à l'interface. Par conséquent, d'après le Corollaire 2.1.10, le problème (2.21) est bien posé pour chaque $h > 0$. De plus, on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq Ch\|f\|_\Omega,$$

car, dans cette situation, $u_k \in \mathrm{H}^2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, d'après la Proposition 2.2.4.
Le même résultat peut être obtenu lorsque $-1/2 < \kappa_\sigma < 0$ en utilisant un maillage *ad hoc* et en travaillant cette fois-ci avec $\mathtt{T}_1$.
Par contre, pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/2]\backslash\{-\tanh(n\pi)/\tanh(2n\pi),\ n \in \mathbb{N}^*\}$, nous ne pouvons pas conclure car nous n'avons pas à notre disposition d'opérateur explicite $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive.

◇ Exemple du sommet intérieur. De nouveau ici, $\Omega :=]-1; 1[\times]-1; 1[$, $\Omega_2 :=]0; 1[^2$ et $\Omega_1 := \Omega\backslash\overline{\Omega_2}$. En travaillant avec le maillage de la Figure 2.4, on prouve que le problème (2.21) est bien posé pour chaque $h > 0$ dès que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-3; -1/3]$. De plus, on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq Ch^s\|f\|_\Omega, \tag{2.23}$$

avec $0 < s \leq 1$ qui dépend uniquement du contraste (car l'angle du sommet intérieur a été fixé).

2.3.3 Approximation numérique : maillage localement T-conforme

Dans les applications du paragraphe précédent, nous avons travaillé avec des opérateurs $\mathtt{T}$ de la forme

$$\mathtt{T}_1 v = \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 + 2R_1 v_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad ; \quad \mathtt{T}_2 v = \begin{cases} v_1 - 2R_2 v_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} ;$$

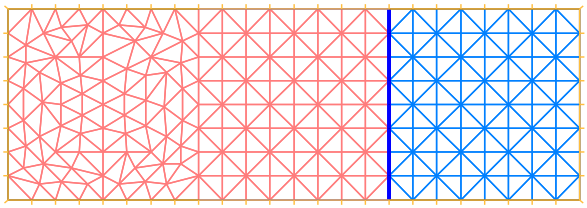


FIGURE 2.3 – Maillage « symétrique » pour la cavité.

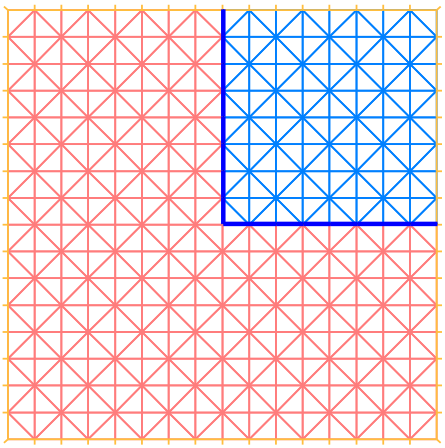


FIGURE 2.4 – Maillage « symétrique » pour le sommet intérieur.

avec $R_1 \in \mathcal{R}_1$, $R_2 \in \mathcal{R}_2$. Dans cette section, nous imposerons en plus $R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega_1), \mathrm{L}^2(\Omega_2))$ et $R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega_2), \mathrm{L}^2(\Omega_1))$. Notons que cette propriété est vérifiée pour les opérateurs de transfert géométriques que nous avons introduits jusqu'à présent. La question que nous souhaitons considérer ici est la suivante : peut-on affaiblir les hypothèses du Corollaire 2.1.10 pour prouver un résultat de convergence lorsque $\mathtt{T}_1\mathrm{V}_h \not\subset \mathrm{V}_h$ ou $\mathtt{T}_2\mathrm{V}_h \not\subset \mathrm{V}_h$? Nous allons voir que l'on peut encore montrer des résultats de convergence lorsque le maillage est simplement localement $\mathtt{T}_k$-conforme, $k = 1$ ou 2. Commençons par clarifier cette notion. Introduisons I_h l'opérateur d'interpolation classique tel que $I_h(v) = \sum_{i=1}^{m(h)} v(a_i)\varphi_i$ pour tout $v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$. Ici, $(a_i)_{i=1\dots m(h)}$ sont les nœuds (incluant les nœuds du maillage situés sur la frontière) et φ_i, $i = 1 \dots m(h)$, sont les fonctions de base qui vérifient $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$. Définissons

$$\mathtt{T}_{1h}^{\mathrm{loc}} v := \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 + 2I_h(\chi)R_1 v_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad ; \quad \mathtt{T}_{2h}^{\mathrm{loc}} v := \begin{cases} v_1 - 2I_h(\chi)R_2 v_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases},$$

où $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ est une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ dans un voisinage de Σ (c'est-à-dire qu'il existe un ouvert non vide $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Sigma \subset \mathcal{V}$ et $\chi = 1$ sur $\mathcal{V}$).

Définition 2.3.3 *Pour $k = 1, 2$, nous dirons que les maillages sont* localement $\mathtt{T}_k$-conformes *si $\mathtt{T}_{kh}^{loc}\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}_h$ pour tout h plus petit qu'un $h_0 > 0$ donné.*

Proposition 2.3.4 *Supposons que la forme a soit $\mathtt{T}_k$-coercive, que les maillages soient localement $\mathtt{T}_k$-conformes et que la propriété d'approximabilité soit vérifiée. Alors, pour h suffisamment petit, il existe une et une seule solution u_h au problème (2.21) avec l'estimation*

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}, \tag{2.24}$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend ni de h ni de f.

Preuve. Supposons que a soit $\mathtt{T}_1$-coercive et que le maillage soit localement $\mathtt{T}_1$-conforme. Montrons que la famille $(a_h)_h$ définie par $a_h(v_h, w_h) = a(v_h, w_h)$ pour tout $v_h, w_h \in \mathrm{V}_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h$-stable, pour h suffisamment petit.
Pour ce faire, nous allons d'abord prouver l'estimation, pour h assez petit,

$$|a(u_h, \mathtt{T}_{1h}^{\mathrm{loc}} u_h)| \geq C_1 \|u_h\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} - C_2 \|u_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|u_h\|_\Omega, \qquad \forall u_h \in \mathrm{V}_h, \tag{2.25}$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont deux constantes indépendantes de h. Définissons l'opérateur intermédiaire $\mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

$$\mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} v := \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -v_2 + 2\chi R_1 v_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}.$$

Pour $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(v, \mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} v) &= (|\sigma|\nabla v, \nabla v)_\Omega - 2(|\sigma_2|\nabla v_2, \nabla(\chi R_1 v_1))_{\Omega_2} \\ &= (|\sigma|\nabla v, \nabla v)_\Omega - 2(|\sigma_2|\chi\nabla v_2, \nabla(R_1 v_1))_{\Omega_2} - 2(|\sigma_2|\nabla v_2, (R_1 v_1)\nabla\chi)_{\Omega_2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Puisque $0 \leq \chi \leq 1$ et puisque a est $\mathtt{T}_1$-coercive, en utilisant une inégalité de Young comme dans la preuve du Théorème 1.1.1 du Chapitre 1, on obtient l'existence d'une constante $C_3 > 0$ telle que

$$|a(v, \mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} v) + 2(|\sigma_2|\nabla v_2, (R_1 v_1)\nabla\chi)_{\Omega_2}| \geq C_3 \|v\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \tag{2.27}$$

Par ailleurs, puisque $R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega_1), \mathrm{L}^2(\Omega_2))$, on peut écrire

$$2|(|\sigma_2|\nabla v_2, (R_1 v_1)\nabla\chi)_{\Omega_2}| \leq C_4 \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_\Omega. \tag{2.28}$$

En injectant (2.27) et (2.28) dans (2.26), on trouve

$$|a(v, \mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} v)| \geq C_3 \|v\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} - C_4 \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_\Omega.$$

On observe alors que, pour $v_h \in \mathrm{V}_h$, on a

$$|a(v_h, \mathtt{T}_1^{\mathrm{loc}} v_h) - a(v_h, \mathtt{T}_{1h}^{\mathrm{loc}} v_h)| \leq C_5 \|\chi - I_h(\chi)\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|v_h\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_6 h |\chi|_{\mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)} \|v_h\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$$

d'après le corollaire 1.109 de [77]. Ainsi,

$$|a(v_h, \mathtt{T}_{1h}^{\mathrm{loc}} v_h)| \geq (C_3 - C_6 |\chi|_{\mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)} h) \|v_h\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} - C_4 \|v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|v_h\|_\Omega,$$

et (2.25) est vraie pour h suffisamment petit.

L'estimation (2.25) sera l'outil qui va nous permettre de montrer que la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h$-stable. Raisonnons par l'absurde et supposons que cette dernière propriété ne soit pas vraie. Il existe alors une suite d'espaces $(\mathrm{V}_h)_h$ et une suite d'éléments $(v_h)_h$, avec $v_h \in \mathrm{V}_h$, telles que

$$\|v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{w_h \in \mathrm{V}_h \setminus \{0\}} \frac{|a(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}} < \mu_h, \qquad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \mu_h = 0. \tag{2.29}$$

Puisque $(v_h)_h$ est bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et puisque l'injection de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte, il existe v dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $(v_h)_h$ converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et faiblement dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vers v. De façon usuelle, grâce à la propriété d'approximabilité, on montre que v satisfait le problème homogène. Par conséquent, la fonction v est nulle. En utilisant (2.25) et l'uniforme continuité de la famille $(\mathtt{T}_{1h}^{\mathrm{loc}})_h$, on déduit que, pour h assez petit, on a

$$C_1 - C_2 \|v_h\|_\Omega \leq C_7 \mu_h,$$

où C_1, C_2 et C_7 sont trois constantes strictement positives indépendantes de h. Puisque $(\|v_h\|_\Omega)_h$ et $(\mu_h)_h$ tendent vers 0, nous sommes conduits à une absurdité. Ainsi, la famille $(a_h)_h$ est uniformément $\mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h$-stable pour h assez petit et le Théorème 2.1.9 assure que les problèmes (2.21) sont bien posés avec l'estimation (2.24). On procède de la même façon en travaillant avec $\mathtt{T}_2$ quand a est $\mathtt{T}_2$-coercive et quand le maillage est localement $\mathtt{T}_2$-conforme. ■

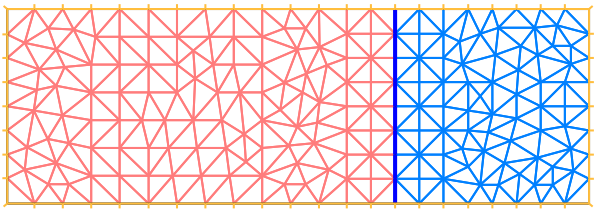


FIGURE 2.5 – Maillage localement « symétrique » pour la cavité.

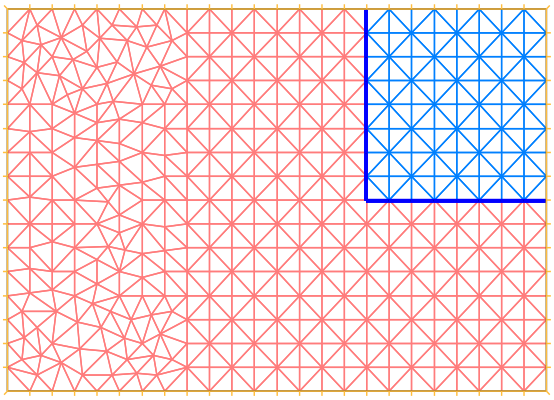


FIGURE 2.6 – Maillage localement « symétrique » pour le sommet intérieur–bis.

Remarque 2.3.5 *Il suffit d'avoir* $\lim_{h\to 0}\left(|\chi|_{\mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)}h\right) = 0$ *dans la preuve de la Proposition 2.3.4. Par conséquent, on peut autoriser à la fonction* χ *de varier avec* h*. Ainsi, on peut affaiblir la condition de* $\mathtt{T}$*-conformité pour le maillage : on a simplement besoin que le maillage soit* $\mathtt{T}$*-conforme dans un voisinage de l'interface dont l'aire tend vers* 0 *en* h^t *pour un certain* $t \in]0;1/2[$.

◇ EXEMPLE DE LA CAVITÉ AVEC UN MAILLAGE LOCALEMENT SYMÉTRIQUE (FIGURE 2.5). Considérons une famille de maillages, comme sur la Figure 2.5, symétriques par rapport à Σ, dans la région $]-0.25;0.25[\times]0;1[$. La valeur 0.25 est choisie arbitrairement. De nouveau, $\Omega := \{(x,y) \in]-2;1[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-2;0[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;1[\times]0;1[$. D'après la Proposition 2.3.4, le problème (2.21) est bien posé pour h suffisamment petit dès lors que $\kappa_\sigma \notin [-1;-1/2]$. De plus, dans ce cas, on a l'estimation d'erreur

$$\|u-u_h\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq Ch\|f\|_\Omega.$$

◇ EXEMPLE DU SOMMET INTÉRIEUR–BIS (FIGURE 2.6). Considérons maintenant la géométrie et le maillage de la Figure 2.6. Plus précisément, définissons $\Omega :=]-2;1[\times]-1;1[$, $\Omega_2 :=]0;1[^2$ et $\Omega_1 := \Omega\backslash\overline{\Omega_2}$. D'après le Théorème 1.4.2, l'opérateur A est Fredholm d'indice 0 dès que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-3;-1/3]$.
En prolongeant l'opérateur R_2 défini en (2.19) par 0 sur $]-2;-1[\times]-1;1[$, on trouve que A est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ quand $\kappa_\sigma < -3$, de sorte que le problème (2.21) est bien posé pour h assez petit.
Maintenant, supposons $-1/3 < \kappa_\sigma < 0$ et A injectif. Introduisons $\chi_0 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},[0;1])$ une fonction de troncature telle que $\chi_0(x) = 1$ pour $x \geq -1/2$ et $\chi_0(x) = 0$ pour $x \leq -1$. Définissons $\chi : (x,y) \mapsto \chi_0(x)$. En travaillant avec l'opérateur R_1 défini en (2.18) et la fonction χ, en utilisant la Proposition 2.3.4, on montre que le problème (2.21) est bien posé pour h suffisamment petit.
De plus, dans les deux cas ($\kappa_\sigma < -3$ et $-1/3 < \kappa_\sigma < 0$, A injectif), l'estimation d'erreur (2.23) est vraie.

2.4 Application au problème de transmission scalaire : approximation de la solution sans hypothèse sur le maillage

2.4.1 Approximation numérique : maillage quelconque

Dans ce paragraphe, on souhaite établir un résultat d'approximation dans des configurations pour lesquelles le maillage n'est ni $\mathtt{T}$-conforme ni localement $\mathtt{T}$-conforme. Dans cette situation, le Corollaire 2.1.10 et la Proposition 2.3.4 ne permettent pas de justifier le caractère bien posé des problèmes discrets. En d'autres termes, on se demande si on peut construire une famille $(\mathtt{T}_h)_h$

d'opérateurs discrets tels que la forme a soit uniformément $\mathtt{T}_h$-coercive, au moins pour h assez petit. Des méthodes ont déjà été proposées dans [25] et [129] pour obtenir de tels résultats. La première repose sur un relèvement de la trace sur l'interface. La seconde utilise l'opérateur $R_h = \Pi_h^{\mathcal{SZ}} R$ où $\Pi_h^{\mathcal{SZ}}$ désigne l'opérateur d'interpolation de Scott-Zhang [141]. Plus précisément, les auteurs appliquent l'opérateur d'interpolation de Scott-Zhang respectivement à $R_1 u_h$ (défini sur Ω_2) et $R_2 u_h$ (défini sur Ω_1), où $R_1 \in \mathcal{R}_1$ et $R_2 \in \mathcal{R}_2$. Puisque l'opérateur de Scott-Zhang préserve les valeurs des fonctions sur la frontière, on a $\Pi_h^{\mathcal{SZ}}(R_1 u_h) = u_h$ et $\Pi_h^{\mathcal{SZ}}(R_2 u_h) = u_h$ sur l'interface Σ. La principale limitation de cette approche réside dans le fait que son domaine de validité n'est pas clair *a priori* : pour une configuration quelconque, pour une valeur donnée du contraste et un maillage général, on ne peut pas assurer que le problème discret (2.21) est bien posé, même pour h suffisamment petit. Expliquons brièvement où intervient la difficulté. Introduisons les espaces

$$\mathrm{V}_{1h} := \{v_h|_{\Omega_1},\ v_h \in \mathrm{V}_h\}\,; \qquad \mathrm{V}_{2h} := \{v_h|_{\Omega_2},\ v_h \in \mathrm{V}_h\}\,;$$

$$\mathrm{V}_{1h}^0 := \mathrm{H}_0^1(\Omega_1) \cap \mathrm{V}_{1h}; \qquad \mathrm{V}_{2h}^0 := \mathrm{H}_0^1(\Omega_2) \cap \mathrm{V}_{2h}.$$

Pour tout $v_{1h} \in \mathrm{V}_{1h}$, définissons $R_{1h} v_{1h}$ comme l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } R_{1h} v_{1h} \in \mathrm{V}_{2h} \text{ tel que } R_{1h} v_{1h} = v_{1h} \text{ sur } \Sigma \text{ et} \\ (\sigma \nabla (R_{1h} v_{1h}), \nabla w_h)_{\Omega_2} = (\sigma \nabla (R_1 v_{1h}), \nabla w_h)_{\Omega_2}, \quad \forall w_h \in \mathrm{V}_{2h}^0. \end{array}\right. \tag{2.30}$$

Pour tout $h > 0$, on a $\|R_{1h}\| \leq C$ où C est une constante indépendante de h. Mais il n'y a pas de garantie pour que $\inf_{R_{1h}} \|R_{1h}\|$ soit égal à $\inf_{R_1} \|R_1\|$. Par conséquent, on ne peut affirmer que les problèmes discrets (2.21) sont bien posés que sous une condition relativement abstraite.

Remarque 2.4.1 *Considérons $v_{1h} \in \mathrm{V}_{1h}$. Par construction, (cf. (2.30)), on a $R_{1h} v_{1h} - R_1 v_{1h} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega_2)$. Donc, si de plus $R_1 v_{1h}$ appartient à V_{2h}, on obtient $R_{1h} v_{1h} = R_1 v_{1h}$. Pour que cette propriété soit vraie pour tout $v_{1h} \in \mathrm{V}_{1h}$, il est suffisant que le maillage soit $\mathtt{T}$-conforme. D'après le Théorème 1.1.2, pour retrouver le domaine d'applicabilité du problème continu (2.15), il faut que cette propriété soit vérifiée pour R_1 de norme minimale.*

2.4.2 Approximation numérique : utilisation de la dissipation

Étant donné $\gamma > 0$, définissons $\sigma^\gamma := (1 + i\,\mathrm{signe}(\sigma)\gamma)\sigma$, et introduisons le problème approché

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u^\gamma \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (\sigma^\gamma \nabla u^\gamma, \nabla v)_\Omega = (f, v), \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.31}$$

Nous pouvons voir γ comme un paramètre modélisant la dissipation du milieu physique. Nous étudierons les milieux dissipatifs dans le Chapitre 4. Nous justifierons alors le choix du signe de la partie imaginaire de σ^γ. En particulier, nous expliquerons pourquoi nous la considérons positive sur tout le domaine Ω.
On vérifie facilement qu'on a l'estimation

$$|(\sigma^\gamma \nabla v, \nabla v)_\Omega| \geq \min(\sigma_1, |\sigma_2|)\gamma \|v\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \tag{2.32}$$

Ainsi, avec le théorème de Lax-Milgram, on déduit que le problème approché est *toujours* bien posé pour $\gamma > 0$. Ci-dessous, nous faisons tendre γ vers 0.
Définissons l'opérateur $A^\gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ tel que $\langle A^\gamma u^\gamma, v\rangle = a^\gamma(u^\gamma, v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. On a

$$Au = A^\gamma u^\gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad A(u - u^\gamma) = (A^\gamma - A)u^\gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad u - u^\gamma = A^{-1}(A^\gamma - A)u^\gamma.$$

Dans cette dernière équation, nous avons utilisé le fait que le problème (2.15) est bien posé.
En remarquant que $|((\sigma - \sigma^\gamma)\nabla u, \nabla v)_\Omega| \leq \max(\sigma_1, |\sigma_2|)\gamma \|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ pour tout $u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

on déduit $\|A^\gamma - A\| \leq \max(\sigma_1, |\sigma_2|)\gamma$. Par conséquent, $\|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_1\gamma\|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ avec $C_1 = \|A^{-1}\| \max(\sigma_1, |\sigma_2|)$. On obtient alors $(1 - C_1\gamma)\|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ ce qui prouve que la suite $(u^\gamma)_\gamma$ est bornée. De plus, on a l'estimation

$$\|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_2\gamma\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_3\gamma\|f\|_\Omega.$$

Introduisons ensuite une nouvelle approximation du problème (2.31).

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^\gamma \in \mathrm{V}_h \text{ tel que} \\ (\sigma^\gamma \nabla u_h^\gamma, \nabla v_h)_\Omega = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \mathrm{V}_h. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

D'après (2.32), le problème (2.33) est toujours bien posé : les discussions sur le domaine d'applicabilité sont superflues. On obtient en outre

$$\|u^\gamma - u_h^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_4}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u^\gamma - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)},$$

où C_4 est indépendante de γ et h. L'inégalité triangulaire permet ensuite d'écrire

$$\|u - u_h^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} + \|u^\gamma - u_h^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_3\gamma\|f\|_\Omega + \frac{C_4}{\gamma} \inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \|u^\gamma - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}.$$

Pour conclure, il reste à estimer le terme $\inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \|u^\gamma - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. Supposons que l'on dispose d'un résultat d'uniforme régularité de la forme $|u^\gamma|_{\mathrm{H}^{1+s}(\Omega_1)} + |u^\gamma|_{\mathrm{H}^{1+s}(\Omega_2)} \leq C_5\|f\|_\Omega$ pour $s > 0$ et pour γ suffisamment petit. Ici, C_5 est une constante qui ne dépend pas de γ. Nous montrerons ce genre de résultats dans le §4.4 du Chapitre 4. On obtient alors

$$\inf_{v_h \in \mathrm{V}_h} \|u^\gamma - v_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C_6 h^s \|f\|_\Omega\,.$$

Finalement, on peut optimiser l'estimation d'erreur en choisissant $\gamma = \sqrt{C_4C_6/C_3}h^{s/2}$. On obtient alors

$$\|u - u_h^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq 2\sqrt{C_3C_4C_6}h^{s/2}\|f\|_\Omega.$$

Insistons bien. Cette estimation tient dès lors que le problème (2.15) est bien posé, sans hypothèse particulière sur le maillage.

Remarque 2.4.2 *Dans l'analyse précédente, nous avons supposé* $1 > C_1\gamma$, *où* $C_1 = \|A^{-1}\| \max(\sigma_1, |\sigma_2|)$. *Il peut arriver que la valeur* $\|A^{-1}\|$ *soit très « grande », de sorte qu'en pratique il est important de choisir un paramètre* γ *en* $\gamma = C_8\, h^{s/2}$ *avec* C_8 *« petit ». Dans ce cas, on a* $1/\|A^{-1}\| > C_8 \max(\sigma_1, |\sigma_2|)\, h^{s/2}$ *y compris pour des maillages grossiers.*

◇ Exemple de la cavité avec un maillage quelconque. Dans cet exemple, nous n'effectuons pas d'hypothèse particulière de symétrie pour le maillage de la cavité $\Omega := \{(x, y) \in]-2; 1[\times]0; 1[\}$. Rappelons que $\Omega_1 :=]-2; 0[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 :=]0; 1[\times]0; 1[$. Supposons $\kappa_\sigma \in]-1; -1/2]\backslash\{-\tanh(n\pi)/\tanh(2n\pi),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous savons que dans ce cas, A est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.
De plus, d'après la Proposition 4.4.1 du Chapitre 4, la solution u^γ du problème (2.31) satisfait $|u^\gamma|_{\mathrm{H}^2(\Omega_1)} + |u^\gamma|_{\mathrm{H}^2(\Omega_2)} \leq C\|f\|_\Omega$, pour γ suffisamment petit. Par conséquent, pour une famille générale de maillages de Ω, nous pouvons approcher l'unique solution u du problème (2.20) par la suite $(u_h^\gamma)_h$. On a alors l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{h}\|f\|_\Omega,$$

pour h suffisamment petit si nous prenons $\gamma \sim \sqrt{h}$.

2.5 Expériences numériques

2.5.1 Influence du maillage pour l'exemple de la cavité

Considérons la cavité symétrique définie par $\Omega := \{(x,y) \in]-1;1[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-1;0[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;1[\times]0;1[$. La Figure 2.7 présente différents types de maillages de ce domaine.
Considérons $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que

$$u(x,y) := \left| \begin{array}{ll} ((x+1)^2 - (\sigma_1+\sigma_2)^{-1}(2\sigma_1+\sigma_2)(x+1))\sin(\pi y) & \text{sur} \quad \Omega_1 \\ (\sigma_1+\sigma_2)^{-1}\sigma_1(x-1)\sin(\pi y) & \text{sur} \quad \Omega_2 \end{array} \right. . \tag{2.34}$$

Définissons alors $f := -\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u)$. On peut vérifier que cette fonction appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Fixons σ_1 à 1. D'après les résultats du §2.2.2, le problème (2.20) est bien posé dès lors que $\kappa_\sigma \neq -1 \Leftrightarrow \sigma_1+\sigma_2 \neq 0$. De plus, d'après les résultats des §2.3.2 et §2.3.3, nous savons que les problèmes discrets (2.21) sont bien posés (au moins pour h suffisamment petit), pour le maillage symétrique et pour le maillage localement symétrique. Cependant, jusqu'à présent, nous avons été incapables de prouver que (2.21) était bien posé, même pour des h assez petits, pour le maillage non symétrique. En utilisant la dissipation, on recouvre automatiquement le caractère bien posé des problèmes discrets (2.33). D'après la Remarque 2.4.2, nous choisissons un petit coefficient de dissipation γ.

Les Figures 2.8 et 2.9 représentent les résultats numériques pour un contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ égal à -1.001, avec un pas de maillage $h \in]10^{-2.2};10^{-0.8}[$. L'erreur relative, pour les normes $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathrm{L}^2(\Omega)$, est reportée en échelle log–log, avec a l'ordre de convergence. Nous observons que toutes les approches :

- discrétisation naturelle pour des maillages symétriques ;
- discrétisation naturelle pour des maillages localement symétriques ;
- discrétisation naturelle pour des maillages non symétriques ;
- discrétisation avec dissipation et maillage non symétrique ;

convergent vers la solution exacte, bien que le contraste choisi soit proche de -1. L'ordre de convergence le plus faible, en $O(\sqrt{h})$, comme escompté, est observé pour la discrétisation avec dissipation. Par ailleurs, la discrétisation naturelle avec des maillages symétriques ou localement symétriques converge avec la vitesse a attendue, à savoir en $O(h)$ pour la norme $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $O(h^2)$ pour la norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$, ce dernier résultat étant une conséquence du lemme d'Aubin-Nitsche (cf. [77]).

Pour améliorer la vitesse de convergence de l'approximation utilisant la dissipation, on peut augmenter l'ordre des éléments finis utilisés (par exemple, éléments finis P_2 ou P_3), couplé à un coefficient de dissipation adapté. En notant $m \in \{1,2,3\}$ le degré de l'élément fini, on prend $\gamma_m \sim h^{m/2}$ pour trouver une convergence en $O(h^{m/2})$ (en effet, ici, la solution est régulière de part et d'autre de l'interface). Les résultats sont présentés sur la Figure 2.10 : encore une fois la méthode se comporte comme prévu.

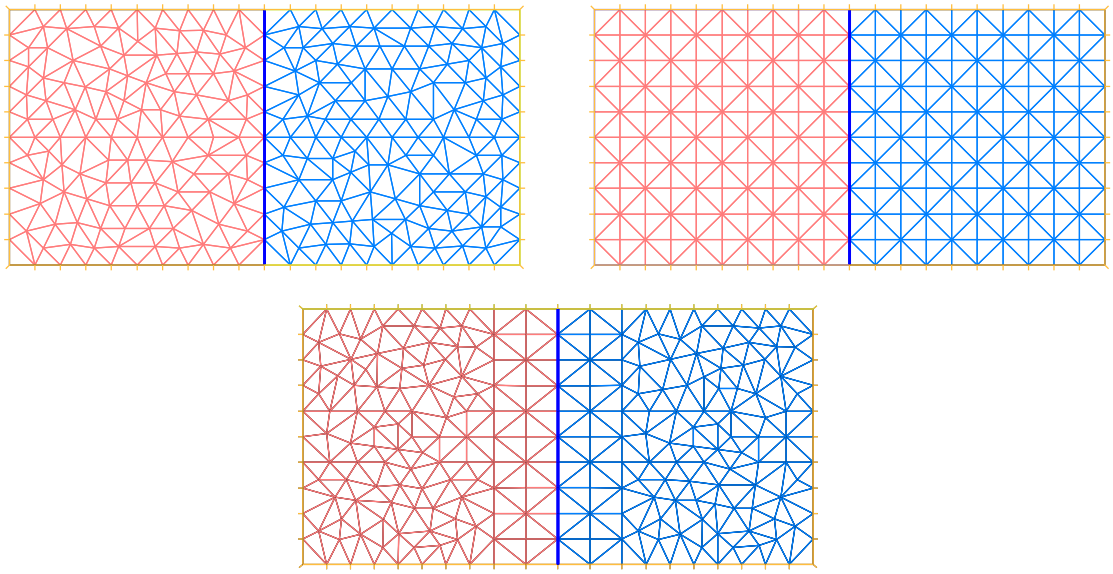


FIGURE 2.7 – Maillages pour la cavité : maillage non symétrique (en haut, à gauche) - maillage symétrique (en haut, à droite) - maillage localement symétrique (en bas, au centre).

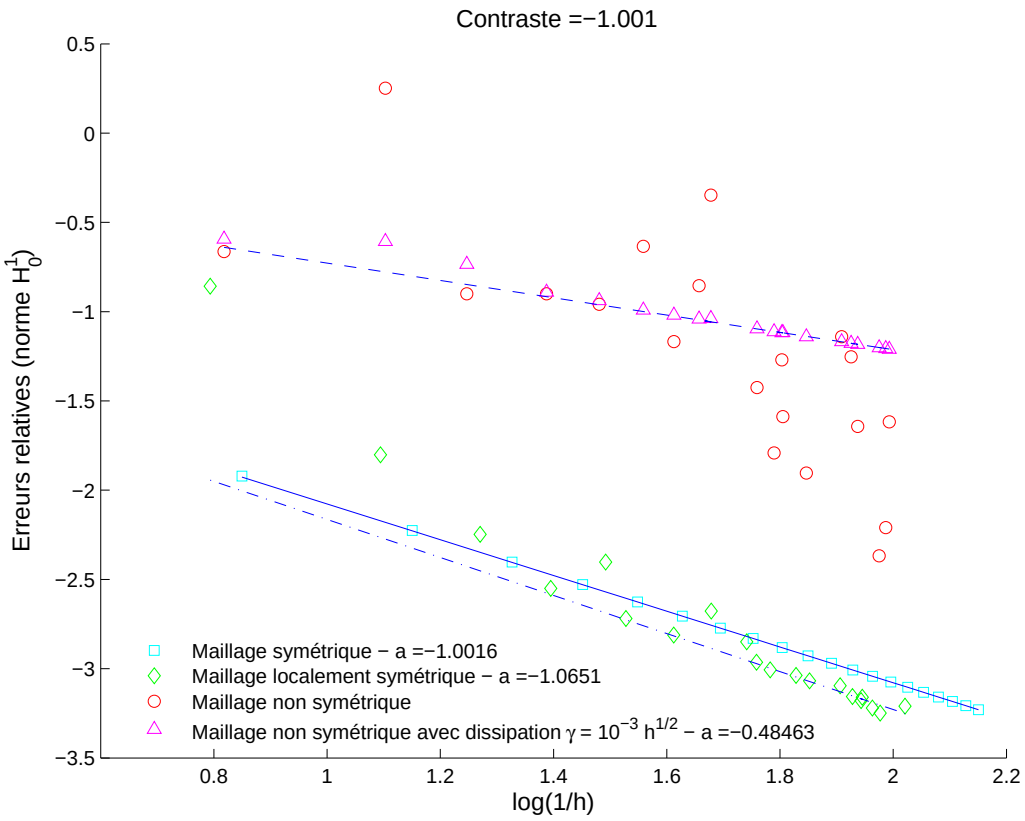


FIGURE 2.8 – Erreurs relatives (norme $H_0^1(\Omega)$) pour différents maillages de la cavité.

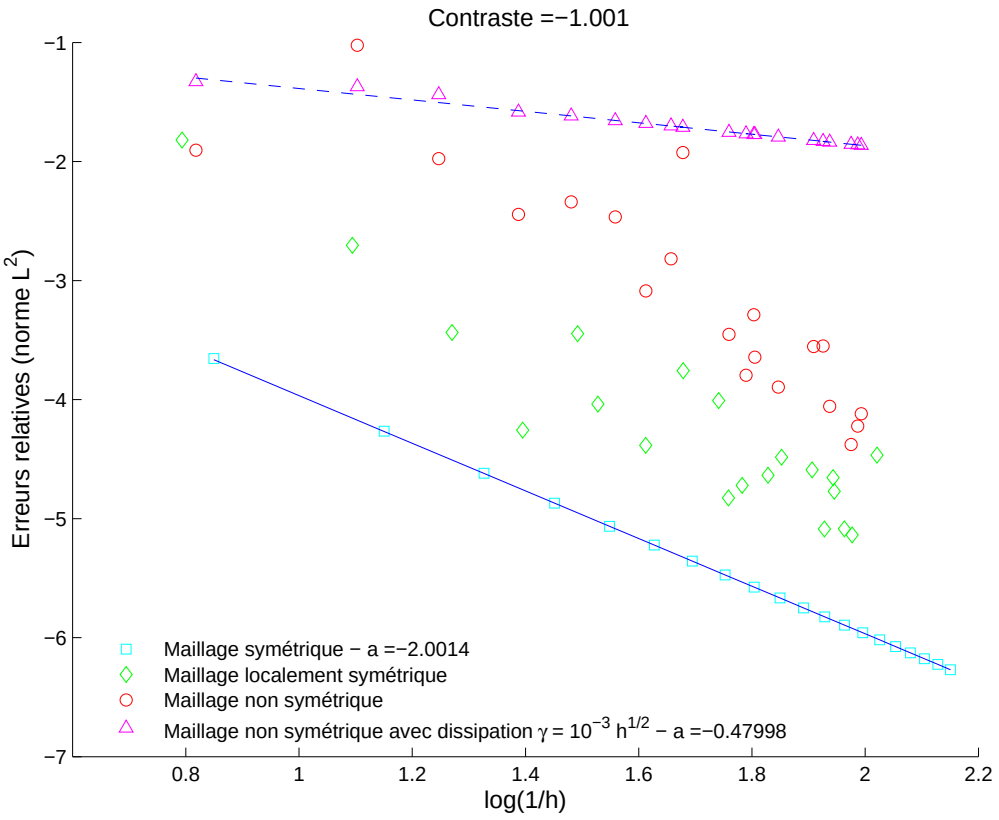


FIGURE 2.9 – Erreurs relatives (norme $L^2(\Omega)$) pour différents maillages de la cavité.

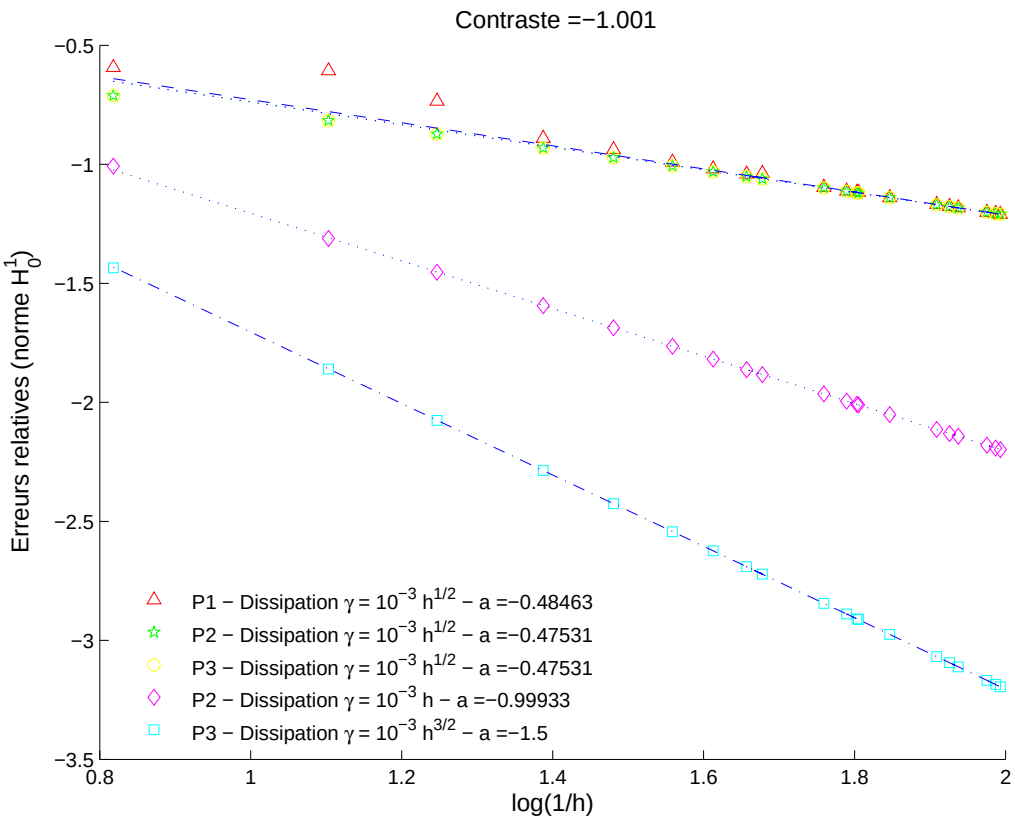


FIGURE 2.10 – Comparaison des erreurs relatives (norme $H_0^1(\Omega)$) pour différents ordres d'élément fini. On adapte la dissipation en fonction de l'ordre de l'élément fini.

2.5.2 Deux propriétés caractéristiques du problème de transmission scalaire avec changement de signe

Profitons de ce paragraphe où nous présentons des expériences numériques pour mettre en évidence deux propriétés caractéristiques du problème de transmission scalaire avec changement de signe.

Avec la Figure 2.12 (à comparer à la Figure 2.11), nous pouvons voir la « cassure négative » dans la trace normale de la solution au niveau de l'interface. Ceci provient bien entendu de la condition de transmission portant sur le flux qui s'écrit $\sigma_1 \partial u/\partial \boldsymbol{n} = \sigma_2 \partial u/\partial \boldsymbol{n}$ sur Σ. Ici, $\boldsymbol{n}$ désigne la normale à l'interface dirigée, pour fixer les idées, de Ω_1 vers Ω_2.

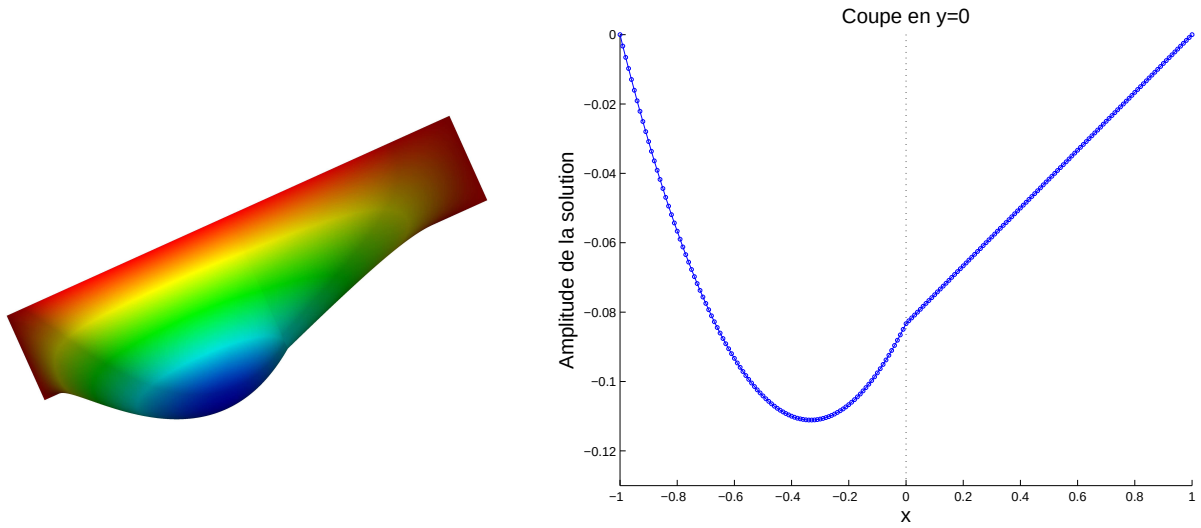


FIGURE 2.11 – Approximation numérique de la solution u définie en (2.34) pour $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = 2$. Le maillage ne présente pas de propriété de symétrie.

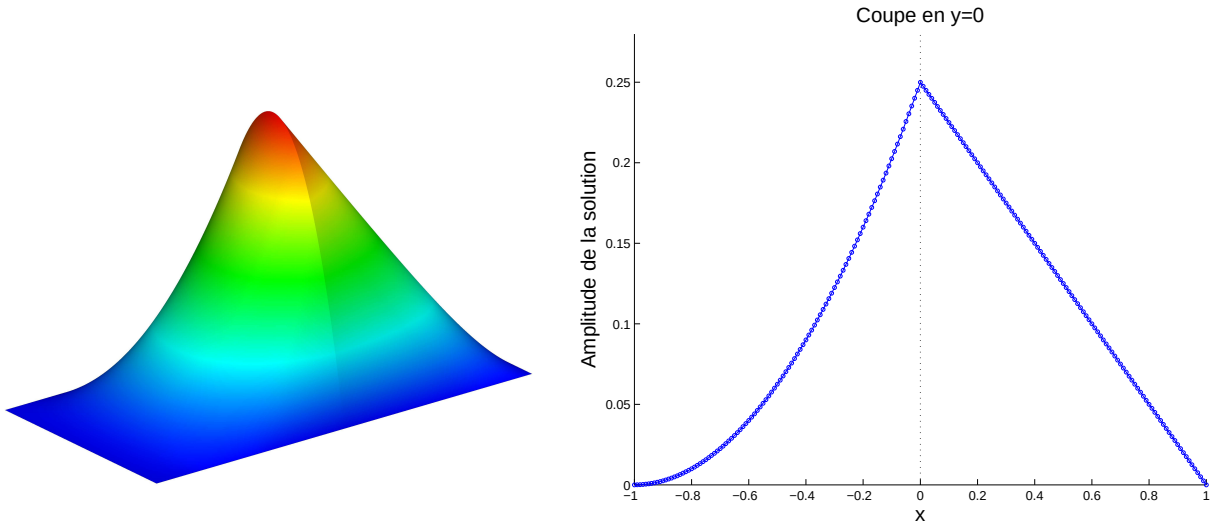


FIGURE 2.12 – Approximation numérique de la solution u définie en (2.34) pour $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -2$. Le maillage ne présente pas de propriété de symétrie.

La Figure 2.13 présente la solution du problème (2.21) dans le domaine $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|+|y| \leq 2\}$ avec $\Omega_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-1|+|y| \leq 1\}$ et $\Omega_1 := \Omega \backslash \overline{\Omega_2}$. Le terme source f vérifie $f = 1$ sur Ω_1 et $f = 0$ sur Ω_2. En prenant $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -1/4$, nous nous intéressons à une configuration pour laquelle le contraste κ_σ est situé en dehors de l'intervalle critique, égal ici à $[-3; -1/3]$. Répétons-le, nous n'avons pas de résultat théorique indiquant que le problème (2.21) possède une unique solution même pour h suffisamment petit. Cependant, dans cette simulation nous souhaitons simplement illustrer la présence de la singularité au niveau de l'origine. Nous verrons dans le Chapitre 5 que plus le contraste est proche de l'intervalle critique, plus la singularité est prononcée.

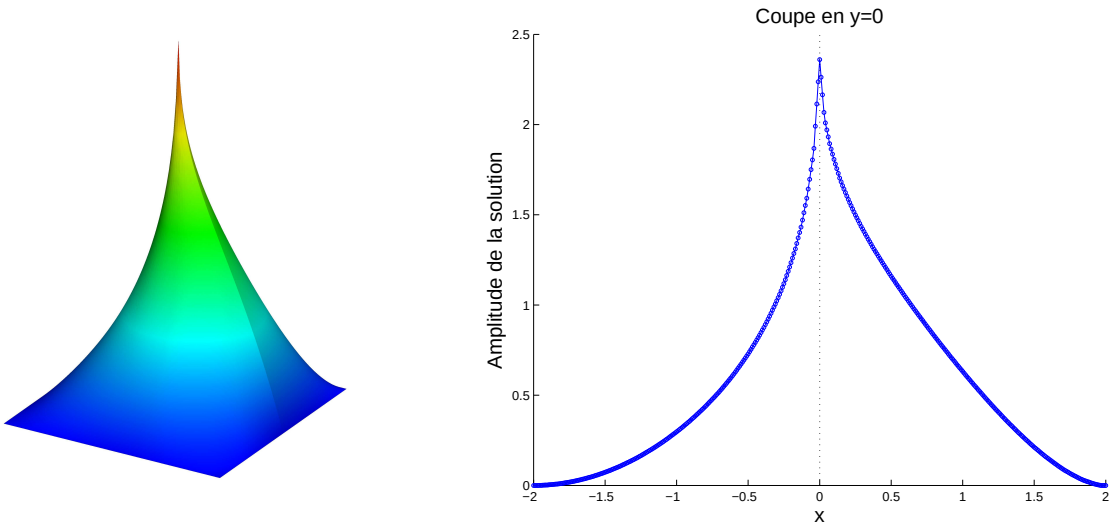


FIGURE 2.13 – Approximation numérique de la solution u du problème (2.20) pour $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -1/4$. Le maillage ne présente pas de propriété de symétrie.

CHAPITRE TROIS

RÉSULTATS DE RÉGULARITÉ

Sommaire

Introduction **67**
3.1 Bande infinie **69**
3.1.1 Espaces de Sobolev à poids dans la bande : définitions, rappels 69
3.1.2 Bande symétrique infinie 71
3.1.3 Bande infinie non symétrique 75
3.1.4 Comportement des solutions à l'infini 81
3.1.5 Applications 84
3.2 Secteurs non bornés **86**
3.2.1 Espaces de Sobolev à poids dans les secteurs : définitions, rappels 87
3.2.2 Sommet extérieur 88
3.2.3 Sommet intérieur 91
3.3 Ouvert borné **92**
3.3.1 Notations 93
3.3.2 Problème considéré 94
3.3.3 Résultat de régularité dans l'ouvert borné 96
3.3.4 Asymptotique de la solution en domaine borné 99

Introduction

Rappelons que cette partie est consacrée à l'étude du problème de transmission scalaire $(\mathscr{P})$ « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f$ ». La fonction f désigne le terme source et σ représente un paramètre physique qui change de signe sur le domaine. Dans le Chapitre 1, nous avons développé une méthode variationnelle, la T-coercivité, permettant d'obtenir des critères portant sur les valeurs de σ et la géométrie du domaine pour assurer que $(\mathscr{P})$ possède une unique solution. Dans le second chapitre, nous avons d'abord relié la technique de la T-coercivité à la théorie inf–sup classique. Puis, nous avons présenté et justifié quelques méthodes d'approximation de la solution du problème $(\mathscr{P})$ lorsque celui-ci est bien posé. Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier la question de la régularité des solutions du problème $(\mathscr{P})$. Si l'on considère un terme source f plus régulier que $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, typiquement si l'on s'intéresse au problème $(\mathscr{P})$ avec $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, peut-on prouver que la solution $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ possède un supplément de régularité ? Ce genre d'interrogations est classique en théorie des équations elliptiques. Par exemple, lorsque σ est identiquement égal à un et lorsque le domaine Ω est « régulier », nous savons que la solution du problème $(\mathscr{P})$ avec $f \in \mathrm{H}^m(\Omega)$ appartient à $\mathrm{H}^{m+2}(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}$. Ce sont les fameux deux crans que l'on gagne pour les opérateurs elliptiques d'ordre deux. Lorsque le domaine Ω n'est pas régulier et présente, par exemple des coins, ce résultat est faux dans le cas général. Ainsi, en 2D, si Ω possède un « coin rentrant », c'est-à-dire si la frontière de Ω présente un angle d'ouverture

strictement supérieure à π, il existe des termes sources f dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ tels que la solution u du problème $(\mathscr{P})$ avec $\sigma = 1$ n'appartienne pas à $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Dans ce cas la solution u est un élément de $\cap_{0<s<s_0}\mathrm{H}^{1+s}(\Omega)$ pour un certain $s_0 > 0$ dépendant uniquement de l'ouverture du coin rentrant. Pour ces domaines, présentant des singularités géométriques, les espaces de Sobolev classiques de type $\mathrm{H}^s(\Omega)$ ne sont pas les plus adaptés. On leur préfère les espaces de Sobolev à poids permettant de mesurer plus finement le comportement des fonctions au voisinage des coins. Une théorie complète a été développée dans ces espaces pour étudier les équations elliptiques dans les domaines non réguliers. Les premiers travaux, à la fin des années 1960, sont dus à Kondrat'ev. En particulier, [100] constitue l'article fondateur. Depuis, de nombreux auteurs ont participé au développement de cette théorie et il existe une vaste littérature dans ce domaine. Citons notamment, de façon non exhaustive, les livres de M. Dauge [68], P. Grisvard [87, 88], S. A. Nazarov et B. A. Plamenevsky [119]. La trilogie [102, 103, 115] de V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya et J. Rossmann constitue peut-être l'ouvrage le plus détaillé. Par ailleurs, les deux tomes [114] de V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov et B. A. Plamenevsky représentent une référence dans le domaine de la théorie du développement asymptotique dans les domaines singuliers localement perturbés.

Cette théorie fonctionne dès lors que le coefficient σ dans l'équation du problème $(\mathscr{P})$ est régulier. Quand σ appartient seulement à $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec σ borné inférieurement par une constante strictement positive, la solution u n'est pas régulière aux endroits où σ présente des sauts. Cette question a été étudiée par S. Nicaise et A. M. Sänding dans [126, 127, 128]. Dans ce chapitre, nous voulons compléter ces travaux pour étudier des cas pour lesquels σ change de signe. Bien que le problème ne soit pas elliptique en raison de ce changement de signe, nous allons voir que nous pouvons tout de même adapter la théorie classique. Ce sont M. Dauge et B. Texier qui ont observé cela dans [72] (voir également [26, 138]). Par ailleurs M. Costabel et E. Stephan dans [66] se sont intéressés à ce problème par des techniques de représentation intégrale. Les résultats de régularité que nous obtiendrons dans ce chapitre, relativement technique, seront utiles pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ils permettront d'achever la théorie de l'approximation que nous avons présentée dans le Chapitre 2. D'autre part, ils serviront dans l'étude des équations de Maxwell en 2D dans le Chapitre 8 pour démontrer un résultat de compacité basé sur la régularité des champs. Enfin, ces résultats de régularité nous donneront un premier aperçu de la stratégie à mettre en place pour définir un cadre fonctionnel dans lequel le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé lorsque l'interface présente un coin et que le contraste est situé dans l'intervalle critique. Ce travail fera l'objet du Chapitre 5.

Pour le problème du laplacien en 2D dans des géométries présentant des coins, il est possible de travailler « à la main », c'est-à-dire sans outil abstrait, en effectuant d'habiles intégrations par parties (voir par exemple [107, 88, 110, 96]). Pour notre problème, nous ne pourrons pas utiliser ces techniques en raison du changement de signe de σ. Dans notre approche, l'outil de base sera la transformée de Mellin, que l'on peut voir comme une combinaison d'un changement de variable et d'une transformée de Fourier. Le théorème des résidus jouera également, dans la suite, un rôle important dans notre travail en permettant de décomposer les solutions en la somme de termes singuliers et d'un reste régulier. Dans ce chapitre, nous prenons le temps de détailler l'usage de la transformée de Mellin sur un cas, bien que le problème en question ne soit pas elliptique, relativement simple. Il faut y voir là un objectif pédagogique. Puisse ce document aider quelque thésard à entrer dans cette jolie théorie !

Notre plan d'action sera le suivant. Dans la Section 3.1, nous travaillerons dans une bande infinie constituée d'une bande de matériau positif accolée à une bande de matériau négatif. Dans cette géométrie, nous pourrons utiliser la transformée de Fourier dans la direction infinie. Dans un second temps, en effectuant un changement de variables *ad hoc*, nous déduirons des résultats dans des secteurs angulaires. Dans la Section 3.3, par un procédé de localisation, nous pourrons alors énoncer des résultats dans la géométrie bornée Ω qui nous intéressait initialement.

Quelques notations communes à l'ensemble de ce chapitre

Dans tout ce chapitre, σ_1 et σ_2 désigneront deux constantes telles que $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$. Nous appellerons contraste le nombre $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. Pour un 2-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, nous notons

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x\, \partial^{\alpha_2} y}\,.$$

Considérons $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons sans distinction $(\cdot,\cdot)_\mathcal{O}$ (resp. $\|\cdot\|_\mathcal{O}$) les produits scalaires (resp. les normes) de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ et $(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^2$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous introduisons

$$\mathrm{H}^m(\mathcal{O}) := \left\{ v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}) \,|\, \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| \leq m \right\}.$$

Nous munissons l'espace $\mathrm{H}^m(\mathcal{O})$ de la norme $\|v\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{O})} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha v\|_\mathcal{O}^2\right)^{1/2}$. Remarquons que $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}) = \mathrm{L}^2(\mathcal{O})$. Par ailleurs, nous noterons $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) l'intervalle $]0;+\infty[$ (resp. $]-\infty;0[$).

3.1 Bande infinie

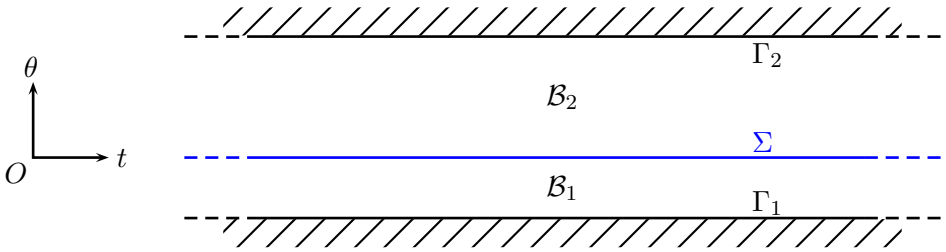


FIGURE 3.1 – Notations pour la bande infinie $\mathcal{B}$.

Dans ce paragraphe, nous travaillerons dans la bande infinie

$$\mathcal{B} := \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times]a;b[\}$$

avec $a < 0$ et $b > 0$. Introduisons $\mathcal{B}_1 := \mathbb{R} \times]a;0[$, $\mathcal{B}_2 := \mathbb{R} \times]0;b[$, $\Sigma := \mathbb{R} \times \{0\}$, $\Gamma_1 := \mathbb{R} \times \{a\}$ et $\Gamma_2 := \mathbb{R} \times \{b\}$. De façon générale, si v est une fonction mesurable sur $\mathcal{B}$, nous définissons $v_1 := v|_{\mathcal{B}_1}$ et $v_2 := v|_{\mathcal{B}_2}$.

En 1D, pour la section transverse, nous noterons respectivement $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_1$, $(\cdot,\cdot)_2$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(]a;b[)$, $\mathrm{L}^2(]a;0[)$, $\mathrm{L}^2(]0;b[)$. Par contre, pour les normes, nous maintenons les écritures $\|\cdot\|_{]a;b[}$, $\|\cdot\|_{]a;0[}$, $\|\cdot\|_{]0;b[}$. Si φ est une fonction mesurable sur $]a;b[$, nous définissons $\varphi_1 := \varphi|_{]a;0[}$ et $\varphi_2 := \varphi|_{]0;b[}$.

3.1.1 Espaces de Sobolev à poids dans la bande : définitions, rappels

Pour mesurer finement le comportement des fonctions à l'infini dans la bande $\mathcal{B}$, nous allons introduire une famille d'espaces de Sobolev à poids. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, définissons

$$\mathrm{W}_\beta^m(\mathcal{B}) := \left\{ v \in \mathrm{L}^2_{loc}(\mathcal{B}) \,|\, e^{\beta t} v \in \mathrm{H}^m(\mathcal{B}) \right\}.$$

L'espace $\mathrm{W}_\beta^m(\mathcal{B})$ sera muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}_\beta^m(\mathcal{B})} := \left\| e^{\beta t} v \right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B})}. \tag{3.1}$$

Nous noterons $\mathring{\mathrm{W}}^m_\beta(\mathcal{B})$ la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{B})$ dans $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})$.
Effectuons quelques remarques concernant ces espaces. Tout d'abord remarquons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{W}^m_0(\mathcal{B}) = \mathrm{H}^m(\mathcal{B})$. En particulier, l'espace $\mathrm{W}^0_0(\mathcal{B})$ est égal à $\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$. Si $m \geq n \geq 0$, on observe que $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}) \subset \mathrm{W}^n_\beta(\mathcal{B})$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Par contre, si β^1 et β^2 sont deux réels vérifiant $\beta^1 \neq \beta^2$, alors d'une part $\mathrm{W}^m_{\beta^1}(\mathcal{B}) \not\subset \mathrm{W}^m_{\beta^2}(\mathcal{B})$, d'autre part $\mathrm{W}^m_{\beta^1}(\mathcal{B}) \not\supset \mathrm{W}^m_{\beta^2}(\mathcal{B})$. On peut expliquer cette d'absence d'inclusion de la façon suivante. Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, plus β est grand, plus la contrainte pour les éléments de $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})$ est forte (resp. faible) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Pour $m \geq 1$, définissons $\mathrm{W}^{m-1/2}_\beta(\partial\mathcal{B})$ l'espace des traces des éléments de $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})$ sur la frontière $\partial\mathcal{B}$. Cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}^{m-1/2}_\beta(\partial\mathcal{B})} := \inf \left\{ \|w\|_{\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})} \mid w \in \mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}) \text{ et } w = v \text{ sur } \partial\mathcal{B} \right\}. \tag{3.2}$$

L'espace $\mathrm{W}^{m-1/2}_\beta(\partial\mathcal{B})$ est égal à l'espace des fonctions v de $\partial\mathcal{B}$ telles que $e^{\beta t}v \in \mathrm{H}^{m-1/2}(\partial\mathcal{B})$ et la norme (3.2) est équivalente à la norme

$$\|v\| = \left\| e^{\beta t} v \right\|_{\mathrm{H}^{m-1/2}(\partial\mathcal{B})}. \tag{3.3}$$

Définissons la transformée de Laplace $\mathcal{L}_{t\to\lambda}$ par rapport à la variable t.

$$\hat{v}(\lambda) := (\mathcal{L}_{t\to\lambda} v)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} v(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Rappelons quelques propriétés de cette transformée de Laplace (cf. [102, lemme 5.2.3]).

Lemme 3.1.1 *1) La transformée de Laplace (3.4) définit une application linéaire continue de $\mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions analytiques du plan complexe. D'autre part, on a $\mathcal{L}_{t\to\lambda}(\partial_t v) = \lambda \mathcal{L}_{t\to\lambda} v$ pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R})$.*
2) Pour tout u, $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ on a la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\beta t} u(t) \overline{v(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re e\, \lambda = -\beta} \hat{u}(\lambda) \overline{\hat{v}(\lambda)}\, d\lambda. \tag{3.5}$$

L'intégration dans le terme de droite de (3.5) se fait sur $\ell_{-\beta} := \{\lambda = -\beta + i\tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, la transformée (3.4) peut être prolongée en un isomorphisme

$$\mathrm{L}^2_\beta(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\ell_{-\beta}),$$

où $\mathrm{L}^2_\beta(\mathbb{R}) = \mathrm{W}^0_\beta(\mathcal{B})$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par le terme de gauche de (3.5).
3) La transformée de Laplace inverse est donnée par la formule

$$v(t) := (\mathcal{L}^{-1}_{\lambda\to t} \hat{v})(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda t} \hat{v}(\lambda)\, d\lambda.$$

4) Si $v \in \mathrm{L}^2_{\beta^1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2_{\beta^2}(\mathbb{R})$, avec $\beta^1 < \beta^2$, alors $\lambda \mapsto \hat{v}(\lambda) = (\mathcal{L}_{t\to\lambda} v)(\lambda)$ est holomorphe dans la bande $-\beta^2 < \Re e\, \lambda < -\beta^1$.

En utilisant ces propriétés, on peut démontrer le lemme d'équivalence de normes suivant (cf. [102, lemme 5.2.4]).

Lemme 3.1.2 *Pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, la norme (3.1) est équivalente à la norme*

$$\|v\| = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|^2_{\mathrm{H}^m(]a;b[)} + |\lambda|^{2m} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|^2_{]a;b[}\, d\lambda \right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Ce lemme nous conduit à introduire la norme à paramètre

$$\|v\|_{\mathrm{H}^m(]a;b[,\,\lambda)} := \left(\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(]a;b[)} + |\lambda|^{2\,m}\,\|v\|^2_{]a;b[}\right)^{1/2}, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^m(]a;b[\,. \tag{3.7}$$

À λ fixé, cette norme est équivalente à la norme de $\mathrm{H}^m(]a;b[)$. Dans notre étude, nous aurons également besoin du lemme 3.6.3 de [102] donnant une norme équivalente à cette norme à paramètre.

Lemme 3.1.3 *Soient ζ un élément non nul de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles et λ un imaginaire pur. Alors il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de λ telles que pour $u \in \mathrm{H}^m(]a;b[)$, $m \geq 0$, on ait*

$$C_1\,\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B})} \leq \|u\|^2_{\mathrm{H}^m(]a;b[,\,\lambda)} \leq \sum_{j=0}^{m} |\lambda|^{2\,j}\,\|u\|^2_{\mathrm{H}^{m-j}(]a;b[)} \leq C_2\,\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B})}\,,$$

où la fonction v sur $\mathcal{B}$ est définie par $v(t,\theta) = e^{\lambda t}\zeta(t)u(\theta)$.

On a bien entendu les mêmes définitions et résultats pour les espaces définis sur $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Pour $m \geq 0$, définissons l'opérateur continu $B^m_\beta : \mathscr{D}(B^m_\beta) \to \mathscr{R}(B^m_\beta)$ tel que $B^m_\beta u = f$ avec

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2) &:= (-\sigma_1\Delta u_1, -\sigma_2\Delta u_2);\\
\mathscr{D}(B^m_\beta) &:= \left\{u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\beta(\mathcal{B})\,|\,(u_1,u_2) \in \mathrm{W}^{m+2}_\beta(\mathcal{B}_1)\times\mathrm{W}^{m+2}_\beta(\mathcal{B}_2) \text{ et } \sigma_1\partial_\theta u_1 = \sigma_2\partial_\theta u_2 \text{ sur } \Sigma\right\};\\
\mathscr{R}(B^m_\beta) &:= \left\{f \in \mathrm{L}^2_\beta(\mathcal{B})\,|\,(f_1,f_2) \in \mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}_1)\times\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}_2)\right\}.
\end{aligned}$$

Insistons : ci-dessus f_1 et f_2 (resp. u_1 et u_2) désignent les restrictions de f (resp. u) à $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. L'opérateur B^m_β est l'opérateur naturellement associé au problème de transmission

$$\left|\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u_1,u_2) \in \mathrm{W}^{m+2}_\beta(\mathcal{B}_1)\times\mathrm{W}^{m+2}_\beta(\mathcal{B}_2) \text{ tel que :}}\\
-\sigma_1\Delta u_1 &=& f_1 & \text{dans } \mathcal{B}_1\\
-\sigma_2\Delta u_2 &=& f_2 & \text{dans } \mathcal{B}_2\\
u_1 - u_2 &=& 0 & \text{sur } \Sigma\\
\sigma_1\partial_\theta u_1 - \sigma_2\partial_\theta u_2 &=& 0 & \text{sur } \Sigma\\
u_1 &=& 0 & \text{sur } \Gamma_1\\
u_2 &=& 0 & \text{sur } \Gamma_2,
\end{array}\right. \tag{3.8}$$

avec $(f_1,f_2) \in \mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}_1)\times\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B}_2)$. Notons que ce problème de transmission n'est autre que la réécriture de $-\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) = f$ où σ est la fonction vérifiant $\sigma = \sigma_1$ sur $\mathcal{B}_1$ et $\sigma = \sigma_2$ sur $\mathcal{B}_2$.

3.1.2 Bande symétrique infinie

Nous allons d'abord faire l'hypothèse $-a = b$. Autrement dit, nous supposerons que $\mathcal{B}$ est symétrique par rapport à la droite $\{(t,0),\, t \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 3.1.4 *L'opérateur B^0_0 constitue un isomorphisme de $\mathscr{D}(B^0_0)$ dans $\mathscr{R}(B^0_0)$ si et seulement si $\kappa_\sigma \neq -1$.*

Remarque 3.1.5 *Pour $m = \beta = 0$, les espaces $\mathscr{D}(B^m_\beta)$ et $\mathscr{R}(B^m_\beta)$ sont relativement simples. On a en effet $\mathscr{D}(B^0_0) = \{u \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{B})\,|\,(u_1,u_2) \in \mathrm{H}^2(\mathcal{B}_1)\times\mathrm{H}^2(\mathcal{B}_2)$ et $\sigma_1\partial_\theta u_1 = \sigma_2\partial_\theta u_2$ sur $\Sigma\}$ et $\mathscr{R}(B^0_0) = \mathrm{L}^2(\mathcal{B})$.*

Preuve. Lorsque $\kappa_\sigma = -1$, on peut construire comme dans la preuve du Théorème 1.5.1 un noyau de dimension infinie pour B_0^0. Ceci prouve que B_0^0 n'est pas de type Fredholm dans cette configuration.

Nous supposerons désormais $\kappa_\sigma \neq -1$. La preuve que nous allons présenter constitue la base de la théorie de ce chapitre. De façon non exhaustive, nous renvoyons le lecteur à [102, théorème 5.2.2], [114, théorème 1.1.1] ou [119, proposition 2.2.1] pour des démonstrations analogues dans le cas simple de l'opérateur Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet. Insistons de nouveau, ce dernier opérateur contrairement à celui que nous souhaitons étudier est elliptique.

Donnons-nous $u \in \mathscr{D}(B_0^0)$ et notons $f := B_0^0 u$. En appliquant la transformée de Laplace par rapport à t dans (3.8), on obtient pour tout $\lambda \in \mathbb{R}i$,

$$\begin{array}{rcl} -\sigma_1(\lambda^2+\partial_\theta^2)\hat{u}_1(\lambda,\theta) & = & \hat{f}_1(\lambda,\theta) \\ -\sigma_2(\lambda^2+\partial_\theta^2)\hat{u}_2(\lambda,\theta) & = & \hat{f}_2(\lambda,\theta) \\ \hat{u}_1(\lambda,0)-\hat{u}_2(\lambda,0) & = & 0 \\ \sigma_1\partial_\theta\hat{u}_1(\lambda,0)-\sigma_2\partial_\theta\hat{u}_2(\lambda,0) & = & 0 \\ \hat{u}_1(\lambda,-b) & = & 0 \\ \hat{u}_2(\lambda,b) & = & 0. \end{array} \tag{3.9}$$

Introduisons alors le symbole $\mathscr{L}(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}) \to \mathrm{L}^2(]-b;b[)$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$ avec

$$\begin{array}{rcl} (g_1,g_2) & := & (-\sigma_1(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_1, -\sigma_2(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_2)\,; \\ \mathscr{D}(\mathscr{L}) & := & \{\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b;b[) \,|\, (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathrm{H}^2(]-b;0[) \times \mathrm{H}^2(]0;b[) \text{ et } \sigma_1 d_\theta\varphi_1(0) = \sigma_2 d_\theta\varphi_2(0)\}\,. \end{array}$$

Nous souhaitons à présent étudier les propriétés de $\mathscr{L}(\lambda)$. Dans la suite, la dérivée par rapport à la variable θ sera tantôt notée « $d_\theta\cdot$ », tantôt « $\cdot'$ ».

Lemme 3.1.6 *Si $\kappa_\sigma \neq -1$ alors $\mathscr{L}(\lambda)$ définit un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathrm{L}^2(]-b;b[)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}i$.*

Preuve. Pour simplifier les notations, introduisons $\tau = i\lambda \in \mathbb{R}$. Définissons la forme sesquilinéaire a telle que pour tout φ, ϕ dans $\mathrm{H}_0^1(]-b;b[)$,

$$a(\varphi,\phi) = \sigma_1(\varphi_1',\phi_1')_1 + \tau^2\sigma_1(\varphi_1,\phi_1)_1 + \sigma_2(\varphi_2',\phi_2')_2 + \tau^2\sigma_2(\varphi_2,\phi_2)_2.$$

Comme dans le Chapitre 1, nous constatons que la forme a n'est pas coercive. Nous allons donc utiliser la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité en 1D. À cet effet, introduisons la symétrie $\mathfrak{s}$ telle que $\mathfrak{s}(\theta) = -\theta$ pour $\theta \in [-b;b]$ et les isomorphismes de $\mathrm{H}_0^1(]-b;b[)$ tels que pour $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b;b[)$,

$$\mathtt{T}_1\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{sur }]-b;0[\\ -\varphi_2 + 2\,\varphi_1\circ\mathfrak{s} & \text{sur }]0;b[\end{cases} \quad ; \quad \mathtt{T}_2\varphi = \begin{cases} \varphi_1 - 2\,\varphi_2\circ\mathfrak{s} &]-b;0[\\ -\varphi_2 &]0;b[\end{cases} .$$

Pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b;b[)$ et $\eta > 0$, on a,

$$\begin{array}{rcl} |a(\varphi,\mathtt{T}_1\varphi)| & = & |\sigma_1(\varphi_1',\varphi_1')_1 + \tau^2\sigma_1(\varphi_1,\varphi_1)_1 + |\sigma_2|(\varphi_2',\varphi_2')_2 + \tau^2|\sigma_2|(\varphi_2,\varphi_2)_2 \\ & & +2\sigma_2(\varphi_2',(\varphi_1\circ\mathfrak{s})')_2 + 2\tau^2\sigma_2(\varphi_2,(\varphi_1\circ\mathfrak{s}))_2| \\ & \geq & \sigma_1(\varphi_1',\varphi_1')_1 + \tau^2\sigma_1(\varphi_1,\varphi_1)_1 + |\sigma_2|(\varphi_2',\varphi_2')_2 + \tau^2|\sigma_2|(\varphi_2,\varphi_2)_2 \\ & & -\eta|\sigma_2|(\varphi_2',\varphi_2')_2 - \eta\tau^2|\sigma_2|(\varphi_2,\varphi_2)_2 - |\sigma_2|/\eta(\varphi_1',\varphi_1')_1 - \tau^2|\sigma_2|/\eta(\varphi_1,\varphi_1)_1. \end{array}$$

Ainsi, si $\sigma_1 > |\sigma_2|$, il existe $C > 0$ indépendante de τ telle que

$$|a(\varphi,\mathtt{T}_1\varphi)| \geq C((\varphi',\varphi') + \tau^2(\varphi,\varphi)), \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b;b[). \tag{3.10}$$

De même, on montre que si $\sigma_1 < |\sigma_2|$, il existe $C > 0$ indépendante de τ telle que

$$|a(\varphi, \mathtt{T}_2\varphi)| \geq C((\varphi', \varphi') + \tau^2(\varphi, \varphi)), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b; b[). \tag{3.11}$$

En procédant comme dans la preuve du Théorème 1.1.1 du Chapitre 1, on déduit que si $\kappa_\sigma \neq -1$, pour tout $g \in \mathrm{H}^{-1}(]-b; b[)$, il existe un unique $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]-b; b[)$ tel que

$$a(\varphi, \phi) = \langle g, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathrm{H}_0^1(]-b; b[).$$

Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(]-b; b[) \times \mathrm{H}_0^1(]-b; b[)$.

Si maintenant g est dans $\mathrm{L}^2(]-b; b[)$ alors $d_\theta^2\varphi_1$ est dans $\mathrm{L}^2(]-b; 0[)$ donc $\varphi_1 \in \mathrm{H}^2(]-b; 0[)$. De même, $\varphi_2 \in \mathrm{H}^2(]0; b[)$. On peut alors affirmer que si $\kappa_\sigma \neq -1$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est bijectif de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathrm{L}^2(]-b; b[)$. Puisque $\mathscr{L}(\lambda)$ est continu, le théorème de Banach permet de conclure que $\mathscr{L}(\lambda)$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathrm{L}^2(]-b; b[)$. ■

Reprenons la preuve du Théorème 3.1.4. Si $u \in \mathscr{D}(B_0^0)$ vérifie $B_0^0 u = f$, on a $\mathscr{L}(\lambda)\hat{u}(\lambda, \cdot) = \hat{f}(\lambda, \cdot)$ et donc $\hat{u}(\lambda, \cdot) = \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{f}(\lambda, \cdot)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}i$. Pour pouvoir effectuer la transformée de Laplace inverse, il faut contrôler la norme de $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$. Attelons-nous à cette tâche. Considérons $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ et notons $g = \mathscr{L}(\lambda)\varphi$. Supposons $\sigma_1 > |\sigma_2|$ et repartons de (3.10) (le cas $\sigma_1 < |\sigma_2|$ se traite similairement en travaillant à partir de l'estimation (3.11)). On a

$$C\,|\lambda|^2\,(\varphi, \varphi) \leq |a(\varphi, \mathtt{T}_1\varphi)| = |(g, \mathtt{T}_1\varphi)|.$$

En remarquant que $\mathtt{T}_1$ est également continu de $\mathrm{L}^2(]-b; b[)$ dans $\mathrm{L}^2(]-b; b[)$, on déduit que l'on a l'estimation

$$|\lambda|^2\,\|\varphi\|_{]-b;b[} \leq C\,\|g\|_{]-b;b[} \tag{3.12}$$

avec C indépendante de λ. D'autre part, puisque

$$-\sigma_1(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_1 = g_1 \qquad \text{et} \qquad -\sigma_2(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_2 = g_2,$$

on obtient

$$\left\|d_\theta^2\varphi_1\right\|_{]-b;0[} \leq C\,(\|g_1\|_{]-b;0[} + |\lambda|^2\,\|\varphi_1\|_{]-b;0[}) \leq C\,\|g\|_{]-b;b[} \tag{3.13}$$

ainsi que

$$\left\|d_\theta^2\varphi_2\right\|_{]0;b[} \leq C\,\|g\|_{]-b;b[}\,.$$

Grâce à (3.10), on peut également écrire

$$C(\varphi', \varphi') \leq |a(\varphi, \mathtt{T}_1\varphi)| = |(g, \mathtt{T}_1\varphi)|.$$

D'où

$$\|d_\theta\varphi\|_{]-b;b[} \leq C\,\|g\|_{]-b;b[}\,. \tag{3.14}$$

En utilisant (3.12), (3.13) et (3.14), on a l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de λ telle que

$$\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^2(]-b;0[)} + |\lambda|^2\,\|\varphi_1\|_{]-b;0[} \leq C\,\|g\|_{]-b;b[}\,. \tag{3.15}$$

De même, on a

$$\|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^2(]0;b[)} + |\lambda|^2\,\|\varphi_2\|_{]0;b[} \leq C\,\|g\|_{]-b;b[}\,. \tag{3.16}$$

Si $u \in \mathscr{D}(B_0^0)$ vérifie $B_0^0 u = f$, les estimations (3.15) et (3.16) impliquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}i$,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}_1(\lambda, \cdot)\|_{\mathrm{H}^2(]-b;0[)} + |\lambda|^2\,\|\hat{u}_1(\lambda, \cdot)\|_{]-b;0[} &\leq C\,\|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{]-b;b[} \\
\|\hat{u}_2(\lambda, \cdot)\|_{\mathrm{H}^2(]0;b[)} + |\lambda|^2\,\|\hat{u}_2(\lambda, \cdot)\|_{]0;b[} &\leq C\,\|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{]-b;b[},
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de u, f et λ. Avec le Lemme 3.1.2, on déduit que l'opérateur $B_0^0 : \mathscr{D}(B_0^0) \to \mathscr{R}(B_0^0)$ constitue un isomorphisme. La transformée de Laplace inverse fournit la représentation

$$u(t,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_0} e^{\lambda t}\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda,\theta)\,d\lambda.$$

■

Remarque 3.1.7 *Dans [66], les auteurs obtiennent un résultat équivalent à celui du Théorème 3.1.4 en utilisant des techniques de représentation intégrale.*

En utilisant un argument classique en théorie des équations elliptiques (voir [154, théorème 11.4.2]), nous allons prouver que de part et d'autre de l'interface, on gagne les deux crans de régularité caractéristiques des opérateurs elliptiques.

Théorème 3.1.8 *Pour $m \geq 0$, l'opérateur B_0^m constitue un isomorphisme de $\mathscr{D}(B_0^m)$ dans $\mathscr{R}(B_0^m)$ si et seulement si $\kappa_\sigma \neq -1$.*

Preuve. De nouveau, lorsque $\kappa_\sigma = -1$, on peut construire comme dans la preuve du Théorème 1.5.1 un noyau de dimension infinie pour B_0^m. Dans une telle situation, l'opérateur B_0^m n'est pas de type Fredholm. Concentrons-nous maintenant sur le cas $\kappa_\sigma \neq -1$. Nous allons procéder par récurrence. Le Théorème 3.1.4 constitue l'étape d'initialisation.

Supposons que B_0^m soit un isomorphisme de $\mathscr{D}(B_0^m)$ dans $\mathscr{R}(B_0^m)$.
Considérons $f \in \mathscr{R}(B_0^{m+1})$, $m \geq 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique $u \in \mathscr{D}(B_0^m)$ tel que $B_0^m u = f$. On souhaite montrer que u appartient à $\mathscr{D}(B_0^{m+1})$. Pour ce faire, il suffit de prouver que $(u_1, u_2) \in \mathrm{H}^{m+3}(\mathcal{B}_1) \times \mathrm{H}^{m+3}(\mathcal{B}_2)$. Posons $v_1 := \partial_t u_1 \in \mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1) \subset \mathrm{H}^1(\mathcal{B}_1)$ et $v_2 := \partial_t u_2 \in \mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathrm{H}^1(\mathcal{B}_2)$. La fonction v_1 possède une trace sur la frontière de $\mathcal{B}_1$ et $v_1 = 0$ sur Γ_1 car $u_1 = 0$ sur Γ_1. De même, on a $v_2 = 0$ sur Γ_2. Le couple (v_1, v_2) vérifie

$$\left|\begin{array}{rcll} -\sigma_1\Delta v_1 & = & \partial_t f_1 & \text{dans } \mathcal{B}_1 \\ -\sigma_2\Delta v_2 & = & \partial_t f_2 & \text{dans } \mathcal{B}_2 \\ v_1 - v_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \\ \sigma_1\partial_\theta v_1 - \sigma_2\partial_\theta v_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_1 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ v_2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array}\right.$$

Or $(\partial_t f_1, \partial_t f_2)$ appartient à $\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1) \times \mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)$. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, (v_1, v_2) constitue un élément de $\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1) \times \mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)$ et donc $(\partial_t u_1, \partial_t u_2) \in \mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1) \times \mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)$. En dérivant les équations volumiques dans (3.8), on peut écrire, pour $|\alpha| \leq m+1$,

$$\partial_\theta^2\partial^\alpha u_1 = -\partial_t^2\partial^\alpha u_1 - \sigma_1^{-1}\partial^\alpha f_1 \qquad \text{et} \qquad \partial_\theta^2\partial^\alpha u_2 = -\partial_t^2\partial^\alpha u_2 - \sigma_2^{-1}\partial^\alpha f_2.$$

Le couple (u_1, u_2) est bien dans $\mathrm{H}^{m+3}(\mathcal{B}_1) \times \mathrm{H}^{m+3}(\mathcal{B}_2)$. Ainsi, pour tout $m \geq 0$, B_0^m est bijectif de $\mathscr{D}(B_0^m)$ dans $\mathscr{R}(B_0^m)$. Puisque B_0^m est continu, le théorème de Banach permet de conclure. ■

Remarque 3.1.9 *Le Théorème 3.1.8 peut paraître assez particulier car on impose à $\mathcal{B}$ d'être symétrique par rapport à la droite $\{(t,0),\, t \in \mathbb{R}\}$. Néanmoins, pour une interface polygonale par morceaux, en utilisant une fonction de troncature adaptée, ce résultat permet de prouver que pour un second membre dans H^m de part et d'autre de Σ, la solution du problème $(\mathscr{P})$, lorsqu'elle existe, est localement (au voisinage de la partie droite de Σ) H^{m+2} de part et d'autre de Σ.*

3.1.3 Bande infinie non symétrique

Nous allons généraliser ce que nous venons de voir dans deux directions. D'une part, nous considérerons le cas d'une bande infinie non nécessairement symétrique. D'autre part, nous travaillerons dans les espaces à poids $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})$ qui permettent de mesurer avec précision le comportement des fonctions en $\pm\infty$. Rappelons que $\mathrm{W}^m_0(\mathcal{B}) = \mathrm{H}^m(\mathcal{B})$.

L'ouvert considéré sera

$$\mathcal{B} := \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times]a;b[\}$$

avec $a < 0$ et $b > 0$. Lorsqu'on applique la transformée de Laplace au problème (3.8), pour $m \geq 0$, il apparaît le symbole $\mathscr{L}(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}) \to \mathscr{R}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$ avec

$$\begin{aligned}
(g_1, g_2) &:= (-\sigma_1(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_1, -\sigma_2(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_2)\,; \\
\mathscr{D}(\mathscr{L}) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \,|\, (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathrm{H}^{m+2}(]a;0[) \times \mathrm{H}^{m+2}(]0;b[),\ \sigma_1 d_\theta\varphi_1(0) = \sigma_2 d_\theta\varphi_2(0)\}\,; \quad (3.17)\\
\mathscr{R}(\mathscr{L}) &:= \{g \in \mathrm{L}^2(]a;b[) \,|\, (g_1,g_2) \in \mathrm{H}^m(]a;0[) \times \mathrm{H}^m(]0;b[)\}\,.
\end{aligned}$$

Nous dirons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de $\mathscr{L}$ si $\ker \mathscr{L}(\lambda) \neq \{0\}$.

L'étude de l'opérateur B^m_β dans la bande non symétrique va reposer sur une analyse fine des propriétés du symbole $\mathscr{L}(\lambda)$. Commençons par montrer le lemme suivant.

Lemme 3.1.10 *Fixons $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. L'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ définit un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ si et seulement si λ n'est pas valeur propre de $\mathscr{L}$.*

Preuve. Si λ est valeur propre de $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}(\lambda)$ n'est pas injectif donc n'est pas bijectif. Supposons maintenant que λ ne soit pas valeur propre de $\mathscr{L}$. Alors par définition, $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif. Nous allons prouver que $\mathscr{L}(\lambda)$ est également surjectif. Nous pourrions utiliser la T-coercivité en 1D comme dans la preuve du Lemme 3.1.6. Pour avoir plusieurs cordes à notre arc, nous présenterons une autre démarche.

Donnons-nous $g \in \mathscr{R}(\mathscr{L})$. Par définition de $\mathscr{R}(\mathscr{L})$, on a alors $(g_1,g_2) \in \mathrm{H}^m(]a;0[) \times \mathrm{H}^m(]0;b[)$. Nous allons construire $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$. Considérons d'abord les deux problèmes indépendants

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } \varphi^a_1 \in \mathrm{H}^1_0(]a;0[) \cap \mathrm{H}^{m+2}(]a;0[) \ \text{ tel que :} \\
-\sigma_1(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi^a_1 \ = \ g_1 \quad \text{sur }]a;0[\,.
\end{array}\right. \tag{3.18}$$

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } \varphi^a_2 \in \mathrm{H}^1_0(]0;b[) \cap \mathrm{H}^{m+2}(]0;b[) \ \text{ tel que :} \\
-\sigma_2(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi^a_2 \ = \ g_2 \quad \text{sur }]0;b[\,.
\end{array}\right. \tag{3.19}$$

Montrons brièvement que chacun de ces problèmes possède une unique solution. Travaillons par exemple sur le premier. L'opérateur $\varphi \mapsto d_\theta^2\varphi$ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[) \cap \mathrm{H}^1_0(]a;0[)$ dans $\mathrm{H}^m(]a;0[)$. Puisque $\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[) \cap \mathrm{H}^1_0(]a;0[)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{H}^m(]a;0[)$, l'alternative de Fredholm nous indique que le problème (3.18) induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[) \cap \mathrm{H}^1_0(]a;0[)$ dans $\mathrm{H}^m(]a;0[)$ si et seulement s'il est injectif. Mais (3.18) est bien injectif car nous avons supposé $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. On procède de même pour étudier le problème (3.19). Ainsi, les fonctions φ^a_1 et φ^a_2 sont bien définies.
Considérons ensuite le problème

$$\left|\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } \varphi^b \in \mathscr{D}(\mathscr{L}) \ \text{ tel que :}} \\
-\sigma_1(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi^b_1 & = & 0 & \text{sur }]a;0[\\
-\sigma_2(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi^b_2 & = & 0 & \text{sur }]0;b[\\
\varphi^b_1(0) - \varphi^b_2(0) & = & 0 & \\
\sigma_1\partial_\theta\varphi^b_1(0) - \sigma_2\partial_\theta\varphi^b_2(0) & = & -\psi & ,
\end{array}\right.$$

avec $\psi = \sigma_1 \partial_\theta \varphi_1^a(0) - \sigma_2 \partial_\theta \varphi_2^a(0)$. Le fait d'avoir éliminé les termes sources volumiques permet de chercher φ_1^b et φ_2^b sous la forme

$$\varphi_1^b(\theta) = A \sin(\lambda(\theta - a)) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2^b(\theta) = B \sin(\lambda(\theta - b))$$

où A et B sont des constantes. En écrivant les conditions de transmission sur Σ, on montre que φ_1^b et φ_2^b sont définies de façon unique lorsque $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif.

Considérons alors la fonction φ telle que $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1^a + \varphi_1^b, \varphi_2^a + \varphi_2^b)$. On a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ et $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$. Ceci montre que lorsque $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de $\mathscr{L}$, l'opérateur injectif $\mathscr{L}(\lambda)$ est également surjectif. Avec le théorème de Banach, on déduit que $\mathscr{L}(\lambda)$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ pour de telles valeurs de λ. ■

Comme nous l'avons vu dans la preuve du Théorème 3.1.4, ce résultat n'est pas suffisant. Pour pouvoir effectuer la transformée de Laplace inverse de $\lambda \mapsto \mathscr{L}^{-1}\hat{f}(\lambda, \cdot)$ sur la droite $\ell_{-\beta}$, il nous faut également une estimation de la norme de $\mathscr{L}^{-1}$ indépendante de λ. C'est pourquoi, nous allons prouver le lemme important suivant.

Lemme 3.1.11 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. Il existe des constantes réelles ρ et δ telles que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaisant les conditions*

$$|\lambda| > \rho \qquad \text{et} \qquad |\Re e\, \lambda| < \delta\, |\Im m\, \lambda|\,,$$

il existe un unique élément φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$, avec g donné dans $\mathscr{R}(\mathscr{L})$. Cette solution satisfait de plus l'estimation

$$\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)} \leq C \left(\|g_1\|_{\mathrm{H}^{m}(]a;0[,\,\lambda)} + \|g_2\|_{\mathrm{H}^{m}(]0;b[,\,\lambda)} \right), \tag{3.20}$$

où C est une constante indépendante de g et λ.

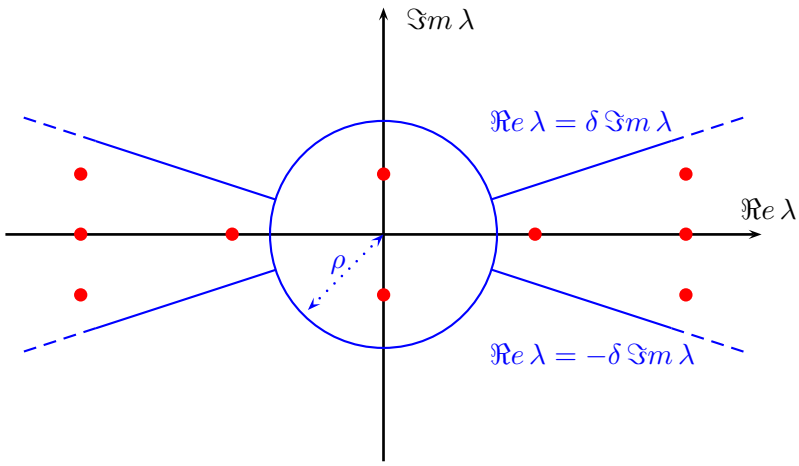


FIGURE 3.2 – Le Lemme 3.1.11 prouve que toutes les valeurs propres de $\mathscr{L}$ (points rouges), pour $\kappa_\sigma \neq -1$, sont situées dans une sorte de nœud papillon du plan complexe.

Preuve. Nous allons démontrer ce résultat avec la technique d'addition d'une variable utilisée dans la démonstration du lemme 3.6 de [72] (voir aussi [1] ou [102, théorème 3.6.1]).

Prouvons d'abord ce résultat pour $\lambda \in \mathbb{R}i$. Considérons ζ et η des fonctions de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, avec ζ non identiquement nulle, telles que $\eta\zeta = \zeta$ (*i.e.* η vaut 1 sur le support de ζ). Dans la suite, η et ζ dépendront de la variable t. Donnons-nous $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Introduisons la fonction v telle

$v(t,\theta) = e^{\lambda t}\varphi(\theta)$ (c'est ici que l'on fait l'addition de la variable t).

Donnons-nous également $\chi^1 \in \mathscr{C}_0^\infty(]a;b[\,,[0;1])$ une fonction de troncature (pour la variable θ) paire valant 1 dans un voisinage de 0. Définissons ensuite $\chi^0 := 1-\chi^1$. Puisque le support de χ^0 ne rencontre pas l'interface Σ, l'inversibilité locale de B_0^m permet d'écrire

$$\left\|\zeta\chi^0 v_1\right\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \left\|\zeta\chi^0 v_2\right\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)} \leq C\left(\left\|\Delta(\zeta\chi^0 v_1)\right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \left\|\Delta(\zeta\chi^0 v_2)\right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)}\right). \tag{3.21}$$

Le Théorème 3.1.8 nous indique, lui, qu'on a

$$\left\|\zeta\chi^1 v_1\right\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \left\|\zeta\chi^1 v_2\right\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)} \leq C\left(\left\|\Delta(\zeta\chi^1 v_1)\right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \left\|\Delta(\zeta\chi^1 v_2)\right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)}\right). \tag{3.22}$$

En écrivant $\Delta(\zeta\chi^i v_j) = \zeta\chi^i\Delta v_j + 2\nabla(\zeta\chi^i)\cdot\nabla v_j + \Delta(\zeta\chi^i)v_j$ pour $i=0,1$ et $j=1,2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Delta(\zeta\chi^0 v_1)\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} &\leq C\left(\|\eta\Delta v_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1)}\right)\\
\|\Delta(\zeta\chi^0 v_2)\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} &\leq C\left(\|\eta\Delta v_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\eta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2)}\right)\\
\|\Delta(\zeta\chi^1 v_1)\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} &\leq C\left(\|\eta\Delta v_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1)}\right)\\
\|\Delta(\zeta\chi^1 v_2)\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} &\leq C\left(\|\eta\Delta v_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\eta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2)}\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

D'autre part, puisque $\chi^0+\chi^1 = 1$ sur $]a;b[$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\|\zeta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} &\leq \|\zeta\chi^0 v_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|\zeta\chi^1 v_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)}\\
\|\zeta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)} &\leq \|\zeta\chi^0 v_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)} + \|\zeta\chi^1 v_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En regroupant (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24), on déduit l'estimation

$$\begin{aligned}
&\|\zeta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|\zeta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)}\\
&\quad\leq C\left(\|\eta\Delta v_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta\Delta v_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\eta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1)} + \|\eta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2)}\right).
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que l'on a, grâce à cet « addition » particulière de la variable t

$$\begin{aligned}
\Delta v_1 = \Delta(e^{\lambda t}\varphi_1(\theta)) &= \partial_t^2(e^{\lambda t}\varphi_1(\theta)) + \partial_\theta^2(e^{\lambda t}\varphi_1(\theta))\\
&= \lambda^2 e^{\lambda t}\varphi_1(\theta) + e^{\lambda t}(-\lambda^2\varphi_1(\theta) - \sigma_1^{-1}g_1) \quad = \quad -\sigma_1^{-1}g_1,
\end{aligned}$$

ainsi que $\Delta v_2 = -\sigma_2^{-1}g_2$. En utilisant le Lemme 3.1.3, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\lambda)}\\
&\quad\leq C\left(\|\zeta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|\zeta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\mathcal{B}_2)}\right)\\
&\quad\leq C\left(\|\eta\Delta v_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta\Delta v_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\eta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1)} + \|\eta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2)}\right)\\
&\quad\leq C\left(\|\eta\, g_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta\, g_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\eta v_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_1)} + \|\eta v_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{B}_2)}\right)\\
&\quad\leq C\left(\|\eta\, g_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta\, g_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)} + \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(]a;0[,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(]0;b[,\lambda)}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Mais toujours d'après le Lemme 3.1.3, il existe C indépendante de λ telle que

$$\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+1}(]a;0[,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+1}(]0;b[,\lambda)} \leq \frac{C}{1+|\lambda|}\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\lambda)}\right). \tag{3.26}$$

En réinjectant (3.26) dans (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)} \quad &\leq \quad C\left(\|\eta\, g_1\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_1)} + \|\eta\, g_2\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B}_2)}\right)\\ &\quad + \frac{C}{1+|\lambda|}\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $|\lambda|$ suffisamment grand (par exemple pour λ vérifiant $|\lambda| > \rho := 2C-1$), on a l'estimation (3.20). Ceci prouve que pour $\lambda \in \mathbb{R}i$ avec $|\lambda| > \rho$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif donc bijectif d'après le Lemme 3.1.10.

Traitons maintenant le cas $\boldsymbol{\lambda \notin \mathbb{R}i}$. Réécrivons λ sous la forme $\lambda = \pm i\,|\lambda|\,e^{i\psi}$ avec $\psi \in\,]-\pi/2;\pi/2[$. Définissons $\tilde{\lambda} = \pm i\,|\lambda|$. Puisque $|\tilde{\lambda}| = |\lambda|$, par définition de la norme à paramètre (3.7), on a

$$\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)} = \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\tilde{\lambda})}\,.$$

Donnons-nous de nouveau $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Notons $\tilde{g} := \mathscr{L}(\tilde{\lambda})(\varphi)$. Puisque $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}i$, pour $|\lambda| > \rho$ où ρ a été fixé dans la première partie de la preuve, l'estimation (3.20) donne

$$\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\tilde{\lambda})} \leq C\left(\|\tilde{g}_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\tilde{g}_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\tilde{\lambda})}\right). \tag{3.27}$$

Mais l'on a par ailleurs

$$\begin{aligned}&\|\tilde{g}_1 - g_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\tilde{g}_2 - g_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\tilde{\lambda})}\\ =\;& \|\tilde{g}_1 - g_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\lambda)} + \|\tilde{g}_2 - g_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\lambda)}\\ =\;& \left\|\sigma_1(\tilde{\lambda}^2 - \lambda^2)\varphi_1\right\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\lambda)} + \left\|\sigma_2(\tilde{\lambda}^2 - \lambda^2)\varphi_2\right\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\lambda)}\\ \leq\;& \max\left(\sigma_1, |\sigma_2|\right)\,|\lambda|^2\,|1 - e^{2\,i\,\psi}|\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\lambda)}\right)\\ \leq\;& \max\left(\sigma_1, |\sigma_2|\right)|1 - e^{2\,i\,\psi}|\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varsigma > 0$, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\|\tilde{g}_1 - g_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\tilde{g}_2 - g_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\tilde{\lambda})} \leq \varsigma\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)}\right) \tag{3.28}$$

lorsque $\lambda = \pm i\,|\lambda|\,e^{i\psi}$ est tel que $|\psi| \leq \delta$. De (3.27) et (3.28), on déduit

$$\begin{aligned}\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\tilde{\lambda})} \quad &\leq \quad C\left(\|g_1\|_{\mathrm{H}^m(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|g_2\|_{\mathrm{H}^m(]0;b[,\,\tilde{\lambda})}\right)\\ &\quad + C\,\varsigma\left(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\tilde{\lambda})} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\tilde{\lambda})}\right).\end{aligned}$$

En prenant ς assez petit ($1/(2C)$ par exemple), on aboutit à l'estimation (3.20). Pour les λ tels que $|\lambda| > \rho$ et $|\Re e\,\lambda| < \delta\,|\Im m\,\lambda|$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif donc bijectif d'après le Lemme 3.1.10. Ceci conclut la démonstration de ce lemme. ■

Nous déduisons le

Corollaire 3.1.12 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ si et seulement si λ n'est pas valeur propre de $\mathscr{L}$.*

Preuve. D'après le Lemme 3.1.11, pour $\kappa_\sigma \neq -1$, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda_0)$ soit inversible. Mais pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ diffère de $\mathscr{L}(\lambda_0)$ d'une perturbation compacte. Le résultat de ce corollaire découle donc directement du théorème de Fredholm analytique. ■

Nous avons maintenant tout le matériel pour démontrer le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 3.1.13 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. L'opérateur B_β^m définit un isomorphisme de $\mathscr{D}(B_\beta^m)$ dans $\mathscr{R}(B_\beta^m)$ si et seulement si $\mathscr{L}$ n'a aucune valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$.*

Preuve. Supposons que $\mathscr{L}$ ne possède aucune valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$. Commençons par prouver que B_β^m est injectif. Donnons-nous $u \in \mathscr{D}(B_\beta^m)$ et notons $f := B_\beta^m u$. En appliquant la transformée de Laplace par rapport à t, on obtient

$$\mathscr{L}(\lambda)\hat{u}(\lambda,\cdot) = \hat{f}(\lambda,\cdot).$$

Le Lemme 3.1.11 nous indique que pour tout λ tel que $\Re e\,\lambda = -\beta$ et $|\Im m\,\lambda| > \nu_\beta$, on a l'estimation

$$\|\hat{u}_1(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\hat{u}_2(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)} \leq C\left(\|\hat{f}_1(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\hat{f}_2(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m}(]0;b[,\,\lambda)}\right) \tag{3.29}$$

où C est une constante indépendante de λ, u et ν_β une constante ne dépendant que de β.

Pour $\lambda \in [-\beta - i\nu_\beta; -\beta + i\nu_\beta]$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est inversible d'après le Corollaire 3.1.12. La continuité de $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ sur le compact $[-\beta - i\nu_\beta; -\beta + i\nu_\beta]$ (voir le théorème 1 de [144]) nous permet d'affirmer, avec (3.29), que pour tout λ tel que $\Re e\,\lambda = -\beta$, on a

$$\|\hat{u}_1(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\hat{u}_2(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m+2}(]0;b[,\,\lambda)} \leq C\left(\|\hat{f}_1(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m}(]a;0[,\,\lambda)} + \|\hat{f}_2(\lambda,\cdot)\|_{\mathrm{H}^{m}(]0;b[,\,\lambda)}\right) \tag{3.30}$$

où C est une constante indépendante de λ et u. En intégrant (3.30) sur la droite $\ell_{-\beta}$, on déduit du Lemme 3.1.2 que si $u \in \mathscr{D}(B_\beta^m)$ vérifie $B_\beta^m u = f$, alors on a

$$\|u_1\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|u_2\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_2)} \leq C\left(\|f_1\|_{\mathrm{W}_\beta^{m}(\mathcal{B}_1)} + \|f_2\|_{\mathrm{W}_\beta^{m}(\mathcal{B}_2)}\right). \tag{3.31}$$

Ceci montre que B_β^m est injectif.

On montre ensuite que B_β^m est surjectif en utilisant le Lemme 3.1.2, le Corollaire 3.1.12 ainsi que l'estimation (3.30). La transformée de Laplace inverse fournit la représentation

$$u(t,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda t}\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda,\theta)\,d\lambda. \tag{3.32}$$

Supposons maintenant que la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$ contienne une valeur propre λ_0 de $\mathscr{L}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que B_β^m définisse un isomorphisme de $\mathscr{D}(B_\beta^m)$ dans $\mathscr{R}(B_\beta^m)$. Dans ce cas, $(B_\beta^m)^{-1} : \mathscr{R}(B_\beta^m) \to \mathscr{D}(B_\beta^m)$ est continu et il existe donc $C > 0$ telle que

$$\|u_1\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|u_2\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_2)} \leq C\left(\|\Delta u_1\|_{\mathrm{W}_\beta^{m}(\mathcal{B}_1)} + \|\Delta u_2\|_{\mathrm{W}_\beta^{m}(\mathcal{B}_2)}\right) \tag{3.33}$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(B_\beta^m)$. Introduisons $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(t) = 1$ pour $t \leq -1/2$ et $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons u^n la fonction vérifiant

$$u^n(t,\theta) := \chi_n(t)\,e^{\lambda_0 t}\varphi(\theta),$$

avec φ vecteur propre de $\mathscr{L}(\lambda_0)$ et $\chi_n(t) := \chi(|t| - n)$. Notons que χ_n est une fonction plateau qui vaut 1 sur $[-(n-1/2); n-1/2]$ et 0 sur $]-\infty; -n] \cup [n; +\infty[$. Puisque le support de χ_n tend vers $\mathbb{R}$, on a

$$\|u_1^n\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_1)} + \|u_2^n\|_{\mathrm{W}_\beta^{m+2}(\mathcal{B}_2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{3.34}$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{array}{rcl}\Delta u_1^n = \Delta(\chi_n\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1) & = & \partial_t^2(\chi_n\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1) + \partial_\theta^2(\chi_n\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1) \\ & = & e^{\lambda_0 t}\varphi_1\partial_t^2\chi_n + 2\,\lambda_0\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1\partial_t\chi_n + \lambda_0^2\,\chi_n\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1 - \lambda_0^2\,\chi_n\, e^{\lambda_0 t}\varphi_1 \\ & = & e^{\lambda_0 t}\varphi_1(\partial_t^2\chi_n + 2\,\lambda_0\,\partial_t\chi_n).\end{array}$$

D'après les propriétés de χ_n, Δu_1^n est à support dans $[-n;-(n-1/2)]\times[a;b]\cup[n-1/2;n]\times[a;b]$. Puisque $\Re e\,\lambda_0 = -\beta$, la suite $(\Delta u_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ reste bornée dans $\mathrm{W}_\beta^m(\mathcal{B}_1)$. Il en va de même pour $(\Delta u_2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathrm{W}_\beta^m(\mathcal{B}_2)$. Ceci couplé à (3.34) prouve qu'on ne peut avoir l'estimation (3.33). Ainsi, l'opérateur B_β^m ne peut constituer un isomorphisme lorsque $\mathscr{L}$ possède une valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$. ■

Avec le Lemme 3.1.11, nous avons montré que les valeurs propres de $\mathscr{L}$ appartiennent à un nœud papillon du plan complexe pour $\kappa_\sigma \neq -1$. Nous allons préciser encore leur disposition.

Proposition 3.1.14 *Le nombre $\lambda\in\mathbb{C}^*$ constitue une valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si*

$$(\sigma_1+\sigma_2)\sin(\lambda(b-a)) = (\sigma_2-\sigma_1)\sin(\lambda(b+a)). \tag{3.35}$$

D'autre part, 0 est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si

$$\frac{\sigma_2}{b} - \frac{\sigma_1}{a} = 0. \tag{3.36}$$

Preuve. Par définition, si λ est une valeur propre de $\mathscr{L}$, il existe un élément non nul $\varphi\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = 0$.

Si λ est non nul, puisque φ_1 (resp. φ_2) vérifie $(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_1 = 0$ sur $]a;0[$ (resp. $(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_2 = 0$ sur $]0;b[$), on déduit

$$\varphi_1(\theta) = A\sin(\lambda(\theta-a)) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(\theta) = B\sin(\lambda(\theta-b))$$

où A et B sont des constantes. Les conditions de transmission imposent de plus

$$\left|\begin{array}{rcl} A\sin(\lambda a) & = & B\sin(\lambda b) \\ A\sigma_1\cos(\lambda a) & = & B\sigma_2\cos(\lambda b).\end{array}\right.$$

Ce système (les inconnues étant A et B) possède une solution non nulle si et seulement si

$$\begin{array}{rl} & \sigma_1\cos(\lambda a)\sin(\lambda b) - \sigma_2\cos(\lambda b)\sin(\lambda a) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sigma_1+\sigma_2)\sin(\lambda(b-a)) = (\sigma_2-\sigma_1)\sin(\lambda(b+a)).\end{array}$$

Ceci prouve la première partie de la proposition.

Si λ est nul, φ_1 et φ_2 vérifient $\varphi_1(\theta) = A(\theta-a)$ et $\varphi_2(\theta) = B(\theta-b)$ où A et B sont des constantes. Les deux conditions de transmission à l'interface entraînent $Aa = Bb$ et $A\sigma_1 = B\sigma_2$. Ainsi, 0 est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si $\sigma_2/b - \sigma_1/a = 0$. ■

Remarque 3.1.15 *Ainsi, les valeurs propres de $\mathscr{L}$ sont égales aux zéros de la fonction entière $\lambda\mapsto(\sigma_1+\sigma_2)\sin(\lambda(b-a)) - (\sigma_2-\sigma_1)\sin(\lambda(b+a))$.*
Lorsque, $\kappa_\sigma\neq-1$, pour tout $a<0$ et $b>0$, cette fonction est non nulle. Par conséquent, d'après le théorème des zéros isolés, dans cette configuration, les valeurs propres de $\mathscr{L}$ forment un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.
Lorsque $\kappa_\sigma = -1$, pour $b=-a$, on remarque que l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est égal au plan complexe tout entier. Cette situation laisse peu d'espoir pour déterminer un cadre fonctionnel adapté pour étudier le problème. Pour $b\neq-a$, l'ensemble des valeurs propres est discret. Mais dans ce cas de figure, il n'est pas possible d'établir l'estimation (3.20) sur $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$.

Remarque 3.1.16 *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\ker \mathscr{L}(\lambda) \neq \{0\}$, la dimension de $\ker \mathscr{L}(\lambda) \neq \{0\}$ est appelée multiplicité géométrique de la valeur propre λ. Pour notre problème, la multiplicité géométrique des valeurs propres est toujours égale à 1. Pour le voir, il suffit de remarquer que la matrice*

$$\begin{pmatrix} \sin(\lambda a) & -\sin(\lambda b) \\ \sigma_1 \cos(\lambda a) & -\sigma_2 \cos(\lambda b) \end{pmatrix}$$

n'est jamais égale à la matrice nulle.

3.1.4 Comportement des solutions à l'infini

Donnons-nous deux réels β^1 et β^2 tels que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur les droites $\Re e\, \lambda = -\beta^1$ et $\Re e\, \lambda = -\beta^2$. Dans ce cas, d'après le Théorème 3.1.13, les opérateurs $B^m_{\beta^1} : \mathscr{D}(B^m_{\beta^1}) \to \mathscr{R}(B^m_{\beta^1})$ et $B^m_{\beta^2} : \mathscr{D}(B^m_{\beta^2}) \to \mathscr{R}(B^m_{\beta^2})$ constituent des isomorphismes. Considérons alors $f \in \mathscr{R}(B^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{R}(B^m_{\beta^2})$. Notons que cet ensemble est non vide : il contient notamment $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{B})$. Définissons $u_{\beta^1} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^1})$ l'élément tel que $B^m_{\beta^1} u_{\beta^1} = f$ et $u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^2})$ celui vérifiant $B^m_{\beta^2} u_{\beta^2} = f$. Dans ce paragraphe, nous allons donner un résultat permettant de comparer u_{β^1} et u_{β^2}. L'outil fondamental pour y parvenir est le théorème des résidus. Nous utiliserons largement les résultats de la partie 5.4 de [102] et les articles [70, 71].

Théorème 3.1.17 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$.*
Supposons que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur les droites $\Re e\, \lambda = -\beta^1$ et $\Re e\, \lambda = -\beta^2$, $\beta^1 < \beta^2$. Notons $\lambda^1, \dots, \lambda^N$ les valeurs propres de $\mathscr{L}$ dans la bande $-\beta^2 < \Re e\, \lambda < -\beta^1$. Supposons que pour $k = 1, \dots, N$ on ait $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$, où φ^k est un vecteur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ^k. Considérons $f \in \mathscr{R}(B^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{R}(B^m_{\beta^2})$.
Alors les fonctions $u_{\beta^1} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^1})$ et $u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^2})$ vérifiant $B^m_{\beta^1} u_{\beta^1} = f$ et $B^m_{\beta^2} u_{\beta^2} = f$ sont liées par la relation

$$u_{\beta^1} = u_{\beta^2} + \sum_{k=1}^{N} c^k \exp(\lambda^k t)\varphi^k, \tag{3.37}$$

où c^k est une constante ne dépendant que de f et du choix de φ^k, $k = 1, \dots, N$.

Remarque 3.1.18 *Bien entendu, si $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre dans la bande $-\beta^2 < \Re e\, \lambda < -\beta^1$, on a $u_{\beta^1} = u_{\beta^2}$.*

Remarque 3.1.19 *L'hypothèse « $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$ pour $k = 1, \dots, N$ » permet de se placer dans une situation pour laquelle les termes singuliers liant u_{β^1} et u_{β^2} ont une expression relativement simple. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, le développement (3.37) fait intervenir la chaîne de Jordan associée à la valeur propre λ^k. Pour écrire la décomposition (3.37), nous nous servons également du fait que les valeurs propres sont de multiplicité géométrique égale à 1 (cf. Remarque 3.1.16).*

Preuve. Nous allons simplement donner les grandes lignes de la preuve du Théorème 3.1.17. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la démonstration du théorème 5.4.1 de [102]. D'après (3.32), u_{β^1} et u_{β^2} sont données par les formules

$$u_{\beta^1}(t,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_{-\beta^1}} e^{\lambda t}\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda \quad \text{et} \quad u_{\beta^2}(t,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_{-\beta^1}} e^{\lambda t}\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda.$$

Or, en vertu du Lemme 3.1.1, $\lambda \to \hat{f}(\lambda,\theta)$ est holomorphe dans la bande $-\beta^2 < \Re e\, \lambda < -\beta^1$. Par conséquent, les seules singularités de la fonction $\lambda \to e^{\lambda t}\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda,\theta)$ sont les pôles de $\mathscr{L}^{-1}(\lambda)$, c'est-à-dire les valeurs propres $\lambda^1, \dots, \lambda^N$ de $\mathscr{L}$.

Considérons un réel positif ρ suffisamment grand pour qu'il n'y ait pas de valeur propre de $\mathscr{L}$ dans l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, -\beta^2 < \Re e\, \lambda < -\beta^1 \text{ et } |\Im m\, \lambda| > \rho\}$. En vertu du Lemme 3.1.11, nous savons que c'est toujours possible. Avec le théorème des résidus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} u_{\beta^1}(t,\theta) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\beta^1-i\rho}^{-\beta^1+i\rho} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho\to\infty} \Bigg(\int_{-\beta^2-i\rho}^{-\beta^2+i\rho} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda \\ &\qquad + \int_{-\beta^1-i\rho}^{-\beta^2-i\rho} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda + \int_{-\beta^2+i\rho}^{-\beta^1+i\rho} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta)\, d\lambda \Bigg) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda^k} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta). \end{aligned} \tag{3.38}$$

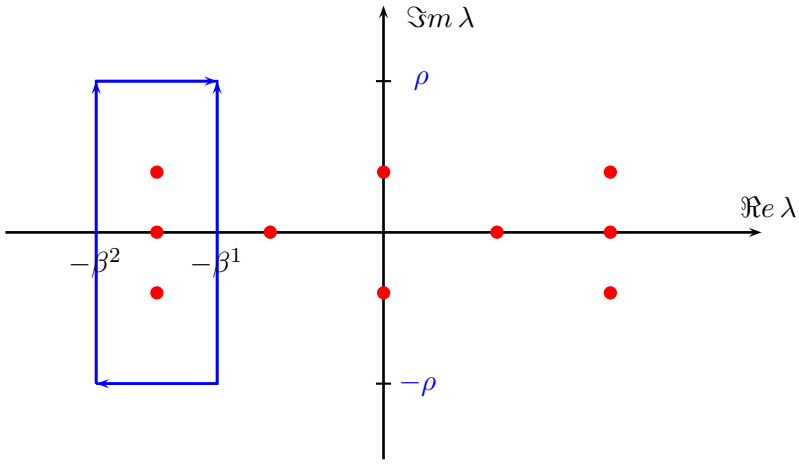


FIGURE 3.3 – Contour d'intégration (en bleu) et valeurs propres du symbole (en rouge).

La première intégrale dans le second membre de (3.38) tend vers u_{β^2} lorsque $\rho \to \infty$. En utilisant l'estimation du Lemme 3.1.11, on prouve que les seconde et troisième intégrales tendent vers 0 (procéder comme dans le lemme 5.4.1 de [102]). Il reste donc

$$u_{\beta^1}(t,\theta) \quad = \quad u_{\beta^2}(t,\theta) + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda^k} e^{\lambda t} \mathscr{L}^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda,\theta). \tag{3.39}$$

Mais il est possible d'obtenir une représentation de la résolvante de $\mathscr{L}$ au voisinage des valeurs propres. Plus précisément, le théorème 5.1.1 de [102] indique que l'on a dans un voisinage de λ^k

$$\mathscr{L}^{-1}(\lambda) = \frac{P}{\lambda - \lambda^k} + \Gamma(\lambda), \tag{3.40}$$

où $P \in \mathcal{L}(\mathscr{R}(\mathscr{L}), \mathscr{D}(\mathscr{L}))$ est l'opérateur de projection défini par

$$Pg = (g, \psi^k)\, \varphi^k, \qquad \forall g \in \mathscr{R}(\mathscr{L}),$$

avec $\psi^k = a^k \overline{\varphi^k}$, a^k étant la constante vérifiant $(2\lambda^k \sigma \varphi^k, a^k \overline{\varphi^k}) = 1$. D'autre part, dans (3.40), Γ est une fonction (à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathscr{R}(\mathscr{L}), \mathscr{D}(\mathscr{L}))$) holomorphe dans un voisinage de λ^k. En utilisant (3.40) pour calculer les résidus dans (3.39), on obtient le résultat du théorème. ■

Dans le théorème suivant, nous allons préciser l'expression des coefficients dans la décomposition (3.37).

Théorème 3.1.20 *Supposons les hypothèses du Théorème 3.1.17 vérifiées. Alors les coefficients dans (3.37) sont définis par la formule*

$$c^k = (f, \exp(-\overline{\lambda^k}t)\psi^k)_{\mathcal{B}}, \tag{3.41}$$

avec $\psi^k = a^k\overline{\varphi^k}$, a^k *étant la constante vérifiant* $(2\lambda^k\sigma\varphi^k, a^k\overline{\varphi^k}) = 1$.

Preuve. Introduisons $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que $\zeta(t) = 0$ pour $t \leq t_1$ et $\zeta(t) = 1$ pour $t \geq t_2$. Ici, t_1 et t_2 sont deux réels arbitraires satisfaisant $t_1 < t_2$. D'après (3.37), on a

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta(u_{\beta^1} - u_{\beta^2}))) = \sum_{k=1}^{N} c^k \operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta(t)\exp(\lambda^k t)\varphi^k)).$$

En utilisant le fait que $\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta(t)\exp(\lambda^k t)\varphi^k))$ est non nul uniquement sur $[t_1; t_2] \times [a; b]$ et en intégrant par parties sur ce domaine, on trouve, pour $j = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta(u_{\beta^1} - u_{\beta^2}))), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} \\
= & \sum_{k=1}^{N} c^k (\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta(t)\exp(\lambda^k t)\varphi^k)), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{]t_1;t_2[\times]a;b[} \\
= & \sum_{k=1}^{N} c^k (\lambda^k\sigma\exp(\lambda^k t_2)\varphi^k, \exp(-\overline{\lambda^j}t_2)\psi^j) - (\sigma\exp(\lambda^k t_2)\varphi^k, -\overline{\lambda^j}\exp(-\overline{\lambda^j}t_2)\psi^j) \\
= & c^j\,(2\lambda^j\sigma\varphi^j, \psi^j) = c^j.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Rappelons que la notation $(\cdot,\cdot)$ correspond au produit scalaire de $\mathrm{L}^2(]a;b[)$. Ci-dessus, nous avons utilisé la relation de biorthogonalité $(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^j}) = 0$ si $k \neq j$. Cette relation se démontre en observant qu'on a $(\sigma d_\theta\varphi^k, d_\theta\varphi) = (\lambda^k)^2(\sigma\varphi^k, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]a;b[)$.

Puisque $\beta^1 < \beta^2$, la fonction u_{β^2} est *a priori* moins décroissante que u_{β^1} en $-\infty$ et la situation est inversée en $+\infty$. Mais comme ζ est nulle au voisinage de $-\infty$, on a $\zeta u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{D}(B^m_{\beta^2})$. On peut alors intégrer par parties dans $(\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta u_{\beta^2})), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}}$. En utilisant la relation $\operatorname{div}(\sigma\nabla(\exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)) = 0$, on obtient

$$(\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta u_{\beta^2})), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} = 0. \tag{3.43}$$

Avec le même argument, on trouve

$$(\operatorname{div}(\sigma\nabla((1-\zeta)u_{\beta^1})), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} = 0. \tag{3.44}$$

En utilisant (3.43) et (3.44) dans (3.42), on peut écrire

$$\begin{aligned}
c^j &= (\operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta u_{\beta^1})), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} \\
&= (\operatorname{div}(\sigma\nabla u_{\beta^1}), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} - (\operatorname{div}(\sigma\nabla((1-\zeta)u_{\beta^1})), \exp(-\overline{\lambda^j}t)\psi^j)_{\mathcal{B}} \\
&= (f, \exp(-\overline{\lambda^k}t)\psi^k)_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Remarque 3.1.21 *Notons au passage que les coefficients dans la décomposition (3.37) dépendent continûment du terme source f.*

3.1.5 Applications

Observons comment se traduisent les résultats que nous venons d'obtenir sur deux géométries particulières.

i) Cas de la bande symétrique, $-a = b$. Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. Commençons par préciser les résultats concernant l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$. La Proposition 3.1.14 indique que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si

$$\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad (\sigma_1 + \sigma_2)\,\sin(2\lambda b) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \in \{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

D'autre part, (3.36) prouve que 0 n'est pas valeur propre de $\mathscr{L}$. Par conséquent, d'après le Théorème 3.1.13, $B^m_\beta : \mathscr{D}(B^m_\beta) \to \mathscr{R}(B^m_\beta)$ définit un isomorphisme si et seulement si $\beta \notin \{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\}$. On retrouve en particulier le Théorème 3.1.4 car $0 \notin \{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\}$.

Considérons ensuite β^1, β^2 deux réels n'appartenant pas à $\{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\}$ et tels que $\beta^1 < \beta^2$. L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda^k := k\pi/(2b)$ est engendré par φ^k avec

$$\varphi^k(\theta)|_{]-b;0[} = \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\frac{k\pi}{2b}(\theta + b)) \quad \text{et} \quad \varphi^k(\theta)|_{]0;b[} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\frac{k\pi}{2b}(\theta - b)).$$

Par un calcul simple, on obtient alors $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) = k\pi(\sigma_1 + \sigma_2)/(2b) \neq 0$. Par conséquent, pour avoir $(2\lambda^k\sigma\varphi^k, \psi^k) = 1$ avec $\psi^k = a^k\overline{\varphi^k}$ où a^k est une constante, il faut prendre ψ^k telle que

$$\psi^k(\theta)|_{]-b;0[} = \frac{\sqrt{b}}{k\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}\,\sin(\frac{k\pi}{2b}(\theta + b)) \quad \text{et} \quad \psi^k(\theta)|_{]0;b[} = -\frac{\sqrt{b}}{k\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}\sin(\frac{k\pi}{2b}(\theta - b)).$$

Choisissons maintenant un terme source f dans $\mathscr{R}(B^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{R}(B^m_{\beta^2})$. D'après les Théorèmes 3.1.17 et 3.1.20, les fonctions $u_{\beta^1} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^1})$ et $u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(B^m_{\beta^2})$ vérifiant $B^m_{\beta^1}u_{\beta^1} = f$ et $B^m_{\beta^2}u_{\beta^2} = f$ sont liées par la relation

$$u_{\beta^1} = u_{\beta^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*\,|\,-2b\beta^2/\pi<k<-2b\beta^1/\pi} c^k e^{k\pi t/(2b)}\varphi^k,$$

avec

$$c^k = (f, e^{-k\pi t/(2b)}\psi^k)_{\mathcal{B}}.$$

ii) Cas de la bande non-symétrique avec $-a = 3\,b$. Ce rapport particulier des longueurs va nous permettre de résoudre explicitement (3.35), ce qui n'est pas faisable dans le cas général. Supposons toujours $\kappa_\sigma \neq -1$. D'après la Proposition 3.1.14, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\,\sin(4\lambda b) = (\sigma_1 - \sigma_2)\,\sin(2\lambda b) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(\sigma_1 + \sigma_2)\,\sin(2\lambda b)\cos(2\lambda b) = (\sigma_1 - \sigma_2)\,\sin(2\lambda b).$$

Si $\lambda \notin \{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\}$, on a alors

$$\cos(2\lambda b) = (\sigma_1 - \sigma_2)/(2\,(\sigma_1 + \sigma_2)). \tag{3.45}$$

Si λ vérifie (3.45) alors $-\lambda$ et $\lambda + n\,\pi/b$, $n \in \mathbb{Z}$, vérifient (3.45). À l'instar de ce qui est fait dans [26], définissons

$$\rho := \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \qquad \text{et} \qquad \xi := \frac{1}{2b}\,\text{arcos}(\rho). \tag{3.46}$$

Réintroduisons le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. Remarquons deux valeurs caractéristiques de ce paramètre. D'une part, pour $\kappa_\sigma = -1/3$, on a $\rho = 1$ et donc $\xi = 0$. D'autre part, pour $\kappa_\sigma = -3$, on a $\rho = -1$ et donc $\xi = \pi/(2b)$.

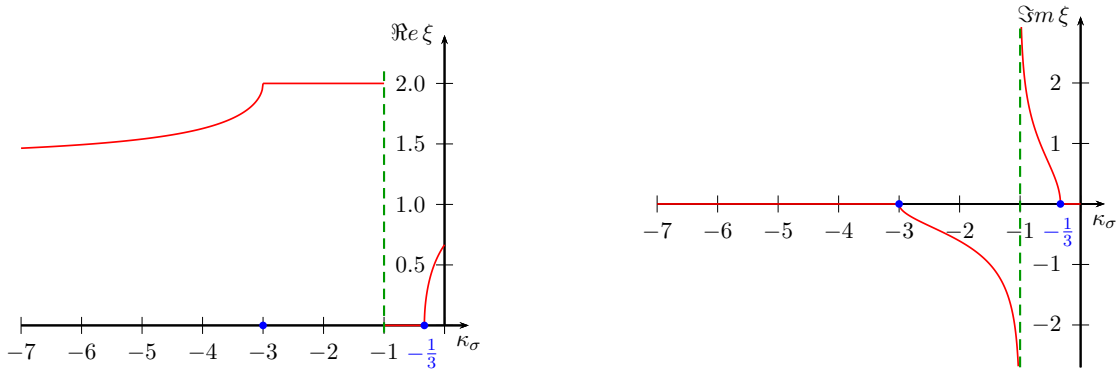


FIGURE 3.4 – Allure de ξ en fonction du contraste $\kappa_\sigma \in [-7;0]$ pour $b = \pi/4$ et $a = -3b$: partie réelle à gauche et partie imaginaire à droite.

Par ailleurs, (3.36) montre que 0 est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si $\sigma_2/\sigma_1 = -1/3$.

Par conséquent, pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$, λ est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement

$$\lambda \in \{k\pi/(2b),\, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{\xi + k\pi/b,\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\xi + k\pi/b,\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut vérifier que pour $\kappa_\sigma \in \,]-\infty;-3] \cup [-1/3;0[$, le nombre ξ est réel et par conséquent, toutes les valeurs propres de $\mathscr{L}$ sont réelles. Par contre, pour $\kappa_\sigma \in \,]-1/3;-3[\setminus\{-1\}$, il apparaît des valeurs propres complexes.

Plus précisément, si on s'intéresse au cas $\beta = 0$, on peut montrer que $\mathscr{L}$ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}i$ si et seulement si $\kappa_\sigma \in \,]-\infty;-1[\, \cup\, [-1/3;0[$. Ainsi, d'après le Théorème 3.1.13, $B_0^m : \mathscr{D}(B_0^m) \to \mathscr{R}(B_0^m)$ est un isomorphisme si et seulement si $\kappa_\sigma \in \,]-\infty;-1[\, \cup\, [-1/3;0[$.

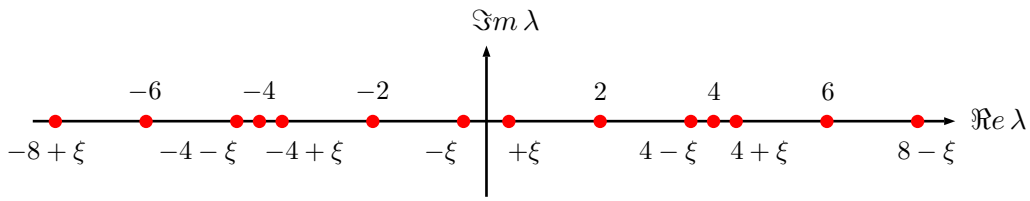


FIGURE 3.5 – Position des valeurs propres pour $\kappa_\sigma = -1/4$, $b = \pi/4$ et $a = -3b$. Cette configuration est caractéristique du cas $\kappa_\sigma \in]-\infty;-3[\cup]-1/3;0[$.

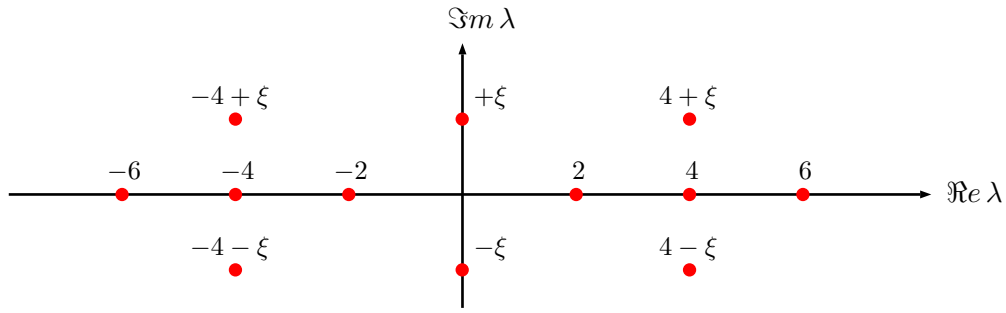


FIGURE 3.6 – Position des valeurs propres pour $\kappa_\sigma = -1/2$, $b = \pi/4$ et $a = -3b$. Cette configuration est caractéristique du cas $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$.

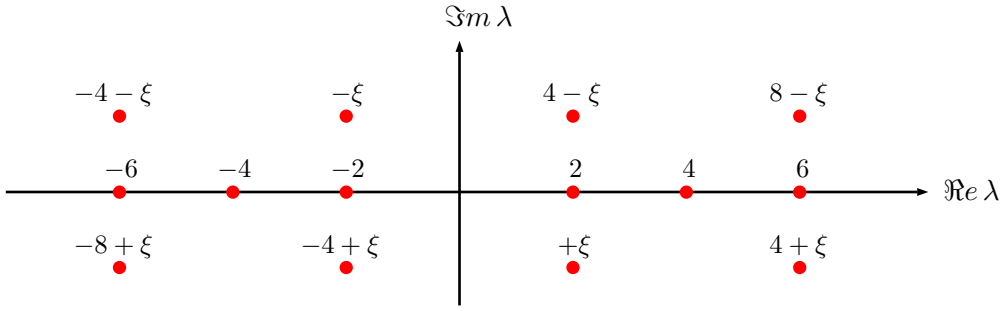


FIGURE 3.7 – Position des valeurs propres pour $\kappa_\sigma = -2$, $b = \pi/4$ et $a = -3b$. Cette configuration est caractéristique du cas $\kappa_\sigma \in]-3;-1[$.

3.2 Secteurs non bornés

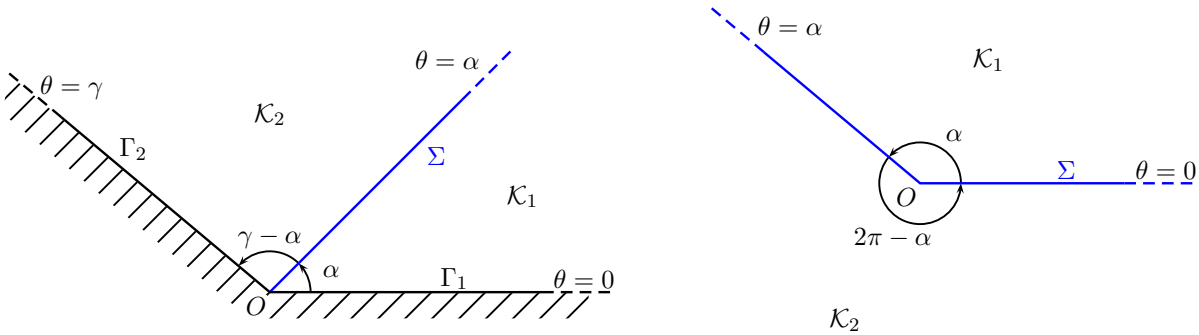


FIGURE 3.8 – Notations pour les secteurs non bornés : sommet extérieur, à gauche et sommet intérieur, à droite.

Dans ce paragraphe, nous considérerons deux types de géométrie : le *sommet extérieur* et le *sommet intérieur*. Pour le sommet extérieur (Figure 3.8, à gauche), nous travaillerons dans le secteur non borné

$$\mathcal{K} := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ 0<\theta<\gamma\}$$

avec $\gamma < 2\pi$. Ci-dessus, (r,θ) désignent les coordonnées polaires associées à O. Définissons $\mathcal{K}_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ 0<\theta<\alpha\}$, $\mathcal{K}_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ \alpha<\theta<\gamma\}$, $\Sigma := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ \theta=\alpha\}$, $\Gamma_1 := \mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ et $\Gamma_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ \theta=\gamma\}$. Pour fixer les idées, nous supposons $\alpha \le \gamma/2$. Cette hypothèse n'est en rien restrictive.

Pour la géométrie du sommet intérieur (Figure 3.8, à droite), nous prendrons

$$\mathcal{K} := \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}.$$

Nous partitionnons ensuite le plan en introduisant $\mathcal{K}_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ 0<\theta<\alpha\}$, $\mathcal{K}_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r>0,\ \alpha<\theta<2\pi\}$, $\Sigma := \mathbb{R}_+ \times \{0\} \cup \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r\ge 0,\ \theta=\alpha\}$. Sans perte de généralité, nous supposons $0<\alpha<\pi$.

De façon générale, pour les deux géométries, si v est une fonction mesurable sur $\mathcal{K}$, nous définissons $v_1 := v|_{\mathcal{K}_1}$ et $v_2 := v|_{\mathcal{K}_2}$.

En 1D, pour la partie radiale, nous noterons respectivement $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_1$, $(\cdot,\cdot)_2$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(]0;\vartheta[)$, $\mathrm{L}^2(]0;\alpha[)$, $\mathrm{L}^2(]\alpha;\vartheta[)$ et $\|\cdot\|_{]0;\vartheta[}$, $\|\cdot\|_{]0;\alpha[}$, $\|\cdot\|_{]\alpha;\vartheta[}$ les normes associées, avec $\vartheta = \gamma$

pour le sommet extérieur et $\vartheta = 2\pi$ pour le sommet intérieur. Si φ est une fonction mesurable sur $]0;\vartheta[$, nous définissons $\varphi_1 := \varphi|_{]0;\alpha[}$ et $\varphi_2 := \varphi|_{]\alpha;\vartheta[}$.

3.2.1 Espaces de Sobolev à poids dans les secteurs : définitions, rappels

Introduisons comme dans le Paragraphe 3.1.1 quelques définitions et résultats liés à ces géométries. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à lire la partie 6.1.1 de [102]. Pour introduire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, considérons le secteur non borné

$$\mathcal{K} := \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r > 0,\ 0 < \theta < \vartheta\} \quad \text{avec } \vartheta < 2\pi.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, définissons l'espace à poids $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$ comme la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\overline{\mathcal{K}} \setminus \{O\})$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left\| r^{|\alpha|-m+\beta} \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v \right\|^2_{\mathcal{K}} \right)^{1/2}. \tag{3.47}$$

Nous noterons $\mathring{\mathrm{V}}^m_\beta(\mathcal{K})$ la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{K})$ dans $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$.
Effectuons quelques commentaires concernant ces espaces qui permettent de mesurer le comportement des fonctions en O et à l'infini. Notons qu'on a $\mathrm{V}^0_0(\mathcal{K}) = \mathrm{H}^0(\mathcal{K}) = \mathrm{L}^2(\mathcal{K})$. Par contre, l'espace $\mathrm{V}^m_0(\mathcal{K})$ diffère de $\mathrm{H}^m(\mathcal{K})$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. Pour s'en convaincre, considérons $\zeta^0 \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\mathcal{K}})$ une fonction à support compact valant 1 dans un voisinage de O. Alors on a $\zeta^0 \in \mathrm{H}^m(\mathcal{K})$ et $\zeta^0 \notin \mathrm{V}^m_0(\mathcal{K})$ pour $m \geq 1$. La fonction $\zeta^\infty : \boldsymbol{x} \mapsto \zeta^\infty(\boldsymbol{x}) = (1 - \zeta^0(\boldsymbol{x}))/|\boldsymbol{x}|$ vérifie quant à elle $\zeta^\infty \notin \mathrm{H}^m(\mathcal{K})$ et $\zeta^\infty \in \mathrm{V}^m_0(\mathcal{K})$ pour $m \geq 1$. Enfin, si m^1 et m^2 sont deux entiers tels que $m^1 \geq m^2 \geq 0$, l'inclusion $\mathrm{V}^{m^1}_{\beta^1}(\mathcal{K}) \subset \mathrm{V}^{m^2}_{\beta^2}(\mathcal{K})$ n'est vraie que lorsque β^1, β^2 satisfont la relation $\beta^1 - m^1 = \beta^2 - m^2$.

Pour $m \geq 1$, définissons $\mathrm{V}^{m-1/2}_\beta(\partial\mathcal{K})$ l'espaces des traces des éléments de $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$ sur la frontière $\partial\mathcal{K}$. Cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}^{m-1/2}_\beta(\partial\mathcal{K})} := \inf \left\{ \|w\|_{\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})} \mid w \in \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}) \text{ et } w = v \text{ sur } \partial\mathcal{K} \right\}. \tag{3.48}$$

En étudiant le lien entre les opérateurs de dérivée exprimés en coordonnées cartésiennes et polaires, on peut montrer que la norme de $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$ est équivalente à la norme

$$\|v\| = \left(\int_0^\infty r^{2(-m+\beta)} \sum_{j=0}^m \left\| (r\partial_r)^j u(r,\cdot) \right\|^2_{\mathrm{H}^{m-j}(]0;\vartheta[)} r\,dr \right)^{1/2}, \tag{3.49}$$

avec $u(r,\theta) = u(\boldsymbol{x})$. Par abus, dans toute la suite de ce chapitre, nous utiliserons la même notation pour désigner les fonctions exprimées en coordonnées cartésiennes ou polaires. Effectuons maintenant le changement de variables $t = \ln r$ qui envoie la demi-bande $\mathbb{R}^*_+ \times]0;\vartheta[$ (isomorphe au secteur $\mathcal{K}$) dans la bande $\mathcal{B} := \mathbb{R} \times]0;\vartheta[$. Pour toute fonction v mesurable sur $\mathbb{R}^*_+ \times]0;\vartheta[$, introduisons $\mathcal{E}v$ la fonction définie par

$$(\mathcal{E}v)(\theta, t) = v(\theta, e^t). \tag{3.50}$$

Puisque $r\partial_r v = \partial_t(\mathcal{E}v)$, la norme (3.49) est égale à

$$\|v\| = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{2(-m+\beta)t}\, e^{2\,t} \sum_{j=0}^m \left\| \partial^j_t (\mathcal{E}v)(t,\cdot) \right\|^2_{\mathrm{H}^{m-j}(]0;\vartheta[)} dt \right)^{1/2}.$$

Ainsi,

$$\|v\| = \left\| e^{(-m+\beta+1)t} \mathcal{E}v \right\|_{\mathrm{H}^m(\mathcal{B})} = \|\mathcal{E}v\|_{\mathrm{W}^m_{\beta-m+1}(\mathcal{B})}$$

est une norme équivalente à (3.47). Ceci montre que les espaces $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$ et $\mathrm{W}^m_{\beta-m+1}(\mathcal{B})$ (mais aussi $\mathrm{V}^m_{\beta+m-1}(\mathcal{K})$ et $\mathrm{W}^m_\beta(\mathcal{B})$) sont isomorphes. Nous allons donner une nouvelle norme équivalente à (3.47) à l'aide de la transformée de Mellin

$$\tilde{v}(\lambda) := (\mathcal{M}_{r\to\lambda}v)(\lambda) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda}v(r)\,dr/r. \tag{3.51}$$

En remarquant que $(\mathcal{M}_{r\to\lambda}v)(\lambda) = (\mathcal{L}_{t\to\lambda}v(e^t))(\lambda)$, énonçons quelques propriétés de cette transformée de Mellin à partir du Lemme 3.1.1.

Lemme 3.2.1 *1) La transformée de Mellin (3.51) définit une application linéaire continue de $\mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^*_+)$ dans l'espace des fonctions analytiques du plan complexe. D'autre part, on a $\mathcal{M}_{r\to\lambda}(r\partial_r v) = \lambda\mathcal{M}_{r\to\lambda}v$ pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^*_+)$.*
2) Pour tout u, $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^*_+)$ on a la formule de Parseval

$$\int_0^{+\infty} r^{2\beta}u(r)\overline{v(r)}\,dr/r = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re e\,\lambda=-\beta} \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\,d\lambda. \tag{3.52}$$

L'intégration dans le terme de droite de (3.52) se fait sur $\ell_{-\beta} := \{\lambda = -\beta + i\tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, la transformée (3.51) peut être prolongée en un isomorphisme

$$\left\{v \,|\, r^{\beta-1/2}v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^*_+)\right\} \to \mathrm{L}^2(\ell_{-\beta}).$$

3) La transformée de Laplace inverse est donnée par la formule

$$v(r) := (\mathcal{M}^{-1}_{\lambda\to r}\tilde{v})(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_{-\beta}} r^\lambda\tilde{v}(\lambda)\,d\lambda.$$

4) Si $r^{\beta_i-1/2}v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^*_+)$, $i = 1, 2$, avec $\beta^1 < \beta^2$, alors $\lambda \mapsto \tilde{v}(\lambda) = (\mathcal{M}_{r\to\lambda}v)(\lambda)$ est holomorphe dans la bande $-\beta^2 < \Re e\,\lambda < -\beta^1$.

En utilisant l'égalité de Parseval, on a l'équivalent du Lemme 3.1.2 pour les espaces $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$:

Lemme 3.2.2 *Pour $m \geq 0$, la norme (3.47) est équivalente à la norme*

$$\|v\| = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re e\,\lambda=-\beta+m-1}\sum_{j=0}^m |\lambda|^{2j}\,\|\tilde{v}(\lambda,\cdot)\|^2_{\mathrm{H}^{m-j}(]0;\vartheta[)}\,d\lambda\right)^{1/2}. \tag{3.53}$$

Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, les définitions et résultats que nous venons de présenter restent valables en remplaçant $]0;\vartheta[$ par le cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'opérateur $\mathcal{E}$ introduit en (3.50) transforme alors les fonctions définies sur un demi-cylindre en des fonctions définies sur un cylindre.
Dans la suite de ce paragraphe, nous n'allons pas nous servir de la caractérisation (3.53) mais plutôt travailler avec l'opérateur $\mathcal{E}$ en utilisant les résultats obtenus dans la bande infinie. Cependant, indiquons que nous aurions pu réaliser notre étude directement dans les secteurs à l'aide du Lemme 3.2.2.

3.2.2 Sommet extérieur

Considérons dans ce paragraphe la géométrie du sommet extérieur (Figure 3.8, à gauche). Pour $m \geq 0$, définissons l'opérateur continu $C^m_\beta : \mathscr{D}(C^m_\beta) \to \mathscr{R}(C^m_\beta)$ tel que $C^m_\beta u = f$ avec

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2) &:= (-\sigma_1\Delta u_1, -\sigma_2\Delta u_2);\\
\mathscr{D}(C^m_\beta) &:= \left\{u \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta-m-1}(\mathcal{K}) \,|\, (u_1, u_2) \in \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_2) \text{ et } \sigma_1\partial_\theta u_1 = \sigma_2\partial_\theta u_2 \text{ sur } \Sigma\right\};\\
\mathscr{R}(C^m_\beta) &:= \left\{f \in \mathrm{L}^2_{\beta-m}(\mathcal{K}) \,|\, (f_1, f_2) \in \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2)\right\}.
\end{aligned}$$

Ci-dessus f_1 et f_2 (resp. u_1 et u_2) désignent les restrictions de f (resp. u) à $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$. L'opérateur C^m_β est l'opérateur naturellement associé au problème de transmission

$$\left|\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u_1,u_2)\in \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_1)\times \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_2) \text{ tel que :}} \\ -\sigma_1\Delta u_1 & = & f_1 & \text{dans } \mathcal{K}_1 \\ -\sigma_2\Delta u_2 & = & f_2 & \text{dans } \mathcal{K}_2 \\ u_1-u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \\ \sigma_1\partial_\theta u_1-\sigma_2\partial_\theta u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{array}\right. \tag{3.54}$$

avec $(f_1,f_2)\in \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1)\times \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2)$. Ce problème de transmission s'écrit de façon condensée $-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)=f$ où σ désigne la fonction vérifiant $\sigma=\sigma_1$ sur $\mathcal{K}_1$ et $\sigma=\sigma_2$ sur $\mathcal{K}_2$.

Réécrivons les équations volumiques de (3.54) en coordonnées polaires en les multipliant par r^2. On obtient

$$-\sigma_1\Big((r\partial_r)^2+\partial_\theta^2\Big)u_1=r^2f_1 \quad \text{dans } \mathcal{K}_1 \qquad \text{et} \qquad -\sigma_2\Big((r\partial_r)^2+\partial_\theta^2\Big)u_2=r^2f_2 \quad \text{dans } \mathcal{K}_2.$$

Appliquons ensuite la transformée de Mellin. Pour $m\geq 0$, il apparaît le symbole $\mathscr{L}(\lambda):\mathscr{D}(\mathscr{L})\to\mathscr{R}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi=g$ avec

$$\begin{aligned} (g_1,g_2) &:= (-\sigma_1(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_1,-\sigma_2(\lambda^2+d_\theta^2)\varphi_2)\,; \\ \mathscr{D}(\mathscr{L}) &:= \{\varphi\in \mathrm{H}^1_0(]0;\gamma[)\,|\,(\varphi_1,\varphi_2)\in \mathrm{H}^{m+2}(]0;\alpha[)\times \mathrm{H}^{m+2}(]\alpha;\gamma[),\ \sigma_1 d_\theta\varphi_1(\alpha)=\sigma_2 d_\theta\varphi_2(\alpha)\}\,; \\ \mathscr{R}(\mathscr{L}) &:= \{g\in \mathrm{L}^2(]0;\gamma[)\,|\,(g_1,g_2)\in \mathrm{H}^m(]0;\alpha[)\times \mathrm{H}^m(]\alpha;\gamma[)\}\,. \end{aligned}$$

On retrouve donc un symbole analogue à (3.17). On va alors montrer très facilement, le travail ayant déjà été réalisé lors de l'étude du problème posé dans la bande infinie, le

Théorème 3.2.3 *Supposons $\kappa_\sigma\neq -1$. L'opérateur $C^m_\beta:\mathscr{D}(C^m_\beta)\to\mathscr{R}(C^m_\beta)$ constitue un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{L}$ n'a aucune valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda=-\beta+m+1$.*

Preuve. Reprenons l'opérateur $\mathcal{E}$ défini en (3.50). En confondant les fonctions écrites en coordonnées cartésiennes ou polaires, nous avons vu que $\mathcal{E}$ réalise un isomorphisme entre les espaces suivants

$$\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}) \to \mathrm{W}^m_{\beta-m+1}(\mathcal{B}), \qquad \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1) \to \mathrm{W}^m_{\beta-m+1}(\mathcal{B}_1), \qquad \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2) \to \mathrm{W}^m_{\beta-m+1}(\mathcal{B}_2),$$

où $\mathcal{B}:=\mathbb{R}\times\,]0;\gamma[$, $\mathcal{B}_1:=\mathbb{R}\times\,]0;\alpha[$, $\mathcal{B}_2:=\mathbb{R}\times\,]\alpha;\gamma[$. Le Théorème 3.1.13 prouve que $B^m_{\beta-(m+2)+1}=B^m_{\beta-m-1}:\mathscr{D}(B^m_{\beta-m-1})\to\mathscr{R}(B^m_{\beta-m-1})$ définit un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{L}$ n'a aucune valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda=-(\beta-m-1)=-\beta+m+1$.

On déduit que si $\mathscr{L}$ n'a aucune valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda=-\beta+m+1$, $r^2\,C^m_\beta=\mathcal{E}^{-1}B^m_{\beta-m+1}\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}(C^m_\beta)$ dans $\mathscr{R}(C^m_{\beta-2})$. Puisque l'application $f\to r^{-2}f$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{V}^m_{\beta-2}(\mathcal{K})$ (resp. $\mathrm{V}^m_{\beta-2}(\mathcal{K}_1)$, $\mathrm{V}^m_{\beta-2}(\mathcal{K}_2)$) dans $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K})$ (resp. $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1)$, $\mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2)$), donc de $\mathscr{R}(C^m_{\beta-2})$ dans $\mathscr{R}(C^m_\beta)$, on déduit le théorème. ■

La transformée de Mellin fournit la représentation

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re e\,\lambda=-\beta+m+1} r^\lambda\mathscr{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{M}_{r\to\lambda}(r^2\,f)\,d\lambda.$$

Avec la Proposition 3.1.14, nous pouvons préciser les valeurs propres de $\mathscr{L}$.

Proposition 3.2.4 *Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}^*$ constitue une valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si*

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\sin(\lambda\gamma) = (\sigma_2 - \sigma_1)\sin(\lambda(\gamma - 2\alpha)). \tag{3.55}$$

D'autre part, 0 est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si

$$\frac{\sigma_2}{\gamma - \alpha} + \frac{\sigma_1}{\alpha} = 0. \tag{3.56}$$

Cette Proposition prouve que pour $\kappa_\sigma \neq -1$, les valeurs propres de $\mathscr{L}$ forment un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. Rappelons également le résultat de la Remarque 3.1.16 : si λ^k est une valeur propre de $\mathscr{L}$ alors $\dim\ker\mathscr{L}(\lambda^k) = 1$. Dans la suite, nous noterons φ^k une base de $\ker\mathscr{L}(\lambda^k)$.

Comportement des solutions à l'infini et en 0

Le Théorème 3.1.17 permet de démontrer le résultat suivant de décomposition en partie régulière/partie singulière.

Théorème 3.2.5 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$.*
Supposons que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur les droites $\Re e\,\lambda = -\beta^1 + m + 1$ et $\Re e\,\lambda = -\beta^2 + m + 1$, $\beta^1 < \beta^2$. Notons $\lambda^1, \ldots, \lambda^N$ les valeurs propres de $\mathscr{L}$ dans la bande $-\beta^2 + m + 1 < \Re e\,\lambda < -\beta^1 + m + 1$. Supposons que pour $k = 1, \ldots, N$ on ait $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$, où φ^k est un vecteur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ^k. Considérons $f \in \mathscr{R}(C^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{R}(C^m_{\beta^2})$.

Alors les fonctions $u_{\beta^1} \in \mathscr{D}(C^m_{\beta^1})$ et $u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(C^m_{\beta^2})$ vérifiant $C^m_{\beta^1}u_{\beta^1} = f$ et $C^m_{\beta^2}u_{\beta^2} = f$ sont liées par la relation

$$u_{\beta^1} = u_{\beta^2} + \sum_{k=1}^{N} c^k r^{\lambda^k}\varphi^k, \tag{3.57}$$

où c^k est une constante ne dépendant que de f et du choix de φ^k, $k = 1, \ldots, N$.

Avec le Théorème 3.1.20, nous pouvons préciser l'expression des coefficients dans (3.57).

Théorème 3.2.6 *Supposons les hypothèses du Théorème 3.2.5 vérifiées. Alors les coefficients dans (3.57) sont définis par la formule*

$$c^k = (f, r^{-\overline{\lambda^k}}\psi^k)_{\mathcal{K}}, \tag{3.58}$$

avec $\psi^k = a^k\overline{\varphi^k}$, a^k étant la constante vérifiant $(2\lambda\sigma\varphi^k, a^k\overline{\varphi^k}) = 1$.

Applications

i) Secteur symétrique par rapport à l'interface, $\alpha = \gamma/2$. Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. La Proposition 3.2.4 indique que l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est égal à $\{k\pi/\gamma,\ k \in \mathbb{Z}^*\}$. Par conséquent, d'après le Théorème 3.2.3, $C^m_\beta : \mathscr{D}(C^m_\beta) \to \mathscr{R}(C^m_\beta)$ constitue un isomorphisme si et seulement si $-\beta + m + 1 \notin \{k\pi/\gamma,\ k \in \mathbb{Z}^*\}$.

À présent, fixons $m \in \mathbb{N}$ et donnons-nous β^1, β^2 deux réels tels que $-\beta^1 + m + 1 \notin \{k\pi/\gamma,\ k \in \mathbb{Z}^*\}$, $-\beta^2 + m + 1 \notin \{k\pi/\gamma,\ k \in \mathbb{Z}^*\}$ et $\beta^1 < \beta^2$. Choisissons un second membre f dans $\mathscr{R}(C^m_{\beta^1}) \cap \mathscr{R}(C^m_{\beta^2})$. D'après les Théorèmes 3.2.5, 3.2.6 ainsi que les résultats du Paragraphe 3.1.5, les fonctions $u_{\beta^1} \in \mathscr{D}(C^m_{\beta^1})$ et $u_{\beta^2} \in \mathscr{D}(C^m_{\beta^2})$ vérifiant $C^m_{\beta^1}u_{\beta^1} = f$ et $C^m_{\beta^2}u_{\beta^2} = f$ satisfont la relation

$$u_{\beta^1} = u_{\beta^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^* \,|\, \gamma(\beta^1 - m - 1)/\pi < k < \gamma(\beta^2 - m - 1)/\pi} c^k r^{k\pi/\gamma}\varphi^k,$$

avec

$$c^k = (f, r^{-k\pi/\gamma}\psi^k)_{\mathcal{K}}.$$

Ci-dessus, les fonctions φ^k, ψ^k sont définies par

$$\begin{array}{rclcrcl}
\varphi^k(\theta)|_{]0;\alpha[} & = & \sqrt{\dfrac{2}{\gamma}}\,\sin(\dfrac{k\pi}{\gamma}\theta) & \text{et} & \varphi^k(\theta)|_{]\alpha;\gamma[} & = & -\sqrt{\dfrac{2}{\gamma}}\,\sin(\dfrac{k\pi}{\gamma}(\theta-\gamma)); \\
\psi^k(\theta)|_{]0;\alpha[} & = & \dfrac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}k\pi(\sigma_1+\sigma_2)}\,\sin(\dfrac{k\pi}{\gamma}\theta) & \text{et} & \psi^k(\theta)|_{]\alpha;\gamma[} & = & -\dfrac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}k\pi(\sigma_1+\sigma_2)}\,\sin(\dfrac{k\pi}{\gamma}(\theta-\gamma)).
\end{array}$$

ii) Secteur non-symétrique avec $\gamma = 4\,\alpha$. Supposons toujours $\kappa_\sigma \neq -1$. D'après la Proposition 3.2.4 et les résultats du Paragraphe 3.1.5, l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est égal à

$$\lambda \in \{2k\pi/\gamma,\, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{\xi + 2k\pi/\gamma,\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\xi + 2k\pi/\gamma,\, k \in \mathbb{Z}\},$$

avec
$$\xi := \frac{2}{\gamma}\,\mathrm{arcos}(\rho) \qquad \text{et} \qquad \rho := \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1+\sigma_2)}.$$

Comme indiqué dans le Paragraphe 3.1.5, pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in\,]-\infty; -3] \cup [-1/3; 0[$, les valeurs propres de $\mathscr{L}$ sont dans $\mathbb{R}$. Par contre, ceci n'est plus vrai lorsque $\kappa_\sigma \in\,]-1/3; -3[\,\setminus\{-1\}$.

3.2.3 Sommet intérieur

Intéressons-nous maintenant à la géométrie du sommet intérieur (Figure 3.8, à droite) pour laquelle $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Pour $m \geq 0$, introduisons l'opérateur continu $D^m_\beta : \mathscr{D}(D^m_\beta) \to \mathscr{R}(D^m_\beta)$ tel que $D^m_\beta u = f$ avec

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2) &:= (-\sigma_1\Delta u_1, -\sigma_2\Delta u_2); \\
\mathscr{D}(D^m_\beta) &:= \Big\{u \in \mathrm{V}^1_{\beta-m-1}(\mathcal{K}) \,|\, (u_1,u_2) \in \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_2) \ \text{ et } \ \sigma_1\partial_\theta u_1 = \sigma_2\partial_\theta u_2 \text{ sur } \Sigma\backslash\{O\}\Big\}; \\
\mathscr{R}(D^m_\beta) &:= \Big\{f \in \mathrm{L}^2_{\beta-m}(\mathcal{K}) \,|\, (f_1,f_2) \in \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2)\Big\}.
\end{aligned}$$

De même que dans le paragraphe précédent, f_1 et f_2 (resp. u_1 et u_2) désignent les restrictions de f (resp. u) à $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$. L'opérateur D^m_β est l'opérateur naturellement associé au problème de transmission

$$\left|\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u_1,u_2) \in \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^{m+2}_\beta(\mathcal{K}_2) \ \text{ tel que :}} \\
-\sigma_1\Delta u_1 & = & f_1 & \text{dans } \mathcal{K}_1 \\
-\sigma_2\Delta u_2 & = & f_2 & \text{dans } \mathcal{K}_2 \\
u_1 - u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\{O\} \\
\sigma_1\partial_\theta u_1 - \sigma_2\partial_\theta u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\{O\},
\end{array}\right. \tag{3.59}$$

avec $(f_1, f_2) \in \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_1) \times \mathrm{V}^m_\beta(\mathcal{K}_2)$, problème qui n'est autre que la réécriture de $-\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f$ où σ est la fonction vérifiant $\sigma = \sigma_1$ sur $\mathcal{K}_1$ et $\sigma = \sigma_2$ sur $\mathcal{K}_2$.

Lorsqu'on applique la transformée de Mellin au problème (3.59) après avoir multiplié par r^2 les équations volumiques, pour $m \geq 0$, il apparaît le symbole $\mathscr{L}(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}) \to \mathscr{R}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = g$ avec

$$\begin{aligned}
(g_1, g_2) &:= (-\sigma_1(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_1, -\sigma_2(\lambda^2 + d_\theta^2)\varphi_2)\,; \\
\mathscr{D}(\mathscr{L}) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1(]0;2\pi[) \,|\, (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathrm{H}^{m+2}(]0;\alpha[) \times \mathrm{H}^{m+2}(]\alpha;2\pi[),\ \varphi_1(0) = \varphi_2(2\pi), \\
&\qquad \sigma_1 d_\theta\varphi_1(0) = \sigma_2 d_\theta\varphi_2(2\pi) \text{ et } \sigma_1 d_\theta\varphi_1(\alpha) = \sigma_2 d_\theta\varphi_2(\alpha)\}; \\
\mathscr{R}(\mathscr{L}) &:= \{g \in \mathrm{L}^2(]0;2\pi[) \,|\, (g_1,g_2) \in \mathrm{H}^m(]0;\alpha[) \times \mathrm{H}^m(]\alpha;2\pi[)\}\,.
\end{aligned}$$

En adaptant au cas du cylindre infini les démonstrations des Lemmes 3.1.10, 3.1.11 et du Corollaire 3.1.12, puis en procédant comme dans le paragraphe précédent en utilisant l'opérateur de changement de variables $\mathcal{E}$, on démontre le

Théorème 3.2.7 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. L'opérateur $D^m_\beta : \mathscr{D}(D^m_\beta) \to \mathscr{R}(D^m_\beta)$ définit un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{L}$ n'a aucune valeur propre sur la droite $\Re e\, \lambda = -\beta + m + 1$.*

Avec la transformée de Mellin, nous avons de nouveau la formule de représentation

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re e\, \lambda = -\beta+m+1} r^\lambda \mathscr{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{M}_{r\to\lambda}(r^2 f)\, d\lambda.$$

Les changements pour les opérateurs associés au problème de transmission respectivement dans la géométrie du sommet extérieur et celle du sommet intérieur sont intégralement contenus dans la position des valeurs propres de $\mathscr{L}$. Caractérisons maintenant les valeurs propres du symbole dans le cas du sommet intérieur.

Proposition 3.2.8 *Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}^*$ constitue une valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si*

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\, \sin(\lambda\pi) = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)\, \sin((\pi - \alpha)\lambda). \tag{3.60}$$

D'autre part, 0 est toujours une valeur propre de $\mathscr{L}$.

Preuve. Pour la démonstration de ce résultat, il faut procéder avec finesse sous peine de sombrer dans d'inextricables calculs. Nous donnons ici une version légèrement différente de celle présentée dans [72]. Si λ est une valeur propre de $\mathscr{L}$, il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ non nul tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = 0$. Si λ est non nul, puisque φ_1 (resp. φ_2) vérifie $(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_1 = 0$ sur $]0;\alpha[$ (resp. $(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_2 = 0$ sur $]\alpha; 2\pi[$), on déduit

$$\varphi_1(\theta) = Ae^{i\lambda\theta} + Be^{-i\lambda\theta} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(\theta) = Ce^{i\lambda\theta} + De^{-i\lambda\theta}$$

où A, B, C et D sont des constantes. Les conditions de transmission imposent de plus

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & = & e^{2i\lambda\pi}C & + & e^{-2i\lambda\pi}D \\ e^{i\lambda\alpha}A & + & e^{-i\lambda\alpha}B & = & e^{i\lambda\alpha}C & + & e^{-i\lambda\alpha}D \\ A & - & B & = & \kappa_\sigma e^{2i\lambda\pi}C & - & \kappa_\sigma e^{-2i\lambda\pi}D \\ e^{i\lambda\alpha}A & - & e^{-i\lambda\alpha}B & = & \kappa_\sigma e^{i\lambda\alpha}C & - & \kappa_\sigma e^{-i\lambda\alpha}D. \end{array}\right.$$

En éliminant les inconnues A et B, on trouve que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si

$$\left|\begin{array}{rcrcl} (1+\kappa_\sigma)(e^{2i\lambda\pi} - 1)C & + & (1-\kappa_\sigma)(e^{-2i\lambda\pi} - e^{-2i\lambda\alpha})D & = & 0 \\ (1-\kappa_\sigma)(e^{2i\lambda\pi} - e^{2i\lambda\alpha})C & + & (1+\kappa_\sigma)(e^{-2i\lambda\pi} - 1)D & = & 0. \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système s'annule lorsque

$$(1+\kappa_\sigma)^2 \sin(\lambda\pi)^2 = (1-\kappa_\sigma)^2 \sin((\pi-\alpha)\lambda)^2.$$

Ceci termine la démonstration de la première partie de cette proposition.
D'autre part, pour toute valeur du contraste, les fonctions constantes sont dans le noyau de $\mathscr{L}(0)$. Par conséquent, 0 est toujours valeur propre du symbole. Nous pouvons même préciser, après un calcul sans difficulté, que 0 est une valeur propre de multiplicité géométrique égale à 2 si et seulement si $\kappa_\sigma = -(2\pi - \alpha)/\alpha$. ■

3.3 Ouvert borné

Dans la Section 3.1, nous avons présenté des résultats de régularité au voisinage des parties droites de l'interface. Dans la Section 3.2, nous nous sommes intéressés à la régularité au voisinage des sommets extérieurs et intérieurs de l'interface. Pour revenir au domaine borné Ω que nous avons étudié intensivement dans le Chapitre 1.3.1, il ne nous reste plus qu'à regrouper ces résultats en utilisant un procédé de localisation. De nouveau donc, nous supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ partitionné en deux

sous domaines avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Nous définissons la fonction σ telle que $\sigma|_{\Omega_k} = \sigma_k$, $k = 1, 2$, où $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ sont deux constantes. D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ sont polygonales. Ceci implique en particulier que $\partial\Omega$ est polygonale. Les ouverts Ω_1 et Ω_2 sont séparés par l'interface $\Sigma := \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$. La normale unitaire à Σ dirigée de Ω_1 vers Ω_2 est notée $\boldsymbol{n}$.

3.3.1 Notations

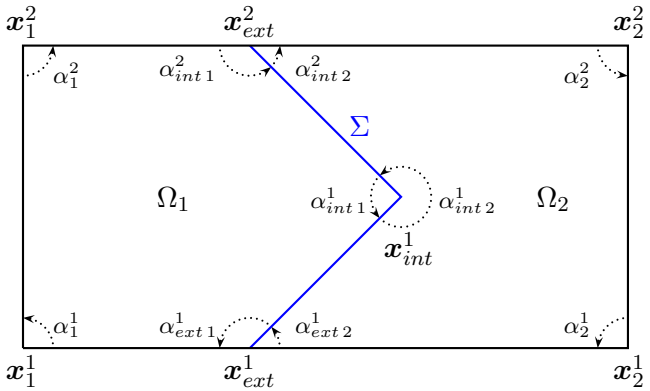


FIGURE 3.9 – Notations pour l'ouvert borné : $\mathcal{S}_1 = \{\boldsymbol{x}_1^1, \boldsymbol{x}_1^2\}$ ($N_1 = 2$), $\mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{x}_2^1, \boldsymbol{x}_2^2\}$ ($N_2 = 2$), $\mathcal{S}_{int} = \{\boldsymbol{x}_{int}^1\}$ ($N_{int} = 1$) et $\mathcal{S}_{ext} = \{\boldsymbol{x}_{ext}^1, \boldsymbol{x}_{ext}^2\}$ ($N_{ext} = 2$).

Commençons par décrire précisément les géométries du domaine et de l'interface, qui, comme nous l'avons déjà observé, jouent un rôle crucial dans les résultats. Nous noterons

$$\left|\begin{array}{ll} \mathcal{S}_k & := \{\boldsymbol{x}_k^1, \ldots, \boldsymbol{x}_k^{N_k}\} \text{ l'ensemble des sommets de } \Gamma_k := \partial\Omega_k \setminus \overline{\Sigma},\ k = 1, 2; \\ \mathcal{S}_{int} & := \{\boldsymbol{x}_{int}^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{int}^{N_{int}}\} \text{ l'ensemble des sommets de } \Sigma; \\ \mathcal{S}_{ext} & := \{\boldsymbol{x}_{ext}^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{ext}^{N_{ext}}\} \text{ l'ensemble des sommets de } \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Bien entendu, on peut toujours trouver des configurations pour lesquelles l'un des ensembles ci-dessus est vide. Ceci ne posera cependant pas de problème dans la suite. Nous avons ensuite besoin d'accéder aux angles des polygones $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$. Pour cela, effectuons les remarques suivantes.

• Pour $k = 1, 2$, pour chaque $\boldsymbol{x}_k^i \in \mathcal{S}_k$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_k^i) \subset \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{x}_k^i$ tel que

$$\Omega_k \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_k^i) = \mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_k^i) \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_k^i),$$

où $\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_k^i)$ est un cône ouvert centré en $\boldsymbol{x}_k^i$ d'ouverture $\alpha_k^i \in]0; 2\pi[$.
• Pour $k = 1, 2$, pour chaque $\boldsymbol{x}_{int}^i \in \mathcal{S}_{int}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{int}^i) \subset \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{x}_{int}^i$ tel que

$$\Omega_k \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{int}^i) = \mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_{int}^i) \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{int}^i),$$

où $\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_{int}^i)$ est un cône ouvert centré en $\boldsymbol{x}_{int}^i$ d'ouverture $\alpha_{int\,k}^i \in]0; 2\pi[$. Pour $i = 1, \ldots, N_{int}$, nous avons alors $\alpha_{int\,1}^i + \alpha_{int\,2}^i = 2\pi$ et nous définissons $\alpha_{int}^i := \alpha_{int\,1}^i$.
• Pour $k = 1, 2$, pour chaque $\boldsymbol{x}_{ext}^i \in \mathcal{S}_{ext}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{ext}^i) \subset \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{x}_{ext}^i$ tel que

$$\Omega_k \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{ext}^i) = \mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_{ext}^i) \cap \mathcal{V}(\boldsymbol{x}_{ext}^i),$$

où $\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_{ext}^i)$ est un cône ouvert centré en $\boldsymbol{x}_{ext}^i$ d'ouverture $\alpha_{ext\,k}^i \in]0; 2\pi[$. Nous définissons alors $\alpha_{ext}^i := \alpha_{ext\,1}^i$ et $\gamma_{ext}^i := \alpha_{ext\,1}^i + \alpha_{ext\,2}^i \in]0; 2\pi[$ pour $i = 1, \ldots, N_{ext}$.

Introduisons maintenant un système de fonctions de troncature qui va nous permettre d'étudier ce qui se passe au voisinage de chacun des sommets.

Pour $k = 1, 2, int, ext$ et $i = 1, \ldots, N_k$, ζ_k^i et η_k^i désigneront deux éléments de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ valant 1 au voisinage de $\boldsymbol{x}_k^i \in \mathcal{S}_k$, 0 sur $\Omega \backslash \overline{B(\boldsymbol{x}_k^i, d_k^i)}$ (pour un certain $d_k^i > 0$), ne dépendant que de r_k^i (coordonnées polaires associées à $\boldsymbol{x}_k^i$), telles que $\eta_k^i \zeta_k^i = \zeta_k^i$.

En outre, nous supposons que les supports des fonctions η_k^i, et par voie de conséquence, ceux des fonctions ζ_k^i, pour $k = 1, 2, int, ext$ et $i = 1, \ldots, N_k$, sont disjoints. Nous ferons aussi l'hypothèse que les supports des éléments η_k^i, et donc ceux des éléments ζ_k^i, pour $k = 1, 2$ et $i = 1, \ldots, N_k$, n'intersectent pas $\overline{\Sigma}$. Définissons alors

$$\chi := 1 - \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_1^i - \sum_{i=1}^{N_2} \zeta_2^i - \sum_{i=1}^{N_{int}} \zeta_{int}^i - \sum_{i=1}^{N_{ext}} \zeta_{ext}^i.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\vec{\beta}_1 = (\beta_1^1, \ldots, \beta_1^{N_1}, \beta_{int}^1, \ldots, \beta_{int}^{N_{int}}, \beta_{ext}^1, \ldots, \beta_{ext}^{N_{ext}}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_{int}+N_{ext}}$, nous noterons $\mathrm{V}_{\vec{\beta}_1}^m(\Omega_1)$ l'ensemble des fonctions v telles que $\chi v \in \mathrm{H}^m(\Omega_1)$ et $\zeta_k^i v \in \mathrm{V}_{\beta_k^i}^m(\mathcal{K}_1(\boldsymbol{x}_k^i))$, $k = 1, int, ext$ et $i = 1, \ldots, N_k$. Remarquons que cet espace ne dépend pas du choix des fonctions de troncature ζ_k^i. Nous munirons $\mathrm{V}_{\vec{\beta}_1}^m(\Omega_1)$ de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}_{\vec{\beta}_1}^m(\Omega_1)} := \|\chi v\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_1)} + \sum_{k=1,int,ext} \sum_{i=1}^{N_k} \left\| \zeta_k^i v \right\|_{\mathrm{V}_{\beta_k^i}^m(\mathcal{K}_1(\boldsymbol{x}_k^i))}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\vec{\beta}_2 = (\beta_2^1, \ldots, \beta_2^{N_2}, \beta_{int}^1, \ldots, \beta_{int}^{N_{int}}, \beta_{ext}^1, \ldots, \beta_{ext}^{N_{ext}}) \in \mathbb{R}^{N_2+N_{int}+N_{ext}}$, l'espace $\mathrm{V}_{\vec{\beta}_2}^m(\Omega_2)$ est défini de façon analogue.
Ces espaces à poids présentent des propriétés différentes de celles des espaces à poids que nous avons utilisés dans les secteurs infinis. Ceci provient des fonctions de troncature qui ne permettent de mesurer le comportement des fonctions qu'au voisinage des singularités géométriques. Par conséquent, il existe des relations d'inclusion entre ces espaces. Plus précisément, considérons $\vec{\beta} = (\beta^1, \ldots, \beta^{N_1+N_{int}+N_{ext}})$ et $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \ldots, \gamma^{N_1+N_{int}+N_{ext}})$ deux éléments de $\mathbb{R}^{N_1+N_{int}+N_{ext}}$. Si $m \geq n$ et $\beta^i - m \leq \gamma^i - n$ pour $i = 1, \ldots, N_1 + N_{int} + N_{ext}$, alors $\mathrm{V}_{\vec{\beta}}^m(\Omega_1)$ s'injecte de façon continue dans $\mathrm{V}_{\vec{\gamma}}^n(\Omega_1)$. Bien entendu, ce résultat est aussi valable pour les espaces à poids définis sur Ω_2.

Pour travailler au voisinage des parties droites de Σ, introduisons $(\zeta_\Sigma^i)_{i=1}^{N_\Sigma}$ et $(\eta_\Sigma^i)_{i=1}^{N_\Sigma}$ deux familles de fonctions de troncature de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ dont les supports sont inclus dans Ω et symétriques par rapport à Σ (de sorte que $\partial_{\boldsymbol{n}} \zeta_\Sigma^i = 0$ sur $\Sigma \backslash \mathcal{S}_{int}$). Nous supposerons de plus qu'on a $\eta_\Sigma^i \zeta_\Sigma^i = \zeta_\Sigma^i$, que le support des η_Σ^i ne rencontre pas $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$ et que

$$\sum_{i=1}^{N_\Sigma} \zeta_\Sigma^i + \sum_{i=1}^{N_{int}} \zeta_{int}^i + \sum_{i=1}^{N_{ext}} \zeta_{ext}^i = 1 \quad \text{dans un voisinage de } \overline{\Sigma}.$$

Définissons la fonction ζ_0 telle que

$$\zeta_0 := \chi - \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \zeta_\Sigma^i \qquad \text{de sorte que} \qquad \zeta_0 + \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_1^i + \sum_{i=1}^{N_2} \zeta_2^i + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \zeta_\Sigma^i + \sum_{i=1}^{N_{int}} \zeta_{int}^i + \sum_{i=1}^{N_{ext}} \zeta_{ext}^i = 1. \quad (3.61)$$

Par construction, notons que le support de ζ_0 n'intersecte pas $\overline{\Sigma} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Introduisons enfin $\eta_0 \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ telle que $\eta_0 \zeta_0 = \zeta_0$ et telle que son support ne rencontre pas $\overline{\Sigma} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

3.3.2 Problème considéré

Pour $\vec{\beta} = (\beta_1^1, \ldots, \beta_1^{N_1}, \beta_2^1, \ldots, \beta_2^{N_2}, \beta_{int}^1, \ldots, \beta_{int}^{N_{int}}, \beta_{ext}^1, \ldots, \beta_{ext}^{N_{ext}}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2+N_{int}+N_{ext}}$ et $m \in \mathbb{N}$, définissons

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_1 &= (\beta_1^1, \ldots, \beta_1^{N_1}, \beta_{int}^1, \ldots, \beta_{int}^{N_{int}}, \beta_{ext}^1, \ldots, \beta_{ext}^{N_{ext}}) \\ \vec{\beta}_2 &= (\beta_2^1, \ldots, \beta_2^{N_2}, \beta_{int}^1, \ldots, \beta_{int}^{N_{int}}, \beta_{ext}^1, \ldots, \beta_{ext}^{N_{ext}}) \end{aligned}$$

ainsi que l'opérateur continu $A^m_{\vec{\beta}} : \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$ tel que $A^m_{\vec{\beta}} u = f$ avec

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2) &:= (-\sigma_1 \Delta u_1, -\sigma_2 \Delta u_2);\\
\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}}) &:= \Big\{ u \,|\, (u_1, u_2) \in \mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_1}(\Omega_1) \times \mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_2}(\Omega_2),\\
&\qquad u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma\backslash\mathcal{S},\ \sigma_1 \partial_{\boldsymbol{n}} u_1 = \sigma_2 \partial_{\boldsymbol{n}} u_2 \text{ sur } \Sigma\backslash\mathcal{S},\ u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \Big\};\\
\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}) &:= \Big\{ f \,|\, (f_1, f_2) \in \mathrm{V}^m_{\vec{\beta}_1}(\Omega_1) \times \mathrm{V}^m_{\vec{\beta}_2}(\Omega_2) \Big\}.
\end{aligned}$$

L'opérateur $A^m_{\vec{\beta}}$ permet d'étudier le problème de transmission

$$\left|\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u_1, u_2) \in \mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_1}(\Omega_1) \times \mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_2}(\Omega_2) \text{ tel que :}}\\
-\sigma_1 \Delta u_1 & = & f_1 & \text{dans } \Omega_1\\
-\sigma_2 \Delta u_2 & = & f_2 & \text{dans } \Omega_2\\
u_1 - u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\mathcal{S}_{int}\\
\sigma_1 \partial_{\boldsymbol{n}} u_1 - \sigma_2 \partial_{\boldsymbol{n}} u_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\mathcal{S}_{int}\\
u_1 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1\\
u_2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2,
\end{array}\right. \tag{3.62}$$

avec $(f_1, f_2) \in \mathrm{V}^m_{\vec{\beta}_1}(\Omega_1) \times \mathrm{V}^m_{\vec{\beta}_2}(\Omega_2)$, réécriture de $-\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f$. Définissons les symboles, issus des transformées de Mellin, associés aux différents types de sommets.

Pour les éléments de $\mathcal{S}_1$ (sommets situés sur Γ_1), nous sommes conduits à introduire, pour $i = 1, \ldots, N_1$, le symbole $\mathscr{L}^i_1(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}^i_1) \to \mathrm{H}^m(]0; \alpha^i_1[)$ tel que $\mathscr{L}^i_1(\lambda)\varphi = -\sigma_1(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi$ avec

$$\mathscr{D}(\mathscr{L}^i_1) := \{\varphi \in \mathrm{H}^{m+2}(]0; \alpha^i_1[) \,|\, \varphi(0) = \varphi(\alpha^i_1) = 0\}.$$

De même, pour les sommets de $\mathcal{S}_2$, pour $i = 1, \ldots, N_2$, nous aurons besoin de l'opérateur $\mathscr{L}^i_2(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}^i_2) \to \mathrm{H}^m(]0; \alpha^i_2[)$ tel que $\mathscr{L}^i_2(\lambda)\varphi = -\sigma_2(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi$ avec

$$\mathscr{D}(\mathscr{L}^i_2) := \{\varphi \in \mathrm{H}^{m+2}(]0; \alpha^i_2[) \,|\, \varphi(0) = \varphi(\alpha^i_2) = 0\}.$$

Pour $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{int}$ (sommets intérieurs situés sur Σ), pour $i = 1, \ldots, N_{int}$, nous nous servirons du symbole $\mathscr{L}^i_{int}(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}^i_{int}) \to \mathscr{R}(\mathscr{L}^i_{int})$ tel que $\mathscr{L}^i_{int}(\lambda)\varphi = g$ avec

$$\begin{aligned}
(g_1, g_2) &:= (-\sigma_1(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_1, -\sigma_2(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_2);\\
\mathscr{D}(\mathscr{L}^i_{int}) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1(]0; 2\pi[) \,|\, (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{H}^{m+2}(]0; \alpha^i_{int}[) \times \mathrm{H}^{m+2}(]\alpha^i_{int}; 2\pi[),\ \varphi_1(0) = \varphi_2(2\pi),\\
&\qquad \sigma_1 d_\theta \varphi_1(0) = \sigma_2 d_\theta \varphi_2(2\pi) \text{ et } \sigma_1 d_\theta \varphi_1(\alpha^i_{int}) = \sigma_2 d_\theta \varphi_2(\alpha^i_{int})\};\\
\mathscr{R}(\mathscr{L}^i_{int}) &:= \{g \in \mathrm{L}^2(]0; 2\pi[) \,|\, (g_1, g_2) \in \mathrm{H}^m(]0; \alpha^i_{int}[) \times \mathrm{H}^m(]\alpha^i_{int}; 2\pi[)\}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour $\boldsymbol{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}$ (sommets extérieurs situés sur $\overline{\Sigma} \cap \partial\Omega$), pour $i = 1, \ldots, N_{ext}$, définissons l'opérateur $\mathscr{L}^i_{ext}(\lambda) : \mathscr{D}(\mathscr{L}^i_{ext}) \to \mathscr{R}(\mathscr{L}^i_{ext})$ tel que $\mathscr{L}^i_{ext}(\lambda)\varphi = g$ avec

$$\begin{aligned}
(g_1, g_2) &:= (-\sigma_1(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_1, -\sigma_2(\lambda^2 + d^2_\theta)\varphi_2);\\
\mathscr{D}(\mathscr{L}^i_{ext}) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1_0(]0; \gamma^i_{ext}[) \,|\, (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{H}^{m+2}(]0; \alpha^i_{ext}[) \times \mathrm{H}^{m+2}(]\alpha^i_{ext}; \gamma^i_{ext}[),\\
&\qquad \sigma_1 d_\theta \varphi_1(\alpha^i_{ext}) = \sigma_2 d_\theta \varphi_2(\alpha^i_{ext})\};\\
\mathscr{R}(\mathscr{L}^i_{ext}) &:= \{g \in \mathrm{L}^2(]0; \gamma^i_{ext}[) \,|\, (g_1, g_2) \in \mathrm{H}^m(]0; \alpha^i_{ext}[) \times \mathrm{H}^m(]\alpha^i_{ext}; \gamma^i_{ext}[)\}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat qui nous intéresse dans cette section.

3.3.3 Résultat de régularité dans l'ouvert borné

Théorème 3.3.1 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. L'opérateur $A^m_{\vec{\beta}} : \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$ est de type Fredholm si et seulement si toutes les propriétés suivantes sont vraies.*

- *Pour $i = 1, \dots, N_1$, $\mathscr{L}^i_1$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re\mathrm{e}\,\lambda = -\beta^i_1 + m + 1$.*
- *Pour $i = 1, \dots, N_2$, $\mathscr{L}^i_2$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re\mathrm{e}\,\lambda = -\beta^i_2 + m + 1$.*
- *Pour $i = 1, \dots, N_{int}$, $\mathscr{L}^i_{int}$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re\mathrm{e}\,\lambda = -\beta^i_{int} + m + 1$.*
- *Pour $i = 1, \dots, N_{ext}$, $\mathscr{L}^i_{ext}$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re\mathrm{e}\,\lambda = -\beta^i_{ext} + m + 1$.*

Si l'une des propriétés précédentes n'est pas vérifiée alors $A^m_{\vec{\beta}}$ n'est pas à image fermée dans $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$.

Remarque 3.3.2 *Ce théorème ne précise pas la valeur de l'indice de l'opérateur $A^m_{\vec{\beta}}$ dans le cas où ce dernier est de type Fredholm. Indiquons simplement que l'indice dépend des poids associés à chacune des singularités géométriques du domaine. Nous étudierons plus en détail cette question dans le Chapitre 5.*

Pour démontrer que $A^m_{\vec{\beta}}$ est Fredholm, nous procéderons en deux grandes étapes. Une estimation *a priori* nous permettra de prouver que $\dim\ker A^m_{\vec{\beta}} < \infty$ et que $A^m_{\vec{\beta}}$ est à image fermée. Nous montrerons ensuite que $\dim\operatorname{coker} A^m_{\vec{\beta}} < \infty$ en construisant un inverse à droite (modulo un opérateur compact) pour $A^m_{\vec{\beta}}$.

Preuve. Supposons d'abord les hypothèses sur les différents symboles vérifiées. Établissons une estimation *a priori* pour les éléments de $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$. Donnons-nous $u \in \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$.

L'inversibilité locale de $A^m_{\vec{\beta}}$ sur Ω_1 et sur Ω_2 implique l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de u telle que

$$\sum_{k=1,2} \|\zeta_0 u_k\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\Omega_k)} \leq C \Big(\sum_{k=1,2} \|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta_0 u_k))\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} \Big). \tag{3.63}$$

D'après le Théorème 3.1.8, on a également pour $i = 1, \dots, N_\Sigma$,

$$\sum_{k=1,2} \left\|\zeta^i_\Sigma u_k\right\|_{\mathrm{H}^{m+2}(\Omega_k)} \leq C \Big(\sum_{k=1,2} \left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta^i_\Sigma u_k))\right\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} \Big). \tag{3.64}$$

Pour $k = 1, 2$, pour $i = 1, \dots, N_k$, on a classiquement, (cf. [102, théorème 6.1.1]), puisqu'on a supposé l'hypothèse sur $\mathscr{L}^i_k$ vérifiée,

$$\left\|\zeta^i_k u\right\|_{\mathrm{V}^{m+2}_{\beta^i_k}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_k))} \leq C \left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta^i_k u))\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta^i_k}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_k))}. \tag{3.65}$$

Pour $i = 1, \dots, N_{int}$, le Théorème 3.2.7 et l'hypothèse sur $\mathscr{L}^i_{int}$ donnent l'estimation

$$\sum_{k=1,2} \left\|\zeta^i_{int} u_k\right\|_{\mathrm{V}^{m+2}_{\beta^i_{int}}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_{int}))} \leq C \Big(\sum_{k=1,2} \left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta^i_{int} u_k))\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta^i_{int}}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_{int}))} \Big). \tag{3.66}$$

Pour $i = 1, \dots, N_{ext}$, c'est le Théorème 3.2.3 qui indique

$$\sum_{k=1,2} \left\|\zeta^i_{ext} u_k\right\|_{\mathrm{V}^{m+2}_{\beta^i_{ext}}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_{ext}))} \leq C \Big(\sum_{k=1,2} \left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta^i_{ext} u_k))\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta^i_{ext}}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}^i_{ext}))} \Big). \tag{3.67}$$

Travaillons maintenant sur les membres de gauche dans (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) et (3.67). Pour $k = 1, 2$, on prouve de façon usuelle l'estimation

$$\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta_0 u_k))\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} \leq C \left(\|\eta_0\,\mathrm{div}(\sigma\nabla u_k)\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} + \|\eta_0 u_k\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\Omega_k)}\right). \tag{3.68}$$

De même, pour $k = 1, 2$ et $i = 1, \dots, N_\Sigma$, on obtient

$$\left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta_\Sigma^i u_k))\right\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} \leq C\left(\left\|\eta_\Sigma^i \,\mathrm{div}(\sigma\nabla u_k)\right\|_{\mathrm{H}^m(\Omega_k)} + \left\|\eta_\Sigma^i u_k\right\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\Omega_k)}\right). \tag{3.69}$$

Pour $k = 1, 2$ et $i = 1, \dots, N_k$, on peut écrire

$$\left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta_k^i u))\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta_k^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_k^i))} \leq C\left(\left\|\eta_k^i \,\mathrm{div}(\sigma\nabla u_k)\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta_k^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_k^i))} + \left\|\eta_k^i u_k\right\|_{\mathrm{V}^{m+1}_{\beta_k^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_k^i))}\right). \tag{3.70}$$

Enfin, pour $j = int, ext$, $k = 1, 2$ et $i = 1, \dots, N_j$, on a

$$\left\|\mathrm{div}(\sigma\nabla(\zeta_j^i u_k))\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta_j^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_j^i))} \leq C\left(\left\|\eta_j^i \,\mathrm{div}(\sigma\nabla u_k)\right\|_{\mathrm{V}^m_{\beta_j^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_j^i))} + \left\|\eta_j^i u_k\right\|_{\mathrm{V}^{m+1}_{\beta_j^i}(\mathcal{K}_k(\boldsymbol{x}_j^i))}\right). \tag{3.71}$$

En utilisant (3.68), (3.69), (3.70), (3.71) dans (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67), on déduit l'estimation *a priori*

$$\sum_{k=1,2} \|u_k\|_{\mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_k}(\Omega_k)} \leq C\Big(\sum_{k=1,2} \|\mathrm{div}(\sigma\nabla u_k)\|_{\mathrm{V}^m_{\vec{\beta}_k}(\Omega_k)} + \|u_k\|_{\mathrm{V}^{m+1}_{\vec{\beta}_k}(\Omega_k)}\Big). \tag{3.72}$$

Or d'après [102, lemme 6.2.1], pour $k = 1, 2$, l'espace $\mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_k}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{V}^{m+1}_{\vec{\beta}_k}(\Omega)$. En utilisant le Lemme 1.3.5 dû à J. Peetre, nous déduisons que si les hypothèses sur les symboles sont vérifiées alors $A^m_{\vec{\beta}}$ possède un noyau de dimension finie et son image est fermée dans $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$.

Pour montrer que $A^m_{\vec{\beta}}$ est Fredholm, il ne reste plus qu'à prouver que $\dim \operatorname{coker} A^m_{\vec{\beta}} < \infty$. Nous allons faire cela en construisant une paramétrix à droite, *i.e.* un inverse à droite modulo un opérateur compact, pour $A^m_{\vec{\beta}}$. En d'autres termes, nous allons construire un opérateur linéaire et continu $R_d : \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ tel qu'on ait $A^m_{\vec{\beta}} R_d = \mathrm{Id}_{\mathscr{R}} + K_{\mathscr{R}}$ où $\mathrm{Id}_{\mathscr{R}}$ désigne l'identité de $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$, et $K_{\mathscr{R}}$ un opérateur compact de $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$. Cette méthode est présentée dans [119, §4.1.2 p. 102], [102, §3.4.3 p. 88] ainsi que dans les ouvrages consacrés aux opérateurs pseudo-différentiels ([75] ou [95, tome III] par exemple). C'est également la démarche qui est proposée dans la conclusion de [72], papier où l'idée de l'utilisation des techniques de type Mellin dans l'étude des problèmes de transmission avec changement de signe a été introduite.

Commençons la construction de la paramétrix à droite. Grâce à l'inversibilité locale de $A^m_{\vec{\beta}}$ sur Ω_1 et sur Ω_2, on peut construire un opérateur continu R_0 tel que $\zeta_0 R_0 \eta_0 : \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ vérifie

$$A^m_{\vec{\beta}} \zeta_0 R_0 \eta_0 = \zeta_0 \mathrm{Id}_{\mathscr{R}} + K_0,$$

où K_0 est un opérateur compact de $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$.

De même, pour $k = 1, 2, \Sigma, int, ext$ et $i = 1, \dots, N_k$, en utilisant notamment les Théorèmes 3.1.8, 3.2.7, 3.2.3, on peut prouver qu'il existe un opérateur continu $R_k^i : \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ tel que

$$A^m_{\vec{\beta}} \zeta_k^i R_k^i \eta_k^i = \zeta_k^i \mathrm{Id}_{\mathscr{R}} + K_k^i,$$

où K_k^i est un opérateur compact de $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$.

Définissons alors

$$R_d := \zeta_0 R_0 \eta_0 + \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_1^i R_1^i \eta_1^i + \sum_{i=1}^{N_2} \zeta_2^i R_2^i \eta_2^i + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \zeta_\Sigma^i R_\Sigma^i \eta_\Sigma^i + \sum_{i=1}^{N_{int}} \zeta_{int}^i R_{int}^i \eta_{int}^i + \sum_{i=1}^{N_{ext}} \zeta_{ext}^i R_{ext}^i \eta_{ext}^i.$$

L'opérateur $R_d : \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}) \to \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ est linéaire et continu et l'on a

$$A^m_{\vec{\beta}} R_d - \mathrm{Id}_{\mathscr{R}} = K_0 + \sum_{k=1,2,\Sigma,int,ext} \sum_{i=1}^{N_k} K^i_k := K_{\mathscr{R}}$$

d'après (3.61). Ceci permet de prouver, de façon classique, que $\dim \operatorname{coker} A^m_{\vec{\beta}} < \infty$. Détaillons un peu ce point pour le plaisir (cf. [151, théorème 12.5]). Puisque $A^m_{\vec{\beta}}$ est un opérateur à image fermée, nous savons que $\operatorname{coker} A^m_{\vec{\beta}}$ est isomorphe à $\ker A^{m*}_{\vec{\beta}}$. Mais $\ker A^{m*}_{\vec{\beta}} \subset \ker (A^m_{\vec{\beta}} R_d)^* = \ker (\mathrm{Id}_{\mathscr{R}} + K_{\mathscr{R}})^*$ où $K_{\mathscr{R}}$ est un opérateur compact de $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$. Puisque $K^*_{\mathscr{R}}$ est également compact, on déduit du théorème de Riesz que $\dim \ker (\mathrm{Id}_{\mathscr{R}} + K_{\mathscr{R}})^* < \infty$. Par conséquent, on a bien $\dim \operatorname{coker} A^m_{\vec{\beta}} = \dim \ker A^{m*}_{\vec{\beta}} < \infty$.

Étudions maintenant le cas où l'une des hypothèses du Théorème 3.3.1 concernant les symboles n'est pas vérifiée. Nous souhaitons montrer qu'alors l'opérateur $A^m_{\vec{\beta}}$ n'est pas à image fermée. En raisonnant par l'absurde, supposons que $A^m_{\vec{\beta}}$ soit de type Fredholm. D'après le Théorème 3.3.3 ci-après, il existe une paramétrix à gauche pour $A^m_{\vec{\beta}}$. Autrement dit, il existe $R_g \in \mathcal{L}(\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}}), \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}}))$ tel que $R_g A^m_{\vec{\beta}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} + K_{\mathscr{D}}$ où $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ désigne l'identité de $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$, et $K_{\mathscr{D}}$ un opérateur compact de $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$. Pour simplifier les notations, pour $u \in \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ et $f \in \mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$, définissons

$$\|u\|_{\mathscr{D}} := \sum_{k=1,2} \|u_k\|_{\mathrm{V}^{m+2}_{\vec{\beta}_k}(\Omega_k)} \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{\mathscr{R}} := \sum_{k=1,2} \|f_k\|_{\mathrm{V}^{m}_{\vec{\beta}_k}(\Omega_k)}.$$

Nous avons alors, pour tout $u \in \mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$,

$$\|u\|_{\mathscr{D}} \leq C \left(\|A^m_{\vec{\beta}} u\|_{\mathscr{R}} + \|K_{\mathscr{D}} u\|_{\mathscr{D}} \right). \tag{3.73}$$

Par hypothèse, il existe $k \in \{1, 2, int, ext\}$ et $i \in \{1, \dots, N_k\}$ tels que $\mathscr{L}^i_k$ possède une valeur propre sur la droite $\Re e\, \lambda = -\beta^i_k + m + 1$. Pour simplifier, nous notons (r, θ) au lieu de (r^i_k, θ^i_k) les coordonnées polaires associées à $\boldsymbol{x}^i_k$. Introduisons une fonction de troncature $\Xi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\Xi(t) = 1$ pour $t < -1$ et $\Xi(t) = 0$ pour $t > 0$. Définissons $u_n(r, \theta) := \Xi_n(r) \zeta^i_k(r) r^{-\beta^i_k + m + 1 + i\mu} \varphi(\theta)$ où φ est un vecteur propre de $\mathscr{L}^i_k(-\beta^i_k + m + 1 + i\mu)$ et $\Xi_n(r) := \Xi(|\ln r| - n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, Ξ_n est égale à 0 pour $r \in [0; e^{-n}]$ et à 1 pour $r \in [e^{-n+1}; +\infty[$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n appartient à $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$ et un calcul direct montre que

$$\|u_n\|_{\mathscr{D}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \|A^m_{\vec{\beta}} u_n\|_{\mathscr{R}} \leq C.$$

Définissons $w_n := u_n / \|u_n\|_{\mathscr{D}}$. On a $A^m_{\vec{\beta}} w_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. D'autre part, puisque (w_n) est bornée dans $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$, on peut extraire une sous-suite, également notée (w_n), qui converge faiblement dans $\mathscr{D}(A^m_{\vec{\beta}})$. Puisque $K_{\mathscr{D}}$ est compact, on a $K_{\mathscr{D}} w_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ceci contredit (3.73) et montre que $A^m_{\vec{\beta}}$ n'est pas de type Fredholm. Par ailleurs, les valeurs propres des symboles forment des ensembles discrets (voir notamment les Propositions 3.2.8 et 3.2.4). Par conséquent, on peut toujours trouver $\vec{\gamma} = (\gamma^1_1, \dots, \gamma^{N_1}_1, \gamma^1_2, \dots, \gamma^{N_2}_2, \gamma^1_{int}, \dots, \gamma^{N_{int}}_{int}, \gamma^1_{ext}, \dots, \gamma^{N_{ext}}_{ext}) \in \mathbb{R}^{N_1 + N_2 + N_{int} + N_{ext}}$ avec $\beta^i_k \leq \gamma^i_k$ pour $k = 1, 2, int, ext$ et $i = 1, \dots, N_k$ tel que $A^m_{\vec{\gamma}}$ soit de type de Fredholm. Puisque $\ker A^m_{\vec{\beta}} \subset \ker A^m_{\vec{\gamma}}$, on déduit que $\ker A^m_{\vec{\beta}}$ est de dimension finie. Mais on peut montrer que si $A^m_{\vec{\beta}}$ vérifie l'estimation (3.73) alors $A^m_{\vec{\beta}}$ possède un noyau de dimension finie et son image est fermée dans $\mathscr{R}(A^m_{\vec{\beta}})$. Ce termine de prouver que $A^m_{\vec{\beta}}$ n'est pas à image fermée lorsqu'une des hypothèses sur les symboles n'est pas satisfaite. ■

Plus généralement, concernant les paramétrix, on a le résultat suivant ([151, théorème 12.5], [104, chapitre 5], [116, lemme 2.23]).

Théorème 3.3.3 *Considérons un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ où X et Y sont deux espaces de Banach.*
◇ Si A possède une paramétrix à gauche, i.e. s'il existe un opérateur $R_g \in \mathcal{L}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ tel que $R_g A = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} + K_{\mathrm{X}}$, où $K_{\mathrm{X}} \in \mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{X})$ est un opérateur compact, alors $\ker A$ est de dimension finie, et $\operatorname{im} A$ est fermée dans Y.
◇ Si A possède une paramétrix à droite, i.e. s'il existe un opérateur $R_d \in \mathcal{L}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ tel que $AR_d = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}} + K_{\mathrm{Y}}$, où $K_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y},\mathrm{Y})$ est un opérateur compact, alors $\operatorname{im} A$ est fermée dans Y et $\mathrm{Y}/\operatorname{im} A$ est de dimension finie.
◇ Si A possède une paramétrix à gauche et une paramétrix à droite, alors A est de type Fredholm, et la réciproque est également vraie. Dans ce cas, on peut prendre $R_g = R_d$.

3.3.4 Asymptotique de la solution en domaine borné

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats des paragraphes précédents pour étudier la régularité des solutions variationnelles appartenant à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Pour éviter d'alourdir la présentation en manipulant des notations compliquées, nous travaillons dans une géométrie particulière. Néanmoins, la démarche que nous présentons peut être adoptée dans une géométrie quelconque.

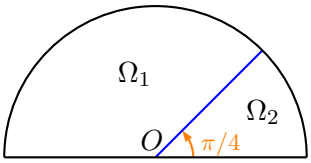


FIGURE 3.10 – Géométrie du domaine.

Considérons la géométrie de la Figure 3.10. Plus précisément, notons (r,θ) les coordonnées polaires associées au sommet O et définissons

$$\begin{array}{lcl} \Omega & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<1,\ \ 0<\theta<\pi\ \}; \\ \Omega_1 & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<1,\ \ \pi/4<\theta<\pi\ \}; \\ \Omega_2 & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<1,\ \ 0<\theta<\pi/4\ \}. \end{array}$$

Donnons-nous un terme source f appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et introduisons le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \ \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma\,\nabla u) = f \quad \text{ dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.74}$$

D'après le Théorème 1.4.2 du Chapitre 1, nous savons que le problème (3.74) possède une unique solution u lorsque $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ n'appartient pas à $[-1;-1/3]$. En utilisant le Théorème 3.1.4, on peut montrer que u est de régularité H^2 de part et d'autre de l'interface, en dehors d'un voisinage de O. Dans la suite, nous allons préciser la régularité de u en O. Dans cette optique, pour $m \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, nous définissons l'espace à poids $\mathrm{V}^m_\beta(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\overline{\Omega}\setminus\{O\})$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}^m_\beta(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\le m} \left\|r^{|\alpha|-m+\beta}\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v\right\|^2_\Omega\right)^{1/2}. \tag{3.75}$$

Les espaces $\mathrm{V}^m_\beta(\Omega_1)$ et $\mathrm{V}^m_\beta(\Omega_2)$ sont définis de la même façon. Nous noterons $\mathring{\mathrm{V}}^m_\beta(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ pour la norme (3.75). On a $\mathrm{V}^0_0(\Omega) = \mathrm{L}^2(\Omega)$. Usuellement, en utilisant l'inégalité de Friedrichs $\|r^{-1}v\|_\Omega \le C\,\|\nabla v\|_\Omega$ pour tout $v \in \mathring{\mathrm{V}}^1_0(\Omega)$, on prouve qu'on a $\mathring{\mathrm{V}}^1_0(\Omega) = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Par conséquent, la solution u du problème (3.74) appartient à $\mathring{\mathrm{V}}^1_0(\Omega)$. Définissons les secteurs infinis

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{K} & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<\infty,\ \ 0<\theta<\pi\ \}; \\ \mathcal{K}_1 & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<\infty,\ \ \pi/4<\theta<\pi\ \}; \\ \mathcal{K}_2 & := & \{\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\ |\ 0<r<\infty,\ \ 0<\theta<\pi/4\ \}. \end{array}$$

Introduisons $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, [0;1])$ une fonction de troncature telle que $\zeta(r) = 1$ pour $r \leq 1/2$ et $\zeta(r) = 0$ pour $r \geq 3/4$. Définissons ensuite

$$g := \operatorname{div}(\sigma\nabla(\zeta u)) = \zeta f + 2\nabla\zeta \cdot \nabla u + u \operatorname{div}(\sigma\nabla\zeta).$$

Confondons g et son prolongement par 0 à $\mathcal{K}$. Cette fonction appartient à $\mathrm{V}_0^0(\mathcal{K})$. En réalité, puisqu'elle est à support borné, elle constitue un élément de $\mathrm{V}_\beta^0(\mathcal{K})$ pour tout $\beta > 0$. Pour $\kappa_\sigma \in]-\infty; -1[\cup]-1/3; 0[$, on vérifie que le symbole $\mathscr{L}$ défini dans le §3.2.2 n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = 0$ (utiliser la Figure 3.4 à gauche). Par conséquent, d'après le Théorème 3.2.3, il existe un unique $v \in \mathscr{D}(C_1^0)$ tel que $C_1^0 v = g$. En utilisant la relation

$$\int_{\mathcal{K}} \sigma\nabla(\zeta u - v) \cdot \nabla w \, d\boldsymbol{x} = 0, \qquad \forall w \in \mathscr{D}(C_1^0),$$

et la technique de la T-coercivité du Théorème 1.2.7, on déduit $\zeta u = v \in \mathscr{D}(C_1^0)$. Ceci montre que u_k appartient à $\mathrm{V}_1^2(\Omega_k)$ pour $k = 1, 2$. En reprenant les calculs du point ii) du §3.1.5, on observe que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = 1$. D'autre part, $\mathscr{L}$ possède une unique valeur propre dans la bande du plan complexe $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Re e\,\lambda < 1\}$ si et seulement si $\kappa_\sigma \in]-1/3; 0[$. Par conséquent, nous pouvons énoncer les résultats suivants.

◇ Lorsque $\kappa_\sigma \in]-\infty; -1[$, en vertu du Théorème 3.2.5, la solution u est telle que u_k appartient à $\mathrm{V}_0^2(\Omega_k)$ pour $k = 1, 2$. Puisque, $\mathrm{V}_0^2(\Omega_k) \subset \mathrm{H}^2(\Omega_k)$, on déduit $u_k \in \mathrm{H}^2(\Omega_k)$ pour $k = 1, 2$.

◇ Lorsque $\kappa_\sigma \in]-1/3; 0[$, mis à part pour certains termes source particuliers, nous allons voir que le supplément de régularité pour u peut être très médiocre. Pour ces valeurs du contraste, d'après les calculs du point ii) du §3.1.5, dans $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Re e\,\lambda < 1\}$, le symbole $\mathscr{L}$ possède la valeur propre ξ avec

$$\xi := \frac{2}{\pi} \operatorname{arcos}(\rho) \qquad \text{et} \qquad \rho := \frac{\kappa_\sigma - 1}{2(\kappa_\sigma + 1)}.$$

On peut vérifier que ξ parcourt $]0; 2/3[$ lorsque κ_σ varie dans $]-1/3; 0[$. Introduisons φ un vecteur propre associé à la valeur propre ξ :

$$\varphi(\theta)|_{]0;\pi/4[} = \sin(\xi\theta)/\sin(\xi\pi/4) \quad \text{et} \quad \varphi(\theta)|_{]\pi/4;\pi[} = \sin(\xi(\pi - \theta))/\sin(3\xi\pi/4). \tag{3.76}$$

Pour établir le résultat de décomposition de u, en vertu de la Remarque 3.1.19, nous avons besoin de démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.3.4 *Pour tout $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in]-1/3; 0[$, on a $\int_0^\pi \sigma(\theta)\varphi(\theta)^2 d\theta \neq 0$* [1].

Preuve. Notons

$$I_1(\xi) := \int_{\pi/4}^{\pi} \varphi(\theta)^2 d\theta \qquad \text{et} \qquad I_2(\xi) := \int_0^{\pi/4} \varphi(\theta)^2 d\theta,$$

où φ est définie en (3.76). Nous allons prouver que $\sigma_1 I_1(\xi) + \sigma_2 I_2(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in]0; 2/3[$. Observons que $\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2 = \sigma_1(I_1 + \kappa_\sigma I_2) > \sigma_1(I_1 - I_2)$. Étudions donc la fonction $\xi \mapsto I_1(\xi) - I_2(\xi)$. Un calcul explicite utilisant la définition (3.76) donne

$$I_1(\xi) = \frac{\sin(3\xi\pi/2) - 3\xi\pi/2}{2\xi(\cos(3\xi\pi/2) - 1)} \qquad \text{et} \qquad I_2(\xi) = \frac{\sin\xi\pi/2 - \xi\pi/2}{2\xi(\cos\xi\pi/2 - 1)}.$$

Définissons $h(x) := (\sin x - x)/(\cos x - 1)$. On a $2\xi(I_1(\xi) - I_2(\xi)) = h(3\xi\pi/2) - h(\xi\pi/2)$. Il suffit donc de prouver que h est une fonction croissante sur $]0; \pi[$. On calcule $h'(x) = (2 - 2\cos x - x\sin x)/(\cos x - 1)^2$. Définissons $h_a(x) = 2 - 2\cos x - x\sin x$. On trouve $h_a'(x) = \sin x - x\cos x$ et $h_a''(x) = x\sin x$. On déduit, successivement, $h_a' > 0$ et $h' > 0$. Ainsi h est bien une fonction croissante sur $]0; \pi[$. Ceci permet de conclure. ■

1. Ici, $\theta \mapsto \sigma(\theta)$ est la fonction telle que $\sigma(\theta)|_{]0;\pi/4[} = \sigma_2$ et $\sigma(\theta)|_{]\pi/4;\pi[} = \sigma_1$.

D'après le Théorème 3.2.5, lorsque $\kappa_\sigma \in]-1/3;0[$, la fonction ζu admet donc la décomposition

$$\zeta u = c\, r^\xi \varphi(\theta) + \hat{u}$$

où la fonction $\hat{u} \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-1}(\mathcal{K})$ est telle que $\hat{u}_k \in \mathrm{V}^2_0(\mathcal{K}_k)$, $k = 1, 2$. En écrivant $u = \zeta u + (1-\zeta)u$, on déduit qu'on a

$$u = c\, \zeta r^\xi \varphi(\theta) + \tilde{u} \tag{3.77}$$

où la fonction $\tilde{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est telle que $\tilde{u}_k \in \mathrm{V}^2_0(\Omega_k) \subset \mathrm{H}^2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Ceci montre que le supplément de régularité pour la solution variationnelle $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ peut être très faible. En effet, d'une part, on a $\xi \to 0^+$ lorsque $\kappa_\sigma \to -1/3^+$. D'autre part, pour $k = 1, 2$, lorsque $\xi \notin \mathbb{N}$, la fonction $(r, \theta) \mapsto r^\xi \varphi(\theta)$ appartient à $\mathrm{H}^{1+s}(\Omega_k)$, si et seulement si $\xi > s$ (cf. [88, théorème 1.2.18]).

À présent, nous souhaitons donner une expression explicite du coefficient c apparaissant dans la décomposition (3.77). Définissons $\psi := a\varphi$ où a est la constante telle que $2\xi \int_0^\pi a\sigma(\theta)\varphi(\theta)^2 d\theta = 1$. Introduisons s la fonction telle que

$$s = r^{-\xi}\psi(\theta) + \tilde{s}. \tag{3.78}$$

où $\tilde{s}$ est l'unique fonction [2] de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{div}\,(\sigma\nabla\tilde{s}) = 0$ p.p. dans Ω et $\tilde{s} = -r^{-\xi}\psi(\theta)$ p.p. sur $\partial\Omega$. Puisque $0 < \xi < 2/3$, la fonction $\boldsymbol{x} \mapsto r^{-\xi}\psi(\theta)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$. Cela prouve que s n'est pas nulle. Résumons les propriétés vérifiées par s. On a $s \neq 0$, $s \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\mathrm{div}\,(\sigma\nabla s) = 0$ p.p. dans Ω et $s = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Définissons ensuite le domaine $\Omega_\delta := \Omega\backslash\overline{B(O,\delta)}$ où $B(O,\delta)$ désigne la boule ouverte de centre O et de rayon δ. En intégrant par parties sur Ω_δ, en dehors donc d'un voisinage du point singulier O, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} f s\, d\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_\delta} u\,\mathrm{div}\,(\sigma\nabla s) - s\,\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u)\, d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\partial\Omega_\delta} u\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} s - s\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\gamma_{\boldsymbol{x}} = \int_{\partial B(O,\delta)\cap\Omega} u\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} s - s\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\gamma_{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\partial_{\boldsymbol{n}} = -\partial_r$ sur $\partial B(O,\delta)\cap\Omega$, nous obtenons, lorsque $\delta \to 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B(O,\delta)\cap\Omega} u\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} s - s\sigma\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\gamma_{\boldsymbol{x}} \\
=\ &\int_{\partial B(O,\delta)\cap\Omega} \Big(c\,\xi\sigma(\theta) r^\xi \varphi(\theta) r^{-\xi-1}\psi(\theta) + c\,\xi\sigma(\theta) r^{-\xi}\psi(\theta) r^{\xi-1}\varphi(\theta)\Big)\, r d\theta + o(1) \\
=\ &c\, 2\xi \int_0^\pi \sigma(\theta)\varphi(\theta)\psi(\theta)\, d\theta + o(1) = c + o(1).
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $\delta \to 0$, on déduit que le coefficient de singularité dans (3.77) a pour expression

$$c = (f, \overline{s})_\Omega.$$

En particulier, ce coefficient dépend continûment du terme source f.

Nous allons nous arrêter ici pour ce premier contact avec les résultats de régularité des solutions du problème de transmission avec changement de signe. Le lecteur qui brûle d'impatience d'en savoir plus pourra passer directement aux Chapitres 5 et 8. Dans le premier de ces deux chapitres, nous chercherons à définir un cadre fonctionnel lorsque des valeurs propres du symbole $\mathscr{L}$ sont situées sur l'axe imaginaire. Dans le second, nous nous servirons du travail que nous venons d'accomplir pour établir un résultat de compacité utile à l'étude des équations de Maxwell en 2D.

2. Pour cette géométrie très particulière, on $\tilde{s}(\boldsymbol{x}) = (r^{-\xi} - r^\xi)\psi(\theta)$. Nous donnons néanmoins ce procédé de construction pour pouvoir travailler dans des domaines plus quelconques.

CHAPITRE QUATRE

MILIEUX NÉGATIFS ET DISSIPATION

Sommaire

Introduction **103**
4.1 Position du problème, notations **104**
4.2 Modélisation de la dissipation **105**
4.2.1 Modèles conduisant à des permittivités négatives 106
4.2.2 Un modèle de perméabilité négative 107
4.2.3 Bilan énergétique 109
4.3 Comportement de la suite des solutions dissipatives **110**
4.3.1 Premières estimations 110
4.3.2 Développement asymptotique par rapport à la dissipation 112
4.4 Convergence en norme forte **113**

Introduction

Dans le Chapitre 2, nous avons présenté une méthode numérique, basée sur la dissipation, permettant d'approcher la solution du problème de transmission scalaire ($\mathscr{P}$) « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f$ » lorsque ce dernier est bien posé. Rappelons l'idée de cette méthode. En ajoutant une petite partie imaginaire à σ, positive sur tout le domaine et modélisée par un paramètre γ, on obtient un nouveau problème ($\mathscr{P}^\gamma$) toujours bien posé. On discrétise ensuite ($\mathscr{P}^\gamma$) et on prouve que la solution approchée de ce problème converge vers la solution de ($\mathscr{P}$). Dans cette approche, nous nous servons de la dissipation comme d'un outil pour développer une méthode d'approximation numérique que l'on peut voir comme une méthode de pénalisation. Dans ce chapitre, nous souhaitons revenir sur cette notion de dissipation et lui donner un sens physique. Plus précisément, nous nous intéresserons à la question de la modélisation de l'absorption dans les matériaux négatifs, question qui, nous le verrons, n'a rien d'évident.

Dans un deuxième temps, nous étudierons le comportement de la suite des solutions du problème dissipatif ($\mathscr{P}^\gamma$). Comme nous le détaillerons dans le Chapitre 7, les équations de Maxwell en 2D se ramènent à des problèmes scalaires de la forme

$$\mathrm{div}(\sigma\nabla u) + \omega^2\,\varsigma\,u = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.1}$$

avec (σ, ς) égal à (ε^{-1}, μ) ou (μ^{-1}, ε). Ci-dessus, f désigne le terme source. Dans le Chapitre 1, nous avons démontré que ces problèmes peuvent être mal posés dans les cadres fonctionnels usuels correspondant à des champs physiques d'énergie finie et ce, pour toute valeur de la pulsation ω. C'est notamment le cas pour certains jeux de paramètres physiques lorsque l'interface entre le matériau positif (vide, diélectrique,...) et le matériau négatif (métal, métamatériau,...) présente des

singularités géométriques. D'un point de vue physique, il est difficile de comprendre ces problèmes mal posés. Néanmoins, nous pouvons imaginer raisonnablement que pour ces configurations, les équations aux dérivées partielles sur lesquelles nous travaillons ne modélisent plus correctement ce que l'on observe en réalité. Pour faire face à cette faiblesse du modèle, il est possible d'invoquer la dissipation (ou absorption) de tout milieu physique. Les paramètres physiques ne sont pas purement réels. Ils possèdent une partie imaginaire non nulle qui va assurer le caractère bien posé des équations de Maxwell. Cependant pour les applications, les physiciens aimeraient limiter au maximum les pertes en travaillant avec des matériaux aussi peu dissipatifs que possible. C'est pourquoi nous sommes conduits à étudier la question du comportement de la suite de solutions du problème avec dissipation. Pour simplifier la présentation, nous nous concentrerons sur le problème scalaire associé aux équations de Maxwell en 2D, et plus précisément, sur la partie principale de l'opérateur associé à ce problème.

Notre plan sera le suivant. Nous commencerons par rappeler ce que nous appelons problème dissipatif. Dans un second temps, nous présenterons quelques modèles de permittivités et perméabilités négatives permettant de justifier la pertinence des équations que nous utilisons pour modéliser le problème dissipatif. Dans ce travail, nous effectuerons une étude énergétique en régime temporel pour montrer que le choix d'une partie imaginaire uniformément positive pour la permittivité et la perméabilité est cohérent avec la physique. Dans la Section 4.3, nous nous intéresserons au comportement de la suite des solutions du problème avec absorption. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous démontrerons un résultat utile à la preuve de la convergence de la méthode numérique utilisant la dissipation.

4.1 Position du problème, notations

Rappelons la configuration considérée. Donnons-nous Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux domaines vérifiant $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Pour $k = 1, 2$, introduisons $\Gamma_k := \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$. Nous appelons interface l'ensemble $\Sigma := \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 = \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2$. De façon générale, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, nous notons $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ et $(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^2$, et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées. Nous définissons $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} := \|\nabla\cdot\|_{\Omega}$. Par ailleurs, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega}$ désignera le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Nous noterons $\mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^1_0(\Omega))$ l'espace des opérateurs bornés de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et nous le munirons de la norme

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|Av\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}}{\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}}, \qquad \forall A \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1_0(\Omega), \mathrm{H}^1_0(\Omega)) \ .$$

Introduisons $\sigma_k \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, deux fonctions à valeurs réelles telles que

$$\sigma_1 \geq c_1 > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_1 \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 \leq c_2 < 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_2,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Définissons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ de la façon suivante : $\sigma := \sigma_k$ dans Ω_k, $k = 1, 2$. Pour un terme source f dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ donné, réintroduisons alors le problème non dissipatif

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \ \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

De façon usuelle, u est solution du problème $(\mathscr{P})$ si, et seulement si, u vérifie « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $a(u, v) = \langle f, v\rangle_{\Omega}$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ », avec $a(u, v) = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\Omega}$. Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur continu $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ défini par

$$(\nabla(Au), \nabla v)_{\Omega} = a(u, v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Classiquement, c'est-à-dire dans le cas des matériaux positifs, on modélise l'absorption du milieu en ajoutant une partie imaginaire non nulle à la permittivité diélectrique ε et à la perméabilité magnétique μ. Pour aller dans ce sens, définissons donc

$$\sigma^\gamma := \sigma + i\gamma|\sigma| \qquad \text{avec} \qquad \gamma > 0. \tag{4.2}$$

Ci-dessus, le paramètre γ représente la dissipation du milieu. Nous allons justifier dans le prochain paragraphe le choix d'une partie imaginaire uniformément positive sur le domaine. Nous appellerons *problème dissipatif* le problème

$$(\mathscr{P}^\gamma) \left| \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^\gamma \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) & \text{tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma^\gamma \nabla u^\gamma) = f & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Introduisons la forme sesquilinéaire a^γ telle que $a^\gamma(u,v) = (\sigma^\gamma \nabla u, \nabla v)_\Omega$ pour tout $u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ ainsi que l'opérateur continu $A^\gamma : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ défini par

$$(\nabla(A^\gamma u), \nabla v)_\Omega = a^\gamma(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{4.3}$$

L'étude du problème dissipatif est relativement simple. En effet, on a la

Proposition 4.1.1 *Pour tout $\gamma > 0$, l'opérateur $A^\gamma : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ définit un isomorphisme. D'autre part, il existe une constante C indépendante de γ telle que $\|(A^\gamma)^{-1}\| \leq C/\gamma$ pour tout $\gamma > 0$.*

Preuve. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram en observant que pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on a

$$|a^\gamma(u,u)| \geq |\Im m\, a^\gamma(u,u)| \geq \gamma \min(c_1, |c_2|) \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

On déduit alors $\|(A^\gamma)^{-1}\| \leq 1/(\gamma \min(c_1, |c_2|)$. ■

Avant d'aller plus loin, nous allons revenir sur cette notion de dissipation en lui donnant un sens physique.

4.2 Modélisation de la dissipation

Considérons un matériau caractérisé par sa permittivité diélectrique ε^γ et sa perméabilité magnétique μ^γ. Dans cette notation, l'indice γ fait référence à la dissipation. Les fonctions ε^γ et μ^γ dépendent de la fréquence et sont *a priori* à valeurs complexes. Ces coefficients physiques à valeurs complexes prennent sens lorsqu'on revient en régime temporel en effectuant une transformée de Fourier inverse. Notons ε et μ les parties réelles de ε^γ et μ^γ. Comme nous l'avons indiqué précédemment, on modélise usuellement l'absorption d'un matériau pour lequel la permittivité et la perméabilité sont positives en ajoutant une partie imaginaire positive à ε et à μ. On peut vérifier que cette modélisation concorde avec la physique en un sens que nous préciserons dans le §4.2.3. Dans cette section, nous souhaitons justifier que le choix

$$\varepsilon^\gamma := \varepsilon + i\gamma|\varepsilon|, \qquad \gamma > 0, \tag{4.4}$$

$$\mu^\gamma := \mu + i\gamma|\mu|, \qquad \gamma > 0, \tag{4.5}$$

lorsque ε et/ou μ change(nt) de signe est également cohérent avec la physique. Pour ce faire, nous allons présenter quelques modèles de permittivités et perméabilités, pour différents matériaux, extraits de [3].

4.2.1 Modèles conduisant à des permittivités négatives

Modèle de Drude pour les métaux

Le modèle de Drude consiste à considérer que les électrons dans un métal sont libres de se déplacer sans subir de force de la part du noyau. Ils forment alors une sorte de gaz que l'on peut assimiler à un plasma. Dans ce modèle, le déplacement r de l'électron soumis à un champ électrique E vérifie

$$m\ddot{r} = -m\gamma\dot{r} - eEe^{-i\omega t}. \tag{4.6}$$

Dans cette équation, m désigne la masse de l'électron et $-e$ sa charge. Le terme $-eEe^{-i\omega t}$ correspond à la force subie par l'électron et $-m\gamma\dot{r}$ désigne une force d'amortissement provenant des collisions avec les autres électrons. C'est précisément ce terme d'amortissement qui représente la dissipation du milieu. En multipliant par $\dot{r}$ l'équation (4.6) avec $E = 0$, on observe qu'il faut choisir $\gamma \geq 0$ pour que la force $-m\gamma\dot{r}$ conduise à une perte d'énergie de l'électron. En cherchant une solution $r(t) = re^{-i\omega t}$ présentant une dépendance harmonique en temps, on obtient

$$-m\omega^2 r - i\gamma\omega m r = -eE \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{\frac{e}{m}E}{\omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Relions ensuite ce déplacement de l'électron, écrit dans le domaine fréquentiel, aux propriétés macroscopiques du métal. Notons N le nombre d'électrons par unité de volume. Le moment dipolaire électrique de chaque électron vaut $p = -er$ si bien que la polarisation par unité de volume s'écrit

$$P = Np = -Ner = -\frac{\frac{Ne^2}{m}E}{\omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Par définition, la permittivité diélectrique est le coefficient $\varepsilon^\gamma(\omega)$ tel que

$$\varepsilon_0 E + P = \varepsilon^\gamma(\omega)E.$$

On déduit donc

$$\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}\right),$$

où ω_p est la fréquence plasma telle que $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$. En isolant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i\,\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}\right). \tag{4.7}$$

Dans le cas d'un milieu non absorbant ($\gamma = 0$), on retrouve la loi classique $\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$ et la permittivité est négative pour les fréquences plus petites que la fréquence plasma (cf. Figure 4.3, à gauche). D'autre part, pour les milieux faiblement absorbants ($\gamma < \omega_p$), la partie réelle de la permittivité est négative pour $\omega < (\omega_p^2 - \gamma^2)^{1/2}$. Notons que la partie imaginaire de $\varepsilon^\gamma(\omega)$, elle, est toujours positive. Notre choix d'ajout de la dissipation en (4.4) concorde donc avec ce modèle très simple. De nombreux métaux possèdent une fréquence plasma située dans l'ultraviolet si bien que dans le visible, leur permittivité présente une partie réelle négative. La Figure 4.1 présente quelques valeurs expérimentales de $\varepsilon^\gamma(\omega)$ fournies dans [132] pour l'aluminium, le cuivre et l'argent.

Globalement, avec ces valeurs expérimentales, on observe que la partie réelle de ε^γ croît lorsque la longueur d'onde décroît. Le modèle de Drude (4.7) capte bien ce phénomène. Par contre, pour la partie imaginaire, les choses sont plus discutables. La partie imaginaire devrait décroître lorsque la longueur d'onde décroît [1]. Ce n'est pas vraiment le cas pour le cuivre...

1. Rappelons que $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Aluminium		
λ (nm)	$\Re e\, \varepsilon^\gamma$	$\Im m\, \varepsilon^\gamma$
650	-42	16.4
600	-35.1	11.6
550	-27.7	8.09
500	-22.7	5.95
450	-18.4	4.23
400	-15.2	3.14

Cuivre		
λ (nm)	$\Re e\, \varepsilon^\gamma$	$\Im m\, \varepsilon^\gamma$
650	-13.3	0.94
600	-9.4	1.04
550	-5.34	3.48
500	-5.08	4.26
450	-4.08	3.83

Argent		
λ (nm)	$\Re e\, \varepsilon^\gamma$	$\Im m\, \varepsilon^\gamma$
650	-17.6	0.58
600	-14.1	0.45
550	-11	0.36
500	-8.23	0.29
450	-5.55	2.66
400	-3.72	0.29

FIGURE 4.1 – Valeurs expérimentales de ε^γ en fonction de la longueur d'onde pour quelques métaux.

Remarque 4.2.1 *Si nous avions choisi une convention en temps différente avec un terme harmonique en $e^{i\omega t}$ dans (4.6), nous aurions obtenu la loi*

$$\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega}\right),$$

conduisant à une partie imaginaire négative pour ε^γ. Ainsi, parler du signe de la partie imaginaire des coefficients physiques n'a de sens que lorsqu'une convention en temps a été préalablement fixée.

Modèle de Lorentz pour les diélectriques

Il n'est en fait pas nécessaire de disposer d'un métal pour obtenir une permittivité négative. Un simple diélectrique, dans une certaine gamme de fréquences, peut suffire. Le modèle de Lorentz consiste à prendre en compte l'interaction de l'électron avec le noyau chargé positivement en ajoutant une force de rappel $-m\omega_0 r$ dans (4.6). Pour cette modélisation, on est conduit à une permittivité diélectrique

$$\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}\right), \tag{4.8}$$

avec de nouveau $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$. Notons que pour une force de rappel nulle (absence d'interaction avec le noyau), *i.e.* pour $\omega_0 = 0$, nous retrouvons bien le modèle de Drude. Réorganisons (4.8) pour obtenir

$$\varepsilon^\gamma(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i\,\frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\right).$$

Observons que pour $\gamma = 0$, autrement dit pour un milieu non dissipatif, la permittivité est négative dans la plage de fréquences $]\omega_0; (\omega_p^2+\omega_0^2)^{1/2}[$ (cf. Figure 4.3, au centre). D'autre part, nous constatons que la partie imaginaire de ε^γ est également toujours positive avec ce modèle.

4.2.2 Un modèle de perméabilité négative

Intéressons-nous maintenant aux matériaux à perméabilités négatives, matériaux que l'on ne trouve pas dans la nature et qui sont obtenus par un procédé d'homogénéisation. De nouveau, suivons [3] et considérons la fameuse structure de la Figure 4.2 fabriquée à partir de *Split Ring Resonators*. Ce sont des résonances locales qui se produisent dans les anneaux coupés qui confèrent à l'ensemble de la structure cette propriété artificielle de perméabilité négative.

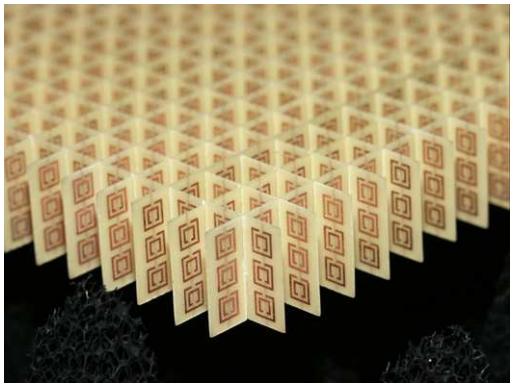


FIGURE 4.2 – Structure de Split Ring Resonators.

Modèle pour la structure de *Split Ring Resonators*

Aujourd'hui, cette structure constitue la base de la plupart des métamatériaux à perméabilité négative. L'idée pour ce modèle consiste à considérer l'anneau coupé comme un simple circuit LC. On obtient alors une perméabilité (cf. [3, équation (2.31)])

$$\mu^\gamma(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{f\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}\right),$$

où f est un coefficient représentant le taux de remplissage de la structure, *i.e.* le nombre de *Split Ring Resonators* par élément de volume, et ω_0 une pulsation dépendant de la géométrie de l'anneau coupé. Ainsi, comme indiqué notamment dans [153, 67, 108], nous pouvons donc utiliser un modèle de Lorentz pour cette structure. Un calcul direct montre que la partie imaginaire de μ^γ est toujours positive, en accord avec (4.5). La Figure 4.3, à droite, présente le comportement de μ^γ en fonction de ω lorsque la dissipation, modélisée par le coefficient γ, est choisie égale à zéro. Pour cette représentation, nous avons pris $f = \omega_0 = 1$. C'est la raison pour laquelle $\mu^\gamma(\omega)$ tend vers zéro lorsque $\omega \to +\infty$.

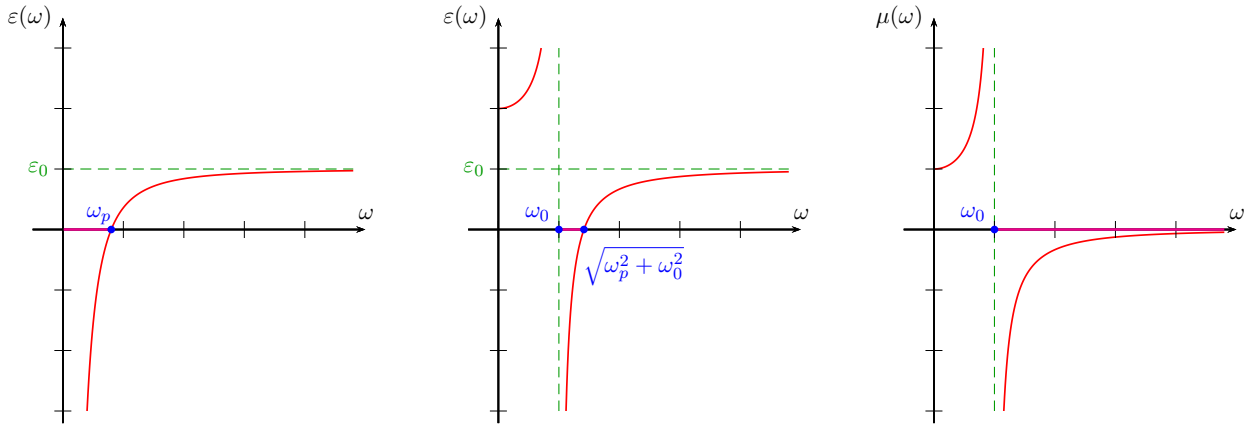


FIGURE 4.3 – Allure des constantes physiques en fonction de la fréquence pour les différents modèles présentés : modèle de Drude pour les métaux (à gauche), modèle de Lorentz pour les diélectriques (au centre) et modèle pour la structure de Split Ring Resonators (à droite). Pour chacune de ces représentations, la dissipation est prise égale à zéro.

De façon générale, pour la convention en temps choisie, ces modèles, que l'on peut justifier par des techniques d'homogénéisation (cf. [29, 79, 28]), conduisent à des parties imaginaires positives pour les permittivités et perméabilités. C'est l'idée importante de cette section. Ce signe joue un rôle déterminant dans les processus d'absorption limite. Présentons un exemple pour lequel

cette détermination est particulièrement sensible. Les matériaux doublement négatifs sont bien souvent qualifiés de « matériaux à indice négatif ». Expliquons pourquoi. Par définition, l'indice n est donné par la formule $n = (\varepsilon^\gamma \mu^\gamma)^{1/2}$. Pour ε^γ et μ^γ réels négatifs, on obtient *a priori* un indice positif. Où est l'erreur ? Elle vient du fait que n est en réalité défini comme la limite de $(\varepsilon^\gamma \mu^\gamma)^{1/2} = (\varepsilon\mu - \gamma^2|\varepsilon\mu| + i\gamma(|\varepsilon| + |\mu|))^{1/2}$ lorsque γ tend vers 0. Pour des raisons de causalité, la coupure de la racine est placée sur l'axe $]0; +\infty[$ (cf. [153]) ce qui conduit bien à un indice négatif lorsque $\gamma > 0$. Ce choix du signe de l'absorption est également crucial pour déterminer les modes sortants dans un guide d'ondes constitué d'un matériau négatif ou alors pour écrire la condition de Silver-Müller sur le bord d'un domaine pour les équations de Maxwell, cette dernière faisant intervenir cette fois la racine carrée de $\varepsilon^\gamma/\mu^\gamma$.

4.2.3 Bilan énergétique

Effectuons à présent un bilan énergétique pour un matériau « négatif » occupant l'espace $\mathbb{R}^3$. En suivant [153, 67], nous supposons ce matériau caractérisé par les constantes physiques

$$\begin{aligned} \varepsilon^\gamma(\boldsymbol{x},\omega) &= \varepsilon_0(\boldsymbol{x})\left(1 - \frac{\omega_{pe}(\boldsymbol{x})^2}{\omega^2 - \omega_{0e}(\boldsymbol{x})^2 + i\gamma_e(\boldsymbol{x})\omega}\right) \\ \text{et} \qquad \mu^\gamma(\boldsymbol{x},\omega) &= \mu_0(\boldsymbol{x})\left(1 - \frac{\omega_{pm}(\boldsymbol{x})^2}{\omega^2 - \omega_{0m}(\boldsymbol{x})^2 + i\gamma_m(\boldsymbol{x})\omega}\right). \end{aligned}$$

Les paramètres $\varepsilon_0, \mu_0, \omega_{pe}, \omega_{pm}, \omega_{0e}, \omega_{0m}, \gamma_e, \gamma_m$ sont des fonctions positives bornées non nécessairement régulières.

Remarque 4.2.2 *Comme nous l'avons observé lors de l'étude du modèle de Drude pour les métaux, ces lois pour ε^γ et μ^γ sous-entendent que nous travaillons avec un terme harmonique en temps en $e^{-i\omega t}$. En choisissant un terme harmonique en temps en $e^{i\omega t}$, il faut remplacer respectivement « $i\gamma_e(\boldsymbol{x})\omega$ » par « $-i\gamma_e(\boldsymbol{x})\omega$ » dans ε^γ et « $i\gamma_m(\boldsymbol{x})\omega$ » par « $-i\gamma_m(\boldsymbol{x})\omega$ » dans μ^γ.*

Classiquement, nous faisons l'hypothèse

$$0 < \varepsilon_0^- < \varepsilon_0(\boldsymbol{x}) < \varepsilon_0^+ \quad \text{et} \quad 0 < \mu_0^- < \mu_0(\boldsymbol{x}) < \mu_0^+, \qquad \text{p.p.t. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dans la suite, nous allons définir une énergie pour ce matériau.

Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ et $t \geq 0$, notons

- $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x},t)$ le champ électrique,
- $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x},t)$ le champ magnétique,
- $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction électrique,
- $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction magnétique.

En l'absence de terme source, ces champs vérifient les équations de Maxwell :

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{D}} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \qquad \text{pour } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \tag{4.9}$$

Notons respectivement $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{B}$ les transformées de Fourier des champs $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. On a

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega) = \varepsilon^\gamma(\boldsymbol{x},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\omega) = \mu^\gamma(\boldsymbol{x},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\omega),$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Introduisons la polarisation électrique $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ et la polarisation magnétique $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Les transformées de Fourier de ces deux champs auxiliaires sont notées respectivement $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$. D'après les expressions de ε^γ et μ^γ, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0(\boldsymbol{E} + \omega_{pe}^2 \boldsymbol{P}) \qquad &&\text{avec } \boldsymbol{P} \text{ vérifiant} \qquad (\omega_{0e}^2 - \omega^2 - i\gamma_e\omega)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0(\boldsymbol{H} + \omega_{pm}^2 \boldsymbol{M}) \qquad &&\text{avec } \boldsymbol{M} \text{ vérifiant} \qquad (\omega_{0m}^2 - \omega^2 - i\gamma_m\omega)\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}. \end{aligned}$$

En régime temporel, cela implique

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{D}} = \varepsilon_0(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \omega_{pe}^2 \boldsymbol{\mathcal{P}}) && \text{avec } \boldsymbol{\mathcal{P}} \text{ vérifiant} && \partial_t^2 \boldsymbol{\mathcal{P}} + \gamma_e \partial_t \boldsymbol{\mathcal{P}} + \omega_{0e}^2 \boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}, \\ &\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0(\boldsymbol{\mathcal{H}} + \omega_{pm}^2 \boldsymbol{\mathcal{M}}) && \text{avec } \boldsymbol{\mathcal{M}} \text{ vérifiant} && \partial_t^2 \boldsymbol{\mathcal{M}} + \gamma_m \partial_t \boldsymbol{\mathcal{M}} + \omega_{0m}^2 \boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En multipliant les équations de Maxwell (4.9) respectivement par $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, en utilisant (4.10) et en intégrant par parties, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2 + \mu_0|\boldsymbol{\mathcal{H}}|^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0\omega_{pe}^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}} + \mu_0\omega_{pm}^2 \boldsymbol{\mathcal{H}}\cdot\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} = 0.$$

Mais d'après (4.10), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2}\partial_t(|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2 + \omega_{0e}^2|\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2) + \gamma_e|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2 \\ \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}\cdot\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2}\partial_t(|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2 + \omega_{0m}^2|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2) + \gamma_m|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0\omega_{pe}^2\gamma_e|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2 + \mu_0\omega_{pm}^2\gamma_m|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}}|d\boldsymbol{x}, \tag{4.11}$$

où $\mathscr{E} := \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$ et

$$\left|\begin{aligned} \mathscr{E}_e &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0\omega_{pe}^2(|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2 + \omega_{0e}^2|\boldsymbol{\mathcal{P}}|^2)d\boldsymbol{x}, \\ \mathscr{E}_m &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mu_0|\boldsymbol{\mathcal{H}}|^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mu_0\omega_{pm}^2(|\partial_t\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2 + \omega_{0m}^2|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2)d\boldsymbol{x}. \end{aligned}\right.$$

Puisque γ_e et γ_m sont des fonctions positives, l'énergie $\mathscr{E}$ est bien décroissante dans le matériau. C'est plutôt rassurant. En effet, avec les modèles simples que nous avons considérés, la dissipation du milieu au niveau macroscopique est directement liée à la dissipation au niveau microscopique apparaissant dans le modèle de l'oscillateur amorti (cf. (4.6)).

Arrêtons-nous ici pour la justification du choix du signe de la dissipation et revenons à l'étude du problème $(\mathscr{P}^\gamma)$ introduit dans la Section 4.1.

4.3 Comportement de la suite des solutions dissipatives

Pour un terme source $F \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ donné, définissons $u^\gamma = (A^\gamma)^{-1}F$ où A^γ est l'opérateur défini en (4.3). Nous appellerons *suite de solutions dissipatives* la suite $(u^\gamma)_{\gamma>0}$ et nous la noterons, pour simplifier, (u^γ). Nous souhaitons étudier son comportement lorsque la dissipation du milieu tend vers 0. En effet, répétons-le, pour la plupart des applications, les physiciens souhaitent travailler avec des matériaux aussi peu dissipatifs que possible. Il est donc important d'effectuer ce passage à la limite. Comme nous pouvons nous y attendre, celui-ci dépend de façon cruciale du caractère bien posé du problème sans dissipation.

4.3.1 Premières estimations

En vertu de la Proposition 4.1.1, nous savons qu'il existe une constante C telle que

$$\|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|F\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}/\gamma.$$

Précisons cette estimation avec les trois résultats suivants.

Proposition 4.3.1 *Supposons que l'opérateur non-dissipatif A définisse un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Notons $u := A^{-1}F$. Alors il existe une constante C indépendante de γ telle qu'on ait*

$$\|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\gamma \|F\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \tag{4.12}$$

Preuve. Observons tout d'abord que

$$Au = A^\gamma u^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad A(u - u^\gamma) = (A^\gamma - A)u^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad u - u^\gamma = A^{-1}(A^\gamma - A)u^\gamma.$$

En utilisant l'estimation $\|A^\gamma - A\| \leq C\gamma$, nous déduisons

$$\|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\gamma \|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Ceci permet d'obtenir $(1 - C\gamma)\|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \|A^{-1}\|\|F\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. Ainsi, la suite (u^γ) est bornée. En repartant de (4.13), nous sommes bien conduits à (4.12). ■

Proposition 4.3.2 *Supposons que F appartienne à $\operatorname{im} A$. Alors la suite (u^γ) est bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. D'autre part, si A est injectif alors (u^γ) converge vers u, l'élément tel que $Au = F$, fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et faiblement dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.*

Preuve. Commençons par démontrer le premier point. Si $F \in \operatorname{im} A$, il existe $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $Au = F$. En écrivant $A^\gamma u^\gamma = Au \Leftrightarrow A^\gamma(u^\gamma - u) = (A - A^\gamma)u$, on obtient $\|u^\gamma - u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ grâce à la Proposition 4.1.1 et à l'estimation $\|A^\gamma - A\| \leq C\gamma$. On déduit $\|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq (C+1)\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. Lorsque (u^γ) est bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et faiblement dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ vers un élément v de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. L'opérateur A étant continu, la suite (Au^γ) converge alors faiblement vers (Av) et l'on a donc, pour tout $v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(\nabla(Av), \nabla v')_\Omega &= \lim_{\gamma \to 0} (\nabla(Au^\gamma), \nabla v')_\Omega \\
&= \lim_{\gamma \to 0} (\nabla((A - A^\gamma)u^\gamma), \nabla v')_\Omega + (\nabla(A^\gamma u^\gamma), \nabla v')_\Omega \\
&= \lim_{\gamma \to 0} (\nabla((A - A^\gamma)u^\gamma), \nabla v')_\Omega + (\nabla F, \nabla v')_\Omega \;=\; (\nabla F, \nabla v')_\Omega.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons $Av = F$ et donc $v = u$ lorsque A est injectif. ■

Énonçons maintenant un résultat négatif.

Proposition 4.3.3 *Supposons que F n'appartienne pas à $\operatorname{im} A$. Alors on a $\lim_{\gamma \to 0} \|u^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} = \infty$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u^γ) reste bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Dans ce cas, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers un élément u dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. De même que dans la preuve précédente, on a alors, pour tout $u' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(\nabla(Au), \nabla u')_\Omega &= \lim_{\gamma \to 0} (\nabla(Au^\gamma), \nabla u')_\Omega \\
&= \lim_{\gamma \to 0} (\nabla((A - A^\gamma)u^\gamma), \nabla u')_\Omega + (\nabla(A^\gamma u^\gamma), \nabla u')_\Omega \;=\; (\nabla F, \nabla u')_\Omega.
\end{aligned}$$

Autrement dit, u satisfait $Au = F$ ce qui contredit l'hypothèse $F \notin \operatorname{im} A$. ■

Ces quelques résultats simples montrent qu'il est important de bien comprendre la nature du problème non dissipatif. En effet, lorsque ce dernier est mal posé, pour un second membre F choisi arbitrairement, il y a de fortes chances pour que la norme physique de la solution dissipative « explose » lorsque l'absorption tend vers 0. Dans une telle configuration, il n'est pas suffisant de rajouter un peu de dissipation pour régulariser le problème. La solution dissipative peut présenter de fortes oscillations au voisinage de l'interface. Il faut alors mettre en place des méthodes numériques adaptées pour les capter à la manière de ce qui est fait pour les problèmes hautes fréquences (voir [46] pour une étude très complète de ces questions).

4.3.2 Développement asymptotique par rapport à la dissipation

La Proposition 4.3.1 indique que u^γ est approché à l'ordre 1 par u lorsque A constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Essayons d'être plus précis sur cette approximation. Pour cela, effectuons un développement asymptotique très simple de la solution du problème $(\mathscr{P}^\gamma)$ en fonction de γ. Postulons un ansatz polynomial de la forme

$$u^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n u_n.$$

En injectant l'expression de u^γ dans l'équation $A^\gamma u^\gamma = F$ puis en collectant les équations suivant les différentes puissances de γ, on trouve que les inconnues u_n doivent satisfaire

$$\begin{array}{lll} \text{pour } n = 0, & (\nabla(Au_0), \nabla v)_\Omega = (\nabla F, \nabla v)_\Omega, & \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega); \\ \text{pour } n \geq 1, & (\nabla(Au_n), \nabla v)_\Omega = -i(|\sigma|\nabla u_{n-1}, \nabla v)_\Omega, & \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{array}$$

Supposons que A définisse un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Dans ce cas, la suite de coefficients $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon unique. Introduisons alors l'approximation de u^γ à l'ordre $N+1$

$$\widehat{u}_N^\gamma := \sum_{n=0}^{N} \gamma^n u_n.$$

Proposition 4.3.4 *Il existe une constante qui dépend de N mais pas de γ telle que*

$$\|u^\gamma - \widehat{u}_N^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\gamma^{N+1}\|F\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Preuve. Commençons par prouver que la suite d'opérateurs $(A^\gamma)^{-1}$ est uniformément bornée. Pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{array}{rcl} \left|(\nabla(A^\gamma v), \nabla(Av))_\Omega\right| & = & \left|\|Av\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} + (\nabla((A^\gamma - A)v), \nabla(Av))_\Omega\right| \\ & \geq & \|Av\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} - C\gamma\|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}\|Av\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \end{array}$$

Puisque nous avons supposé que A était un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, nous obtenons l'estimation $\|A^\gamma v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \geq C\|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Ceci permet de montrer que $(A^\gamma)^{-1}$ est uniformément bornée. Nous pouvons alors écrire

$$\|u^\gamma - \widehat{u}_N^\gamma\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \;\leq\; C\|A^\gamma(u^\gamma - \widehat{u}_N^\gamma)\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \;\leq\; C\gamma^{N+1}\|\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u_N)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} \;\leq\; C\gamma^{N+1}\|F\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}.$$

Ceci termine la preuve ■

Dans le Chapitre 5, nous effectuerons un passage à la limite sur l'absorption dans une configuration pour laquelle l'opérateur associé au problème non dissipatif n'est pas de type Fredholm dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ en raison d'une singularité géométrique dans l'interface. Ce passage à la limite jouera un rôle de principe d'absorption limite et permettra de déterminer le « bon » cadre fonctionnel pour obtenir un problème bien posé.

Dans le paragraphe suivant, nous allons démontrer un résultat de convergence de la suite de solutions dissipatives vers la solution du problème sans absorption dans une norme plus forte que $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Ce travail technique est nécessaire pour justifier complètement la méthode numérique utilisant la dissipation (cf. Chapitre 2).

4.4 Convergence de la suite de solutions dissipatives en norme forte

Dans ce paragraphe, nous souhaitons montrer comment on justifie les estimations de la forme $|u^\gamma|_{\mathrm{H}^{1+s}(\Omega_1)} + |u^\gamma|_{\mathrm{H}^{1+s}(\Omega_2)} \leq C\|f\|_\Omega$ (avec $s > 0$) dont nous avons eu besoin dans le §2.4.2 du Chapitre 2. Nous supposons que les fonctions σ_1, σ_2 sont constantes et que le terme source f appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Pour fixer les idées et éviter les notations trop complexes, nous travaillerons sur un cas particulier. Définissons $\Omega := \{(x,y) \in]-2;1[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-2;0[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;1[\times]0;1[$. Le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}^*_-$ est choisi tel que

$$\kappa_\sigma \notin \{-\tanh(n\pi)/\tanh(2n\pi),\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\},$$

de sorte que A définisse bien un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Notons u la solution du problème $(\mathscr{P})$.

Proposition 4.4.1 *Pour $\gamma > 0$, notons u^γ l'unique solution du problème $(\mathscr{P}^\gamma)$. On a l'estimation suivante*

$$\|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_1)} + \|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_2)} \leq C\gamma\|f\|_\Omega,$$

pour γ suffisamment petit, avec $C > 0$ indépendante de γ.

Preuve. En utilisant une partition de l'unité, il est suffisant de prouver ce résultat localement. Introduisons ζ_1, $\zeta_2 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, [0;1])$ deux fonctions de troncature indépendantes de y telles que :

$$\begin{array}{lcl} \zeta_1(x,y) = 1 \text{ pour } x \leq -0.5 & \text{et} & \zeta_1(x,y) = 0 \text{ pour } x \geq -0.25; \\ \zeta_2(x,y) = 0 \text{ pour } x \leq -0.75 & \text{et} & \zeta_2(x,y) = 1 \text{ pour } x \geq -0.5. \end{array}$$

◇ `Approximation loin de l'interface :`

Lemme 4.4.2 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de γ et f, telle que $\|\zeta_1(u-u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \leq C\gamma\|f\|_\Omega$ pour γ suffisamment petit.*

Preuve. Définissons $\mathcal{O} :=]-2;-0.25[\times]0;1[$. Puisque σ est constant dans $\mathcal{O}$, un calcul simple conduit à

$$-\Delta(\zeta_1(u-u^\gamma)) = g,$$

avec $g = \zeta_1(f/\sigma - f/\sigma^\gamma) - 2\nabla\zeta_1 \cdot \nabla(u-u^\gamma) - \Delta\zeta_1(u-u^\gamma) \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O})$. Maintenant, en utilisant la Proposition 4.3.1, on remarque que $\|g\|_\mathcal{O} \leq C\gamma\|f\|_\Omega$. Or, puisque $\mathcal{O}$ est convexe, nous savons que le laplacien avec condition de Dirichlet homogène définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^2(\mathcal{O}) \cap \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$. Nous pouvons donc écrire

$$\|\zeta_1(u-u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} = \|\zeta_1(u-u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})} \leq C\|g\|_\mathcal{O} \leq C\gamma\|f\|_\Omega.$$

Ceci achève la preuve de ce premier lemme. ■

◇ `Approximation au voisinage de l'interface :`

Lemme 4.4.3 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de γ et f, telle que $\|\zeta_2(u-u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_1)} + \|\zeta_2(u-u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_2)} \leq C\gamma\|f\|_\Omega$ pour γ assez petit.*

Preuve. Introduisons les bandes infinies $\mathcal{I} := I \times \mathbb{R}$, $\mathcal{I}_j := I_j \times \mathbb{R}$, $j = 1,2$, avec $I :=]-1;1[$, $I_1 :=]-1;0[$ et $I_2 :=]0;1[$. Si v est une fonction mesurable sur $\mathcal{I}$, nous notons $v|_j$ la restriction de v à $\mathcal{I}_j$. En effectuant des prolongements par anti-symétries, sur $\tilde{\mathcal{O}} :=]-1;1[\times]-1;2[$, définissons les fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{u}^\gamma$ telles que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\tilde{u}(x,y) := \begin{cases} -u(x,2-y) & \text{pour} \quad 1 \leq y \leq 2 \\ u(x,y) & \text{pour} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ -u(x,-y) & \text{pour} \quad -1 \leq y \leq 0 \end{cases}, \qquad \tilde{u}^\gamma(x,y) := \begin{cases} -u^\gamma(x,2-y) & \text{pour} \quad 1 \leq y \leq 2 \\ u^\gamma(x,y) & \text{pour} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ -u^\gamma(x,-y) & \text{pour} \quad -1 \leq y \leq 0 \end{cases}.$$

Définissons également, toujours pour $x \in]-1;1[$,

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} -f(x,2-y) & \text{pour} \quad 1 \le y \le 2 \\ f(x,y) & \text{pour} \quad 0 \le y \le 1 \\ -f(x,-y) & \text{pour} \quad -1 \le y \le 0 \end{cases} .$$

Introduisons $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2,[0;1])$ une fonction de troncature indépendante de x telle que :

$$\chi(x,y) = 1 \text{ pour } 0 \le y \le 1 \qquad \text{et} \qquad \chi(x,y) = 0 \text{ pour } y \le -0.5 \text{ et } y \ge 1.5.$$

Maintenant, nous localisons l'étude de régularité à l'aide de χ. Dans la suite, nous ne faisons pas de distinction entre les éléments de $\mathrm{H}^1_0(\tilde{\mathcal{O}})$ ou $\mathrm{L}^2(\tilde{\mathcal{O}})$ et leur prolongement par 0 à $\mathcal{I}$. Considérons

$$p := -\sigma\left(\tilde{u}\Delta(\chi\zeta_2) + 2\nabla\tilde{u}\cdot\nabla(\chi\zeta_2)\right) + \tilde{f}\chi\zeta_2 \quad \text{et} \quad p^\gamma := -\sigma^\gamma\left(\tilde{u}^\gamma\Delta(\chi\zeta_2) + 2\nabla\tilde{u}^\gamma\cdot\nabla(\chi\zeta_2)\right) + \tilde{f}\chi\zeta_2 .$$

Ces deux éléments appartiennent à $\mathrm{L}^2(\mathcal{I})$ et sont à support compact. D'après leur définition, dans la bande infinie $\mathcal{I}$, $v := \chi\zeta_2\tilde{u}$ et $v^\gamma := \chi\zeta_2\tilde{u}^\gamma$ satisfont respectivement les problèmes de transmission,

$$(\mathscr{P}_{\text{bande}}) \left| \begin{array}{ll} -\sigma_j\Delta v_j = p_j & \text{dans } \mathcal{I}_j,\ j=1,2 \\ v_j = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_j \cap \partial\mathcal{I},\ j=1,2 \\ v_1 - v_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2 \\ \sigma_1\partial_x v_1 - \sigma_2\partial_x v_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2, \end{array} \right.$$

$$(\mathscr{P}^\gamma_{\text{bande}}) \left| \begin{array}{ll} -\sigma^\gamma_j\Delta v^\gamma_j = p^\gamma_j & \text{dans } \mathcal{I}_j,\ j=1,2 \\ v^\gamma_j = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_j \cap \partial\mathcal{I},\ j=1,2 \\ v^\gamma_1 - v^\gamma_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2 \\ \sigma^\gamma_1\partial_x v^\gamma_1 - \sigma^\gamma_2\partial_x v^\gamma_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2. \end{array} \right.$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à y aux équations de $(\mathscr{P}_{\text{bande}})$ et $(\mathscr{P}^\gamma_{\text{bande}})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}i$, on trouve que $x \mapsto \hat{v}(x,\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y} v(x,y)\,dy$ et $x \mapsto \hat{v}^\gamma(x,\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y} v^\gamma(x,y)\,dy$ vérifient respectivement

$$(\hat{\mathscr{P}}_{\text{bande}}) \left| \begin{array}{ll} -\sigma_j\left(\partial_x^2 + \lambda^2\right)\hat{v}_j(x,\lambda) = \hat{p}_j(x,\lambda) & \text{dans } \mathcal{I}_j,\ j=1,2 \\ \hat{v}_1(-1,\lambda) = \hat{v}_2(1,\lambda) = 0 & \\ \hat{v}_1(0,\lambda) = \hat{v}_2(0,\lambda) & \\ \sigma_1\partial_x\hat{v}_1(0,\lambda) = \sigma_2\partial_x\hat{v}_2(0,\lambda), & \end{array} \right.$$

$$(\hat{\mathscr{P}}_{\text{bande}}) \left| \begin{array}{ll} -\sigma^\gamma_j\left(\partial_x^2 + \lambda^2\right)\hat{v}^\gamma_j(x,\lambda) = \hat{p}^\gamma_j(x,\lambda) & \text{dans } \mathcal{I}_j,\ j=1,2 \\ \hat{v}^\gamma_1(-1,\lambda) = \hat{v}^\gamma_2(1,\lambda) = 0 & \\ \hat{v}^\gamma_1(0,\lambda) = \hat{v}^\gamma_2(0,\lambda) & \\ \sigma^\gamma_1\partial_x\hat{v}^\gamma_1(0,\lambda) = \sigma^\gamma_2\partial_x\hat{v}^\gamma_2(0,\lambda). & \end{array} \right.$$

Prouvons maintenant un résultat sur les inverses des opérateurs associés aux problèmes $(\hat{\mathscr{P}}_{\text{bande}})$ et $(\hat{\mathscr{P}}^\gamma_{\text{bande}})$.

Lemme 4.4.4 *Il existe une constante C indépendante de $\lambda \in \mathbb{R}i$ et γ telle que*

$$\textstyle\sum_{j=1}^2 |\hat{v}_j - \hat{v}^\gamma_j|_{\mathrm{H}^2(I_j)} + |\lambda|^2\,\|\hat{v}_j - \hat{v}^\gamma_j\|_{\mathrm{L}^2(I)} \le C\gamma\|\hat{p}\|_{\mathrm{L}^2(I)},$$

pour γ suffisamment petit.

Preuve. Notons respectivement $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_1$, $(\cdot,\cdot)_2$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(I)$, $\mathrm{L}^2(I_1)$ et $\mathrm{L}^2(I_2)$. Si ψ est une fonction mesurable sur I, ψ_j désigne la restriction de ψ à Ω_j pour $j=1,2$. Définissons $\tau := i\lambda \in \mathbb{R}$. Introduisons les formes sesquilinéaires telles que

$$\begin{aligned} d(\varphi,\psi) &:= \textstyle\sum_{j=1}^2 \left(\sigma_j(\varphi'_j,\psi'_j)_j + \tau^2\sigma_j(\varphi_j,\psi_j)_j\right), \qquad \forall\varphi,\psi \in \mathrm{H}^1_0(I); \\ d^\gamma(\varphi,\psi) &:= \textstyle\sum_{j=1}^2 \left(\sigma^\gamma_j(\varphi'_j,\psi'_j)_j + \tau^2\sigma^\gamma_j(\varphi_j,\psi_j)_j\right), \qquad \forall\varphi,\psi \in \mathrm{H}^1_0(I). \end{aligned}$$

Dans le Lemme 3.1.6 du Chapitre 3, nous avons étudié les propriétés de la forme d. Nous avons pour cela utilisé la $\mathtt{T}$-coercivité en 1D. Réintroduisons la symétrie $\mathfrak{s}$ telle que $\mathfrak{s}(x) = -x$ et l'isomorphisme $\mathtt{T}_1$ de $\mathrm{H}^1_0(I)$ défini par

$$\mathtt{T}_1\varphi := \begin{cases} \varphi_1 & \text{sur } I_1 \\ -\varphi_2 + 2\varphi_1 \circ \mathfrak{s} & \text{sur } I_2 \end{cases}.$$

L'estimation (3.10) indique que lorsque $|\sigma_2/\sigma_1| = |\kappa_\sigma| < 1$, il existe $C > 0$ indépendante de τ telle que

$$|d(\varphi, \mathtt{T}_1\varphi)| \geq C((\varphi', \varphi') + \tau^2(\varphi, \varphi)), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

On déduit

$$\begin{aligned} & C((\hat{v}' - \hat{v}^{\gamma\prime}, \hat{v}' - \hat{v}^{\gamma\prime}) + \tau^2(\hat{v} - \hat{v}^\gamma, \hat{v} - \hat{v}^\gamma)) \\ \leq\ & |d(\hat{v} - \hat{v}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma))| \\ =\ & |d(\hat{v}, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma)) - d(\hat{v}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma))| \\ =\ & |d(\hat{v}, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma)) - d^\gamma(\hat{v}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma)) + (d^\gamma - d)(\hat{v}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma))| \\ \leq\ & |(\hat{p} - \hat{p}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma))| + |(d^\gamma - d)(\hat{v}^\gamma, \mathtt{T}_1(\hat{v} - \hat{v}^\gamma))|. \end{aligned}$$

Puisque, $\|\hat{p} - \hat{p}^\gamma\|_{\mathrm{L}^2(I)} \leq C\gamma\|\hat{p}\|_{\mathrm{L}^2(I)}$, cela montre que la suite $(\|\hat{v}^\gamma\|_{\mathrm{H}^1(I)})$ est bornée, et donc que

$$|\hat{v} - \hat{v}^\gamma|_{\mathrm{H}^1(I)} + |\lambda|^2 \|\hat{v} - \hat{v}^\gamma\|_{\mathrm{L}^2(I)} \leq C\gamma\|\hat{p}\|_{\mathrm{L}^2(I)}, \tag{4.15}$$

pour γ assez petit. On termine la démonstration du Lemme 4.4.4 en observant que $\sigma_j(\lambda^2\hat{v} + (\hat{v})'') = \hat{p}_j$ et $\sigma_j^\gamma(\lambda^2\hat{v}^\gamma + (\hat{v}^\gamma)'') = \hat{p}_j^\gamma$ pour $j = 1, 2$. ■

L'égalité de Parseval (cf. Lemme 3.1.2) conduit alors à l'estimation $\|v - v^\gamma|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_1)} + \|v - v^\gamma\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_2)} \leq C\gamma\|p\|_{\mathcal{I}}$. Puisque $v = \zeta_2 u$ et $v^\gamma = \zeta_2 u^\gamma$ pour $(x, y) \in]-1; 1[\times]0; 1[$, on obtient le résultat du Lemme 4.4.3 en remarquant que $\|p\|_{\mathcal{I}} \leq C\|f\|_\Omega$. ■

◇ `Conclusion de la preuve de la Proposition 4.4.1`: D'après les Lemmes 4.4.2 et 4.4.3, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_1)} + \|u - u^\gamma\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_2)} &\leq \|\zeta_1(u - u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} + \|\zeta_2(u - u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_1)} + \|\zeta_2(u - u^\gamma)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega_2)} \\ &\leq C\gamma\|f\|_\Omega. \end{aligned}$$

Ceci constitue bien le résultat que nous souhaitions démontrer. ■

La Proposition 4.4.1 donne un résultat de convergence de la suite des solutions dissipatives en norme $\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}$ dans une configuration pour laquelle l'interface entre les deux matériaux est constituée d'un segment de droite. Lorsque l'interface présente un coin, il faut adapter ce que nous venons de faire en utilisant la transformée de Mellin. De nouveau, tout le travail consiste à prouver que les inverses des deux symboles (avec et sans dissipation) sont « proches ». Bien entendu, la norme de la convergence va dépendre de la valeur du contraste ainsi que de l'angle du coin.

DEUXIÈME PARTIE

EXTENSIONS POUR LE PROBLÈME SCALAIRE

CHAPITRE CINQ

CONDITION DE RADIATION DANS L'INTERVALLE CRITIQUE

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

[21] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et X. CLAEYS : Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Math. Models Meth. App. Sci., Accepté*, 33 pages, 2012.

Sommaire

Introduction **119**
5.1 Position du problème **121**
5.1.1 Géométrie, notations 121
5.1.2 Propriétés connues du problème 122
5.2 Analyse modale **123**
5.2.1 Calcul des modes du guide d'ondes 123
5.2.2 Un bref rappel d'un problème classique de guide d'ondes 125
5.3 Caractère bien posé dans un cadre fonctionnel adapté **126**
5.4 Principe d'absorption limite **130**
5.5 Caractère bien posé du problème dans la géométrie initiale **132**
5.6 Analyse dans les espaces de Sobolev à poids **136**
5.6.1 Norme à paramètre 136
5.6.2 Problème 1D dépendant d'un paramètre 136
5.6.3 Espaces à poids et transformée de Laplace dans la bande infinie 138
5.6.4 Problème dans la bande infinie 140
5.6.5 Problème dans la demi-bande 140
5.7 Aspects numériques **142**

Introduction

Nous poursuivons l'étude du problème de transmission $(\mathscr{P})$ « trouver u tel que $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f$ » où f désigne le terme source et σ un coefficient qui change de signe sur le domaine. Dans le Chapitre 1, en utilisant la technique variationnelle de la T-coercivité, nous avons obtenu des résultats relativement généraux pour le problème $(\mathscr{P})$ posé dans le cadre $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Nous avons notamment prouvé que $(\mathscr{P})$ est bien posé au sens de Fredholm lorsque le contraste $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$ n'appartient pas à un intervalle critique I contenant la valeur -1 (voir également [25, 24, 155, 129]). Cet intervalle dépend des angles de l'interface Σ entre le

matériau positif et le matériau négatif. D'autre part, il se réduit à $\{-1\}$ si et seulement si Σ est régulière. Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier le problème $(\mathscr{P})$ lorsque l'interface présente un coin O pour un contraste situé dans l'intervalle critique. Nous compléterons ainsi les résultats et analyses de [72, 26, 138, 145, 149].

Dans le premier chapitre de ce document, pour $\kappa_\sigma \in I$, nous avons prouvé le caractère mal posé du problème $(\mathscr{P})$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ en utilisant des fonctions singulières de la forme $u = r^{i\eta}\varphi(\theta)$ avec $\eta \in \mathbb{R}$. Dans cette expression, (r, θ) désignent les coordonnées polaires associées au coin. Ces fonctions singulières, en raison de leur comportement fortement oscillant en O, n'appartiennent pas à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Par ailleurs, dans les Chapitres 2 et 5, nous avons observé qu'en rajoutant de la dissipation au milieu, ce qui revient à ajouter une partie imaginaire à σ, on retrouve un problème bien posé $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Assez naturellement, on peut se demander si, pour $\kappa_\sigma \in I$, il n'existe pas un cadre fonctionnel dans lequel on puisse retrouver un problème bien posé et tel que la solution obtenue soit la limite de la suite des solutions dissipatives lorsque la dissipation tend vers 0.

Nous allons répondre à cette question dans le présent chapitre. Pour simplifier la présentation, nous développerons notre analyse à partir d'une géométrie particulière (cf. Figure 5.1). Ceci permettra d'expliciter complètement certains calculs d'exposants de singularité. L'extension des résultats que nous allons obtenir à des géométries mettant en jeu des interfaces polygonales quelconques ne pose pas de difficulté conceptuelle supplémentaire. Par contre, pour des géométries 3D, des questions difficiles apparaissent.

Il existe une analogie très forte entre le problème que nous souhaitons étudier et les problèmes de diffraction en domaine non borné. Pour la mettre en évidence, effectuons le changement de variables d'Euler en posant $(z, \theta) = (\ln r, \theta)$. Le voisinage du sommet devient alors une demi-bande infinie et les solutions singulières de la forme $r^{i\eta}\varphi(\theta)$ correspondent à des modes propagatifs en $e^{i\eta z}\varphi(\theta)$. Pour les problèmes de guides d'ondes classiques, nous savons définir un cadre fonctionnel permettant de prendre en compte ces modes propagatifs qui ne sont pas décroissants à l'infini. L'idée consiste à définir la solution comme la limite de la suite des solutions dissipatives, ces dernières étant toutes dans H^1. Ce procédé, appelé *principe d'absorption limite*, conduit à sélectionner la solution qui, en régime temporel, se propage vers l'infini. C'est pourquoi on parle de *solution sortante*. Nous définirons donc naturellement un cadre fonctionnel adapté pour le problème de coin en sélectionnant la « singularité propagative » associée au mode propagatif sortant dans la demi-bande. La justification théorique de ce choix n'est pas simple et nécessite d'utiliser les techniques de type Mellin introduites dans le Chapitre 3. De nouveau, il faudra les adapter pour étudier ce problème non elliptique. Nous espérons que l'analogie avec les problèmes de diffraction aidera les lecteurs qui ne sont pas familiers avec ces outils à comprendre le chapitre.

Ce phénomène inhabituel de singularité propagative apparaît dans d'autres domaines de la physique. Il est parfois qualifié de « trou noir » dans la littérature car tout se passe comme si de l'énergie était absorbée par un point. On le rencontre notamment en élastodynamique ou dans le domaine des water waves lorsque le domaine géométrique présente des singularités cuspidales [42, 43, 123, 124, 125]. En pratique, les trous noirs sont difficiles à observer car il est impossible de construire une singularité cuspidale idéale. Dans la nature, celle-ci est toujours arrondie. Pour pallier ce problème et recouvrer l'effet trou noir, les physiciens ajoutent un matériau absorbant sur la singularité arrondie [105]. Cette technique semble se rapprocher d'une PML physique. À notre connaissance, la question de savoir si les trous noirs dus aux coins dans les métaux ou les métamatériaux peuvent être observés est une question ouverte.

Décrivons à présent le plan de ce chapitre. Nous commençons par présenter le problème étudié dans la Section 5.1. Dans cette section, nous rappelons également les résultats que nous avons

obtenus dans le Chapitre 1 avec la technique de la T-coercivité dans le cadre H^1. Pour la géométrie que nous traitons, le problème est bien posé dans H^1 pour un contraste $\kappa_\sigma \notin [-1;-1/3]$. Dans la Section 5.2, nous montrons que le problème qui nous intéresse est analogue à un problème de guide d'ondes. Nous calculons alors les modes de ce guide. Nous constatons en particulier que pour κ_σ appartenant à $]-1;-1/3[$, il existe deux modes propagatifs se propageant dans des directions opposées. La Section 5.3 constitue le cœur de ce chapitre et contient les résultats nouveaux lorsque $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$. Dans une géométrie simplifiée, nous y établissons le caractère bien posé au sens de Fredholm dans un cadre fonctionnel approprié. Par un processus d'absorption limite, nous justifions le caractère physique de ce cadre fonctionnel dans la Section 5.4. En utilisant une technique de localisation, nous étudions ensuite le problème initial posé dans une géométrie quelconque. Nous détaillons certains aspects techniques dans la Section 5.6. Nous concluons enfin par quelques considérations concernant l'approximation de la solution dans le nouveau cadre fonctionnel.

5.1 Position du problème

5.1.1 Géométrie, notations

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière polygonale comme celui représenté sur la Figure 5.1. Nous supposons Ω subdivisé en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Nous définissons l'interface $\Sigma := \partial\Omega_1 \backslash \partial\Omega = \partial\Omega_2 \backslash \partial\Omega$. Nous faisons l'hypothèse que $\overline{\Sigma}$ est un segment droit qui intersecte $\partial\Omega$ en O, O', points qui ne sont pas situés sur les sommets de $\partial\Omega$. Dans la suite, nous nous servirons souvent des coordonnées polaires (r, θ) centrées en O, et telles que $\theta = 0$ ou π sur $\partial\Omega$ dans un voisinage de O.

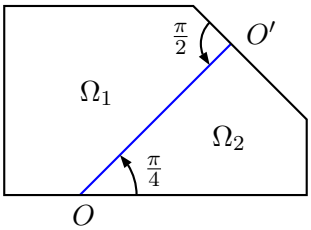


FIGURE 5.1 – Géométrie du problème. Toute la difficulté est liée au sommet O.

En O', nous supposons Σ perpendiculaire à $\partial\Omega$. Enfin, nous faisons l'hypothèse qu'il existe une boule $B(0, r_0)$ centrée en O telle que $\Omega_2 \cap B(0, r_0) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0,\ 0 < \theta < \pi/4\}$ et $\Omega_1 \cap B(0, r_0) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0,\ \pi/4 < \theta < \pi\}$. Nous considérons la valeur particulière $\pi/4$ pour l'ouverture du cône simplement car elle permettra de mener les calculs jusqu'à leur terme dans le §5.2.1. L'analyse que nous allons présenter est aisément transposable à d'autres valeurs d'angles. Nous souhaitons étudier le problème régi par les équations

$$-\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{5.1}$$

Nous préciserons plus tard dans quels espaces fonctionnels nous choisissons la donnée f et nous cherchons la solution u. La fonction σ est supposée constante par morceaux avec $\sigma = \sigma_j$ dans Ω_j, $j = 1{,}2$, où σ_1 et σ_2 sont deux constantes telles que $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$. Une fois de plus, dans la suite, le *contraste* $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$ jouera un rôle important. Mentionnons que le travail que nous allons développer peut également être utilisé pour étudier les problèmes de la forme $-\operatorname{div}(\sigma\nabla u) + \mu u = f$ dans Ω avec $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, *i.e.* pour couvrir le cas du régime harmonique.

Avant d'aller plus loin, introduisons quelques notations générales. Pour un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ avec $d = 1, 2$, le produit de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2$) est noté

$$(u, v)_{\mathcal{O}} := \int_{\mathcal{O}} u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \qquad \forall u, v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}) \text{ (resp. } \mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2).$$

Par conséquent, le produit scalaire standard de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2$) est $(u,v) \mapsto (u,\overline{v})_{\mathcal{O}}$. Nous définissons $\|u\|_{\mathcal{O}} := (u,\overline{u})_{\mathcal{O}}^{1/2}$ et $\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})} := \|\nabla u\|_{\mathcal{O}}$. Nous notons $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{O}}$ le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}) \times \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})$ et nous définissons la norme

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O})} := \sup_{v \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})\setminus\{0\}} \frac{|\langle u,v\rangle_{\mathcal{O}}|}{\|v\|_{\mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})}}, \qquad \forall u \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}).$$

Ces notations nous permettent d'introduire l'opérateur linéaire continu $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que

$$\langle Au, v\rangle_{\Omega} := (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\Omega}, \qquad \forall u,v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{5.2}$$

5.1.2 Propriétés connues du problème

Examinons si (5.1) est bien posé dans le cadre fonctionnel usuel. Lorsque $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\setminus]-\infty;0]$, on montre classiquement en utilisant le théorème de Lax-Milgram que l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ constitue un isomorphisme. Par conséquent, dans le reste de ce chapitre nous supposerons $\kappa_\sigma \in]-\infty;0[$. Les résultats du Chapitre 1 indiquent que le problème (5.1) est bien posé au sens de Fredholm lorsque le contraste est situé en dehors d'un intervalle critique contenant la valeur -1. Plus précisément, pour cette géométrie, le Théorème 1.4.2 fournit la

Proposition 5.1.1 *Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^*_- \setminus [-1;-1/3]$, l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ défini par (5.2) est de type Fredholm et* $\operatorname{ind} A = 0$.

Rappelons que pour démontrer ce résultat, nous avons utilisé la méthode géométrique de la T-coercivité dans les deux géométries canoniques ω de la Figure 5.2. Pour la première (Figure 5.2, à gauche), ω est un domaine symétrique par rapport à l'interface. Cette géométrie permet d'étudier le problème de transmission (5.1) dans un voisinage de l'interface ne contenant pas O. Pour travailler au voisinage de O, il faut considérer la géométrie de la Figure 5.2, à droite, pour laquelle ω est le demi-disque unité tel que $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2$ avec $\omega_1 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < 1, \pi/4 < \theta < \pi\}$ et $\omega_2 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/4\}$. En établissant des estimations locales, on construit une estimation *a priori* globale. En utilisant le caractère autoadjoint de A, on peut alors conclure que A est Fredholm d'indice 0 dès lors qu'on est capable d'inverser l'opérateur A dans les géométries canoniques.

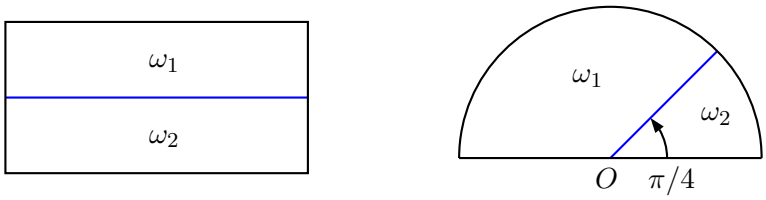


FIGURE 5.2 – Géométries canoniques utilisées dans la démonstration de la Proposition 5.1.1.

Dans cette étude, on observe que l'« ouverture » de l'intervalle critique, au sens où celui-ci n'est pas réduit à $\{-1\}$ mais constitue tout un intervalle, provient uniquement du sommet extérieur O. C'est donc au voisinage de ce point que nous devons travailler pour comprendre la nature des problèmes pour un contraste situé dans l'intervalle critique.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la Remarque 1.3.4 du Chapitre 1, indiquons que le résultat de la Proposition 5.1.1 ne permet pas de conclure au caractère bien posé du problème (5.1) au sens strict du terme (sens d'Hadamard) dans le cas $\sigma_2/\sigma_1 \notin [-1;-1/3]$. En effet, l'unicité doit être supposée par ailleurs.

Corollaire 5.1.2 *Supposons $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^*_- \setminus [-1;-1/3]$. Supposons de plus que le seul élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ satisfaisant $\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ est la fonction $u = 0$. Alors l'opérateur A défini en (5.2) constitue un isomorphisme.*

5.2 Analyse modale

Que pouvons-nous dire du problème (5.1) quand $\kappa_\sigma \in [-1;-1/3]$? Pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1$, nous avons prouvé dans le Chapitre 1 que $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ n'est pas à image fermée lorsque Σ présente une portion d'interface qui est droite. Dans une telle configuration, A n'est donc pas de type Fredholm. Le cas $\kappa_\sigma = -1$ semble particulièrement problématique et nous ne nous intéresserons pas à son traitement dans ce chapitre. Dans la suite, nous supposerons

$$\kappa_\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \in]-1;-1/3[. \tag{5.3}$$

Ainsi, nous mettons également de côté le cas $\kappa_\sigma = -1/3$. Nous nous attendons cependant à ce que son étude diffère peu de celle que nous allons présenter.

Pour étudier le problème (5.1) dans un voisinage de O, nous allons revenir à la géométrie canonique du demi-disque introduite dans le §5.1.2. En effectuant le changement de variable d'Euler $z = \ln r$, nous allons voir apparaître un problème de guide d'ondes. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, un calcul explicite va montrer que l'intervalle critique est caractérisé par l'existence de modes propagatifs. Nous effectuerons alors un bref rappel des techniques permettant de traiter le problème de guide d'ondes pour l'équation de Helmholtz. Ceci nous donnera l'intuition d'un bon cadre fonctionnel pour notre problème.

5.2.1 Calcul des modes du guide d'ondes

Considérons le domaine ω représenté sur la Figure 5.2 à droite et introduisons le problème

$$-\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{dans } \omega \qquad \text{et} \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\omega, \tag{5.4}$$

où la fonction σ, dépendant uniquement de θ, vérifie $\sigma(\theta) = \sigma_2$ pour $0 < \theta < \pi/4$ et $\sigma(\theta) = \sigma_1$ pour $\pi/4 < \theta < \pi$. Le problème (5.4) peut être reformulé en un problème posé dans une géométrie encore plus simple. À l'instar ce que nous avons fait dans le §3.2, considérons le changement de variable $z = \ln r$ et définissons $\widetilde{u}(z,\theta) = u(e^z,\theta)$ ainsi que $\widetilde{f}(z,\theta) = e^{2z} f(e^z,\theta)$. Avec ces notations, le problème (5.4) devient un problème posé dans $\mathcal{B} =]-\infty;0[\times]0;\pi[$ qui s'écrit [1]

$$-(\sigma\partial_z^2 + \partial_\theta\sigma\partial_\theta)\widetilde{u} = \widetilde{f} \quad \text{dans } \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}. \tag{5.5}$$

La première équation ci-dessus se réécrit $-\operatorname{div}(\sigma\nabla\widetilde{u}) = \widetilde{f}$ dans $\mathcal{B}$. Pour étudier le problème dans $\mathcal{B}$, il est naturel de calculer les solutions à variables séparées du problème homogène dans la bande infinie $\mathbb{R}\times]0;\pi[$. Plus précisément, nous cherchons les fonctions de la forme $\exp(\lambda z)\varphi(\theta)$ qui vérifient

$$\operatorname{div}\big(\sigma\nabla(e^{\lambda z}\varphi(\theta))\big) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}\times]0;\pi[\qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \tag{5.6}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ dont la valeur est à déterminer, et pour un certain $\varphi \in \mathrm{H}^1(]0;\pi[)$. Usuellement, ces fonctions sont appelées « modes » du guide d'ondes. Ce problème est équivalent à chercher les couples $(\lambda,\varphi) \in \mathbb{C}\times\mathrm{H}^1_0(]0;\pi[)\setminus\{0\}$ satisfaisant $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = 0$ où $\mathscr{L}(\lambda) : \mathrm{H}^1_0(]0;\pi[) \to \mathrm{H}^{-1}(]0;\pi[)$ est l'opérateur continu défini par

$$\langle \mathscr{L}(\lambda)\varphi, \psi \rangle_{]0;\pi[} = \int_0^\pi \sigma\, d_\theta\varphi\, d_\theta\psi\, d\theta - \lambda^2 \int_0^\pi \sigma\varphi\,\psi\, d\theta, \qquad \forall\varphi,\psi \in \mathrm{H}^1_0(]0;\pi[). \tag{5.7}$$

Comme dans le Chapitre 3, nous dirons que λ est une valeur propre du symbole $\mathscr{L}$ s'il existe $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(]0;\pi[)\setminus\{0\}$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)\varphi = 0$. L'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est noté $\Lambda(\kappa_\sigma)$. Puisque nous avons fixé la géométrie, $\Lambda(\kappa_\sigma)$ ne dépend que du contraste κ_σ.

1. Rappelons qu'en coordonnées polaires, pour σ indépendant de r, on a $-\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot) = -r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta\sigma\partial_\theta)\cdot$.

Bien que ce problème aux valeurs propres soit linéaire par rapport à λ^2, il n'entre pas dans les théories habituelles en raison du changement de signe de σ en $\theta = \pi/4$. En particulier, notons que l'application $(\varphi, \psi) \mapsto \int_0^\pi \sigma\varphi\overline{\psi}\, d\theta$ ne définit pas un produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(]0;\pi[)$. Nous allons voir qu'il peut apparaître des valeurs propres complexes. Ceci laisse peu d'espoir de pouvoir utiliser les outils provenant de l'étude des opérateurs autoadjoints. Dans le §3.1.5 du Chapitre 3, nous nous sommes intéressés aux propriétés du symbole $\mathscr{L}$. Nous avons montré que 0 est valeur propre de $\mathscr{L}$ si et seulement si $\sigma_2/\sigma_1 = -1/3$. D'autre part, nous avons prouvé que pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$, on a

$$\begin{aligned} &\Lambda(\kappa_\sigma) = \{2k,\, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{\xi(\kappa_\sigma) + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\xi(\kappa_\sigma) + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{avec} \qquad \xi(\kappa_\sigma) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arcos}(\rho(\kappa_\sigma)) \qquad \text{et} \qquad \rho(\kappa_\sigma) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\kappa_\sigma}{1+\kappa_\sigma}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Remarquons que, pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}$, nous avons $\rho(\kappa_\sigma) \in [-1;1]$ si et seulement si $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}\setminus]-1;-1/3]$. Dans (5.8), il apparaît clairement que la valeur $\kappa_\sigma = -1$ va soulever d'importantes difficultés. Introduisons la fonction $z \mapsto -i\,\ln\big(\,z + i(1-z^2)^{1/2}\,\big)$, extension naturelle au plan complexe de la fonction arccos. L'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est alors égal à

$$\begin{aligned} &\Lambda(\kappa_\sigma) = \{2k,\, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{i\eta_\sigma + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-i\eta_\sigma + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{avec} \;\; \eta_\sigma = -\frac{2}{\pi}\,\ln\big(\,\rho(\kappa_\sigma) + i(1-\rho(\kappa_\sigma)^2)^{1/2}\,\big). \end{aligned} \tag{5.9}$$

En utilisant la formule (5.9), on peut vérifier que pour $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$, on a $\Im m\,\eta_\sigma = 0$ (cf. Chapitre 3, Figure 3.4) ainsi que $\Re e\,\eta_\sigma > 0$. Les nombres $\pm i\eta_\sigma$ constituent alors deux valeurs propres purement imaginaires. Les modes associés ont pour expression

$$u_{\mathrm{p}}^{\pm}(z,\theta) = \varphi_{\mathrm{p}}(\theta)\, e^{\pm i\eta_\sigma z} \;\; \text{avec} \;\; \varphi_{\mathrm{p}}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(\,\eta_\sigma\,\theta\,)}{\sinh(\,\eta_\sigma\pi/4\,)} & \text{sur } [0;\pi/4] \\[2ex] \dfrac{\sinh(\,\eta_\sigma(\pi-\theta)\,)}{\sinh(\,\eta_\sigma\,3\pi/4\,)} & \text{sur } [\pi/4;\pi]. \end{cases} \tag{5.10}$$

Par analogie avec les problèmes classiques de guides d'ondes (voir le paragraphe suivant), ces modes seront appelés *modes propagatifs*.
Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-1;-1/3]$, toutes les valeurs propres sont à partie réelle différente de 0 (cf. Figure 3.4) si bien que tous les modes sont *évanescents*.

Finalement, si l'on résume, l'idée importante à retenir est la suivante : il existe des modes propagatifs si et seulement si le contraste appartient à l'intervalle critique $]-1;-1/3[$.

Remarque 5.2.1 *On peut également mener cette analyse modale lorsque $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}^*\setminus[-1;-1/3]$ et les valeurs propres restent données par (5.9). Dans (5.9), le logarithme est défini ainsi :* $\ln(re^{i\alpha}) = \ln r + i\alpha$ *pour $r > 0$ et $\alpha \in]-\pi;+\pi]$. D'autre part, nous prenons la racine telle que $\sqrt{re^{i\alpha}} = \sqrt{r}\, e^{i\alpha/2}$ pour $r > 0$ et $\alpha \in]-\pi;+\pi]$.*

Remarque 5.2.2 *Lorsque $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-1;-1/3]$, tous les modes sont évanescents. Indiquons que nous pourrions prouver le caractère bien posé de (5.5) dans $\mathrm{H}_0^1(\mathcal{B})$ en utilisant les techniques présentées dans les sections suivantes.*

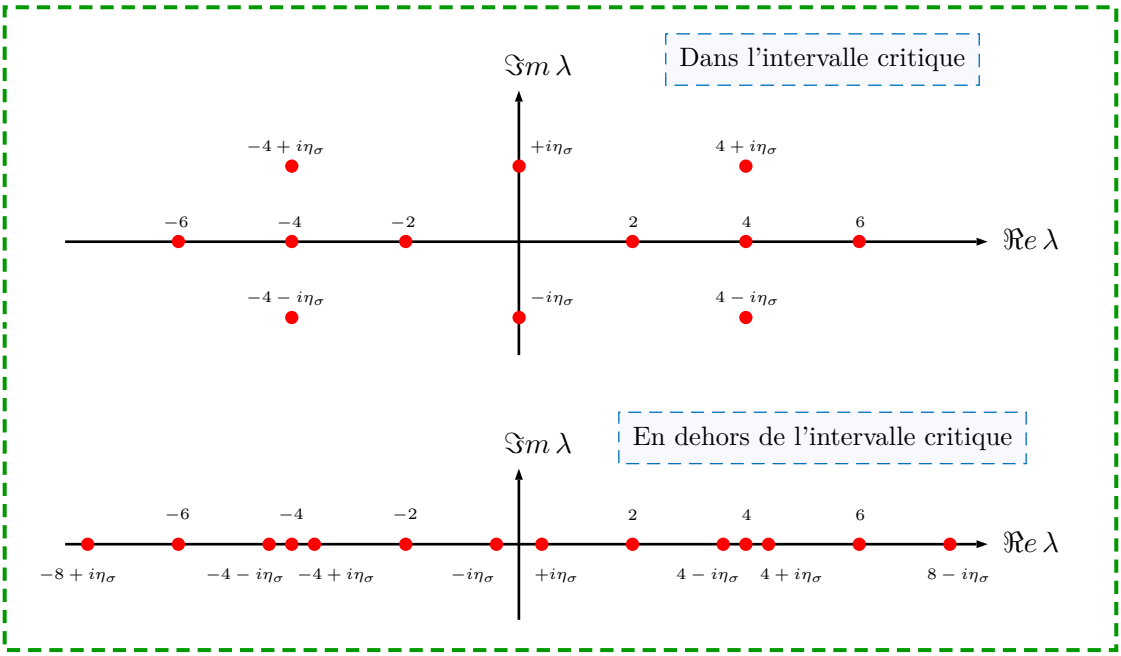


FIGURE 5.3 – Position des valeurs propres pour $\kappa_\sigma = -1/2 \in]-1;-1/3[$ (en haut) et pour $\kappa_\sigma = -1/4 \notin]-1;-1/3[$ (en bas).

5.2.2 Un bref rappel d'un problème classique de guide d'ondes

Pour nous donner une idée de la méthode à mettre en œuvre pour traiter le problème (5.5), intéressons-nous au problème classique de guide d'ondes

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } v \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{B}) \text{ tel que} & & & \\ \Delta v + k^2 v & = & 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ v(z,0) = v(z,\pi) & = & 0 & \forall z \leq 0, \\ v(0,\theta) & = & g(\theta), & \end{array}\right. \tag{5.11}$$

où $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et $g \in \mathrm{H}^{1/2}_{00}(]0;\pi[)$. De nouveau, la séparation de variables constitue une approche naturelle et le calcul des modes conduit à considérer le problème aux valeurs propres suivant

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\lambda,\varphi) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1_0(]0;\pi[) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_0^\pi d_\theta\varphi\, d_\theta\psi - k^2\varphi\,\psi\, d\theta = \lambda^2 \int_0^\pi \varphi\,\psi\, d\theta, \qquad \forall \psi \in \mathrm{H}^1_0(]0;\pi[). \end{array}\right. \tag{5.12}$$

Un calcul simple montre que les modes forment la famille $(\exp(\pm\lambda_n z)\varphi_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec

$$\varphi_n(\theta) = \sin(n\theta) \qquad \text{et} \qquad \lambda_n = \begin{cases} -i\sqrt{k^2-n^2} & \text{si } n \leq k, \\ \sqrt{n^2-k^2} & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

Pour $k < 1$, les λ_n sont des nombres réels positifs si bien que tous les modes sont évanescents. Pour le problème étudié dans le paragraphe précédent, cela correspond au cas où le contraste est situé à l'extérieur de l'intervalle critique. Des modes propagatifs apparaissent lorsque $k > 1$. En particulier, pour $k \in]1;2[$, il existe exactement deux modes propagatifs $\sin\theta\, e^{\pm i\sqrt{k^2-1}z}$, se propageant dans des sens opposés. Concentrons-nous sur ce cas de figure qui est analogue à la situation d'un contraste situé dans l'intervalle critique pour notre problème avec changement de signe.

Remarquons d'abord que si nous autorisons les modes propagatifs dans l'espace fonctionnel dans lequel nous cherchons la solution, l'unicité ne tient pas pour le problème (5.11). En effet, $\sin\theta\,\sin(\sqrt{k^2-1}\,z)$ est une solution pour $g=0$. Classiquement, le caractère bien posé est restauré en imposant une condition de radiation, pour sélectionner la solution « sortante ». Puisque (5.12) est un problème aux valeurs propres autoadjoint, la famille $(\,\sqrt{2/\pi}\,\sin(n\theta)\,)_{n>0}$ définit une base de Hilbert de $\mathrm{L}^2(]0;\pi[)$. En décomposant g sur cette base $g(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\sin(n\theta)$, la solution sortante de (5.11) s'écrit, en supposant une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega_0 t)$ avec une pulsation $\omega_0>0$,

$$v(z,\theta)=g_1\sin\theta\,e^{-i\sqrt{k^2-1}\,z}+v_e(z,\theta). \tag{5.13}$$

Ci-dessus, la composante évanescente s'écrit $v_e(z,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty} g_n\,\sin(n\theta)\,e^{\sqrt{n^2-k^2}\,z}$. Autrement dit, g est la somme d'un mode propagatif et d'une composante évanescente.

Remarque 5.2.3 *Pour définir ce qu'est une onde sortante, on utilise habituellement le principe d'*absorption limite*. Considérons le problème (5.11) en remplaçant k par $k_\gamma=k+i\gamma$. Un tel problème possède une unique solution v_γ dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{B})$. La solution sortante de (5.11) est alors définie comme la limite v de v_γ dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{B})$ lorsque $\gamma\to 0$.*

5.3 Caractère bien posé dans un cadre fonctionnel adapté

Revenons au problème (5.5). Nous souhaitons déterminer un cadre fonctionnel dans lequel ce problème est bien posé. Pour cela, une idée naturelle consiste à adapter l'approche utilisée pour traiter le problème du §5.2.2. Malheureusement, en raison du changement de signe de σ à travers l'interface $\theta=\pi/4$, comme nous l'avons déjà mentionné dans le Chapitre 3, le problème aux valeurs propres associé à (5.7) n'est pas auto-adjoint et nous ne sommes pas en mesure de prouver que la famille de vecteurs propres associée constitue une base de Hilbert de $\mathrm{L}^2(]0;\pi[)$. Néanmoins, en utilisant (5.13) comme modèle, nous allons chercher une solution que s'écrit comme la somme d'un mode propagatif et d'une composante évanescente. De nouveau, nous utiliserons les espaces de Sobolev à poids pour mesurer le comportement exponentiellement décroissant de la composante évanescente.
Notons $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans $\mathcal{B}$. Pour $k\geq 0$, définissons $\mathrm{W}^k_\beta(\mathcal{B})$ la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}^k_\beta(\mathcal{B})}:=\Big(\sum_{\alpha+\gamma\leq k}\|\,e^{\beta z}\,\partial_z^\alpha\partial_\theta^\gamma v\,\|^2_{\mathcal{B}}\Big)^{1/2}.$$

Cette norme est équivalente à la norme $\|\,e^{\beta z}v\,\|_{\mathrm{H}^k(\mathcal{B})}$ et $\mathrm{W}^1_0(\mathcal{B})=\mathrm{H}^1_0(\mathcal{B})$. Ici, contrairement au Chapitre 3, on ne considère que des espaces à poids contenant la condition de Dirichlet homogène. On a par ailleurs $\mathrm{W}^0_0(\mathcal{B})=\mathrm{L}^2(\mathcal{B})$ et si $\beta>0$, alors $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})\subset\mathrm{H}^1_0(\mathcal{B})\subset\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. Pour se faire une idée de ces espaces à poids, considérons une fonction de la forme $v(z,\theta)=\varphi(\theta)\exp(\lambda z)\zeta(z)$ où $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(]0;\pi[)\cap\mathrm{H}^1_0(]0;\pi[)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\zeta\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(0)=0$ et $\zeta(z)=1$ pour $z\leq -1$. Alors $v\in\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ si et seulement si $\Re e\,\lambda>-\beta$.

Nous notons $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ le dual topologique de $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}}$ le crochet de dualité $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*\times\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. L'espace $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*}:=\sup_{u\in\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})\setminus\{0\}}\frac{|\langle v,u\rangle_{\mathcal{B}}|}{\|u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})}},\qquad\forall v\in\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*.$$

Observons par exemple que pour $\beta>0$, on a $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})\subset\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*$ au sens où tout $u\in\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ induit une forme linéaire $v\mapsto(\nabla u,\nabla v)_{\mathcal{B}}$ continue sur $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$. Pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, définissons l'opérateur linéaire continu $L_\beta:\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})\to\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*$ tel que

$$\langle L_\beta u,v\rangle_{\mathcal{B}}=(\,\sigma\nabla u,\nabla v\,)_{\mathcal{B}}\,,\qquad\forall(u,v)\in\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})\times\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}). \tag{5.14}$$

Pour $\kappa_\sigma \neq -1$, le résultat suivant fournit un critère simple pour savoir si l'opérateur L_β est de type Fredholm.

Théorème 5.3.1 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. L'opérateur $L_\beta : \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*$ est de type Fredholm si et seulement si $\Lambda(\kappa_\sigma) \cap \ell_\beta = \emptyset$ où ℓ_β désigne la droite $\{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \lambda = \beta \,\}$.*

La preuve est basée sur des arguments très similaires à la théorie présentée dans le Chapitre 3. Nous la détaillerons dans la Section 5.6. Les calculs du §5.2.1 montrent que pour $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$, l'ensemble $\Lambda(\kappa_\sigma) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -2 < \Re e\, \lambda < 2\}$ est inclus dans $\mathbb{R}i$. D'après le Théorème 5.3.1, on déduit que lorsque $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$, L_β est de type Fredholm pour $\beta \in]-2;2[\backslash\{0\}$. Maintenant, nous cherchons à obtenir des informations sur $\dim\ker L_\beta$ (à ce stade, nous savons seulement que $\dim\ker L_\beta < \infty$). Indiquons que dans le reste de ce chapitre, mis à part dans la Section 5.6, nous prendrons toujours $\beta \in]0;2[$.

Lemme 5.3.2 *Fixons $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ et $\beta \in]0;2[$. L'opérateur $L_{-\beta} : \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ est injectif. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} \leq C\, \|L_{-\beta} v\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*}, \quad \forall v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}).$$

On dit alors que $L_{-\beta}$ est un monomorphisme.

Ce résultat est prouvé dans la Section 5.6. Notons L^*_β l'adjoint de l'opérateur L_β. Remarquons que $L^*_\beta = L_{-\beta}$. En effet, si $\Lambda(\kappa_\sigma) \cap \ell_\beta = \emptyset$, nous avons $\langle L^*_\beta u, v\rangle_{\mathcal{B}} = \langle L_\beta v, u\rangle_{\mathcal{B}} = (\sigma\nabla v, \nabla u)_{\mathcal{B}} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{B}} = \langle L_{-\beta} u, v\rangle_{\mathcal{B}}$ pour $(u,v) \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) \times \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. De plus, $\dim\operatorname{coker} L = \dim\ker L^*$ dès lors que $L : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un opérateur continu à image fermée entre deux espaces de Banach X et Y (cf. [116, théorème 2.13]). Puisque L_β est à image fermée quand $\Lambda(\kappa_\sigma) \cap \ell_\beta = \emptyset$, d'après le Lemme 5.3.2, on a

$$\dim\operatorname{coker} L_\beta = \dim\ker L_{-\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \beta \in]0;2[.$$

On dit alors que L_β est épimorphisme. Pour résumer, pour $0 < \beta < 2$, $L_{-\beta}$ est injectif et L_β est surjectif. De plus L_β n'est pas injectif, et donc $L_{-\beta}$ n'est pas surjectif : il est en effet possible de donner une expression explicite d'un élément non trivial de $\ker L_\beta$. Définissons

$$s(z,\theta) = -\sin(\eta_\sigma z)\varphi_{\mathrm{p}}(\theta) = \frac{1}{2i}\left[u^-_{\mathrm{p}}(z,\theta) - u^+_{\mathrm{p}}(z,\theta)\right]. \tag{5.15}$$

où $\varphi_{\mathrm{p}}, u^\pm_{\mathrm{p}}$ sont définis par la formule (5.10). L'élément s appartient à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ (notons que $s(0,\theta) = 0$ pour $\theta \in]0;\pi[$) et $L_\beta(s) = 0$.

Il existe une certaine hiérarchie entre $L_{-\beta}$ et L_β. On a en effet le diagramme suivant.

$$\begin{array}{rccc} L_{-\beta}: & \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) & \to & \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^* \\ & \cap & & \cap \\ L_\beta: & \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) & \to & \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^* \end{array}$$

On voit apparaître progressivement un cadre fonctionnel adapté pour le problème (5.5). L'espace de travail semble devoir contenir $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$ et être inclus dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$.

Précisons cela. Pour ce faire, considérons une fonction de troncature $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\zeta(z) = 1$ pour $z < -2$ et $\zeta(z) = 0$ pour $z > -1$. Définissons ensuite $s^\pm(z,\theta) = \zeta(z) u^\pm_{\mathrm{p}}(z,\theta)$ où $u^\pm_{\mathrm{p}}$ est donnée par (5.10). Pour $0 < \beta < 2$, introduisons l'espace

$$\mathscr{W}^+_\beta(\mathcal{B}) := \mathrm{vect}\{s^+\} \oplus \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) \tag{5.16}$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{\mathscr{W}^+_\beta(\mathcal{B})} := \left(\, |c|^2 + \|v_{-\beta}\|^2_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} \,\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad v = c\, s^+ + v_{-\beta}.$$

L'espace $(\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B}), \|\cdot\|_{\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})})$ est un espace de Banach qui vérifie $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) \subset \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B}) \subset \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ car $s^+ \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$. Nous pouvons bien entendu introduire $\mathscr{W}_\beta^-(\mathcal{B})$ de façon analogue. La forme $v \mapsto (\sigma\nabla s^\pm, \nabla v)_\mathcal{B}$ est bien définie sur $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$. Bien que $s^\pm$ appartienne à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) \setminus \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$, nous allons prolonger cette forme linéaire à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$, et même à $\mathrm{W}^1_\gamma(\mathcal{B})$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$. Présentons ce procédé d'extension pour s^+ (on procède de la même manière pour s^-). L'application de la formule de Green conduit à

$$\Big(\sigma\nabla s^+, \nabla v\Big)_\mathcal{B} = \Big(\sigma u_\mathrm{p}^+ \nabla\zeta, \nabla v\Big)_\mathcal{B} - \Big(\sigma\nabla u_\mathrm{p}^+, v\nabla\zeta\Big)_\mathcal{B}, \qquad \forall v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$$

car $\mathrm{div}(\sigma\nabla u_\mathrm{p}^+) = 0$ dans $\mathcal{B}$ par construction. Puisque $\mathrm{supp}(\nabla\zeta)$ est borné, il existe $C > 0$ telle que $|\,(\sigma\nabla s^+, \nabla v)_\mathcal{B}\,| \le C\|v\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})}$, pour tout v dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$. Par conséquent, par densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$, on peut étendre la forme linéaire $v \mapsto (\sigma\nabla s^\pm, \nabla v)_\mathcal{B}$ à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. Cette discussion montre qu'il existe un unique opérateur linéaire et continu $L_\beta^+ : \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ vérifiant

$$\langle L_\beta^+ u, v\rangle_\mathcal{B} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_\mathcal{B}, \quad \forall u \in \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B}), \quad \forall v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B}). \tag{5.17}$$

Nous allons prouver que cet opérateur est un isomorphisme. Démontrons d'abord un résultat intermédiaire donnant une expression explicite de c en fonction de $L_\beta^+ u$ lorsque $u = cs^+ + u_{-\beta} \in \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$.

Proposition 5.3.3 *Considérons $\beta \in]0;2[$ et s défini par (5.15). Pour tout $u = c\,s^+ + u_{-\beta} \in \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$, où $c \in \mathbb{C}$ et $u_{-\beta} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$, on a la formule suivante*

$$\langle L_\beta^+ u, s\rangle_\mathcal{B} = c\,\eta_\sigma \int_0^\pi \sigma(\theta)\,\varphi_\mathrm{p}(\theta)^2\,d\theta.$$

Preuve. Puisque $s \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$, $\langle L_\beta^+ u, s\rangle_\mathcal{B}$ est bien défini pour $u \in \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$. Introduisons une fonction de troncature $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, [0;1])$ telle que $\chi(z) = 1$ pour $z > -1$ et $\chi(z) = 0$ pour $z < -2$. Définissons χ_ρ telle que $\chi_\rho(z) = \chi(z/\rho)$. Remarquons que $\chi_\rho s \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$ pour $\rho > 0$. On a

$$\langle L_\beta^+ u, \chi_\rho s\rangle_\mathcal{B} = \big(\sigma\nabla u, \nabla(\chi_\rho s)\big)_\mathcal{B} = \big(s\nabla u - u\nabla s, \sigma\nabla\chi_\rho\big)_\mathcal{B} \tag{5.18}$$

car $(\sigma\nabla v, \nabla s)_\mathcal{B} = 0$ pour tout $v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$ (rappelons que $L_\beta s = 0$). Examinons l'expression ci-dessus pour $\rho \to +\infty$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on peut vérifier que $\|\chi_\rho s - s\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} \to 0$ pour $\rho \to +\infty$. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\lim_{\rho\to+\infty} \langle L_\beta^+ u, \chi_\rho s\rangle_\mathcal{B} = \langle L_\beta^+ u, s\rangle_\mathcal{B}. \tag{5.19}$$

À présent, étudions le comportement du membre de droite de (5.18) lorsque $\rho \to +\infty$. Puisque $u = cs^+ + u_{-\beta}$ avec $c \in \mathbb{C}$ et $u_{-\beta} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$, ce membre de droite contient deux contributions. La contribution associée à $u_{-\beta}$ vérifie

$$\begin{aligned}\Big|\big(s\nabla u_{-\beta} - u_{-\beta}\nabla s, \sigma\nabla\chi_\rho\big)_\mathcal{B}\Big| &\le \int_0^\pi \int_{-2\rho}^{-\rho} |\sigma\partial_z\chi_\rho|\,|s\nabla u_{-\beta} - u_{-\beta}\nabla s| dz\,d\theta \\ &\le \rho^{-1}\|\partial_z\chi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|u_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})}\|s\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} \underset{\rho\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il ne reste plus qu'à examiner la contribution associée à $c\,s^+$. En utilisant le fait que $\varphi_\mathrm{p}(\theta)$ est à valeurs réelles (cf. formule (5.10)), un calcul direct conduit à

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to+\infty} \big(s\nabla u - u\nabla s, \sigma\nabla\chi_\rho\big)_\mathcal{B} &= c \lim_{\rho\to+\infty} \big(s\nabla s^+ - s^+\nabla s, \sigma\nabla\chi_\rho\big)_\mathcal{B} \\ &= c \lim_{\rho\to+\infty} \int_{-2\rho}^{-\rho} \partial_z\chi_\rho \int_0^\pi \eta_\sigma\sigma\varphi_\mathrm{p}(\theta)^2 d\theta\,dz = c\,\eta_\sigma \int_0^\pi \sigma\varphi_\mathrm{p}(\theta)^2 d\theta.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Pour conclure, il suffit d'injecter (5.19) et (5.20) dans (5.18). ∎

Remarquons en particulier que le calcul (5.20) montre que $(s\nabla s^+ - s^+\nabla s, \sigma\nabla\chi_\rho)_{\mathcal{B}}$ est indépendant de ρ pour ρ suffisamment grand. Maintenant, nous prouvons qu'en choisissant $\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$ comme cadre fonctionnel pour (5.5), nous obtenons un problème bien posé.

Théorème 5.3.4 *Supposons $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ et $\beta \in]0;2[$. Alors l'opérateur continu $L_\beta^+ : \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})^*$ défini en (5.17) constitue un isomorphisme.*

Preuve. ◇ Injectivité. Considérons $u = cs^+ + w$ avec $w \in \mathrm{W}_{-\beta}^1(\mathcal{B})$ tel que $\langle L_\beta^+ u, v\rangle_{\mathcal{B}} = 0$ pour tout $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$. D'après la Proposition 5.3.3, on a alors nécessairement $c\,\eta_\sigma \int_0^\pi \sigma\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)^2 d\theta = 0$. Or le Lemme 5.3.6 indique que $\int_0^\pi \sigma\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)^2 d\theta$ est non nul pour $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$. Puisqu'on a $\eta_\sigma \neq 0$, on déduit $c = 0$. Par conséquent u appartient à $\mathrm{W}_{-\beta}^1(\mathcal{B})$ et vérifie $(\sigma\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{B}} = 0$ pour tout $v \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})$. Ceci se réécrit $L_{-\beta}u = 0$. Le Lemme 5.3.2 entraîne alors $u = 0$. Ceci montre que L_β^+ est injectif.
◇ Surjectivité. Pour conclure, il reste à prouver que L_β^+ est surjectif. Considérons $f \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})^* \subset \mathrm{W}_{-\beta}^1(\mathcal{B})^*$. Puisque L_β est surjectif, il existe $u_\beta \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})$ tel que $L_\beta u_\beta = f$. Mais comme $f \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})^*$, d'après le Théorème 5.6.6, on a la décomposition suivante

$$u_\beta = c^+ s^+ + c^- s^- + u_{-\beta} \qquad \text{où} \qquad c^\pm \in \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad u_{-\beta} \in \mathrm{W}_{-\beta}^1(\mathcal{B}).$$

Maintenant, introduisons $u = u_\beta - 2ic^- s$ avec s défini en (5.15). Puisque $s \in \ker L_\beta$, on a $L_\beta u = L_\beta u_\beta = f$. De plus, $u = c^+ s^+ + [u_{-\beta} + c^-(\zeta - 1)(u_{\mathrm{p}}^+ + u_{\mathrm{p}}^-)]$ appartient à $\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$ de sorte que $L_\beta^+ u = f$. Ainsi L_β^+ est bien surjectif. ■

Remarquons que nous aurions pu mener le même raisonnement en remplaçant « + » par « - ». En effet, considérons l'espace $\mathscr{W}_\beta^-(\mathcal{B}) = \mathrm{vect}\{s^-\} \oplus \mathrm{W}_{-\beta}^1(\mathcal{B})$ pour $0 < \beta < 2$. En suivant la preuve précédente, on montre que, pour tout $f \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{B})^*$, il existe un unique $u \in \mathscr{W}_\beta^-(\mathcal{B})$ tel que $(\sigma\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{B}} = \langle f, v\rangle_{\mathcal{B}}$ pour tout $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B})$.

Remarque 5.3.5 *Pour $\beta \in]0;2[$, en utilisant le Théorème 5.3.4 et le Théorème 5.6.6, on peut montrer que* $\dim\ker L_\beta = \dim\operatorname{coker} L_{-\beta} = 1$. *Ceci implique* $\operatorname{ind} L_\beta = -\operatorname{ind} L_{-\beta} = 1$.

Avant de poursuivre, présentons ici le calcul concernant le terme $\int_0^\pi \sigma(\theta)\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)^2 d\theta$.

Lemme 5.3.6 *Considérons la fonction $\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)$ définie par la formule (5.10). Pour $\sigma_2/\sigma_1 \in]-1;-1/3[$, on a $\int_0^\pi \sigma(\theta)\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)^2 d\theta \neq 0$.*

Remarque 5.3.7 *Ici, on voit ressurgir la difficulté du changement de signe. Habituellement, i.e. lorsque σ est positif, ce résultat est direct. Pour le problème que nous considérons, il faut effectuer le calcul.*

Preuve. Rappelons que $\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)$ défini par la formule (5.10) dépend du paramètre η_σ et que η_σ parcourt $]0;+\infty[$ lorsque σ_2/σ_1 varie dans $]-1;-1/3[$. Pour simplifier la présentation, η_σ est noté η dans cette preuve. Définissons

$$I_1(\eta) := \int_{\pi/4}^{\pi} |\varphi_{\mathrm{p}}|^2 d\theta \qquad \text{et} \qquad I_2(\eta) := \int_0^{\pi/4} |\varphi_{\mathrm{p}}|^2 d\theta.$$

Nous allons prouver que $\sigma_1 I_1(\eta) + \sigma_2 I_2(\eta) > 0$ pour tout $\eta \in]0;+\infty[$. Observons que $\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2 = \sigma_1(I_1 + \kappa_\sigma I_2) > \sigma_1(I_1 - I_2)$. Étudions donc la fonction $\eta \mapsto I_1(\eta) - I_2(\eta)$. Un calcul explicite utilisant la formule (5.10) donne

$$I_1(\eta) = \frac{\sinh 3\eta\pi/2 - 3\eta\pi/2}{2\eta(\cosh 3\eta\pi/2 - 1)} \qquad \text{et} \qquad I_2(\eta) = \frac{\sinh \eta\pi/2 - \eta\pi/2}{2\eta(\cosh \eta\pi/2 - 1)}.$$

Définissons $g(x) := (\sinh x - x)/(\cosh x - 1)$. On a $2\eta(I_1(\eta) - I_2(\eta)) = g(3\eta\pi/2) - g(\eta\pi/2)$. Il suffit donc de prouver que g est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$. On calcule $g'(x) = (2 - 2\cosh x + x\sinh x)/(\cosh x - 1)^2$. Définissons $g_a(x) = 2 - 2\cosh x + x\sinh x$. On trouve $g_a'(x) = -\sinh x + x\cosh x$ et $g_a''(x) = x\sinh x$. On déduit, successivement, $g_a' > 0$ et $g' > 0$. Ainsi g est bien une fonction croissante sur $]0;+\infty[$. ■

5.4 Principe d'absorption limite

Dans la section précédente, nous avons introduit deux espaces différents, à savoir $\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$ et $\mathscr{W}_\beta^-(\mathcal{B})$, et nous avons montré que pour tout $f \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$, il existe exactement un $u^+ \in \mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$ et un $u^- \in \mathscr{W}_\beta^-(\mathcal{B})$ tels que

$$(\sigma \nabla u^\pm, \nabla v)_{\mathcal{B}} = \langle f, v\rangle_{\mathcal{B}}, \qquad \forall v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{B}). \tag{5.21}$$

Toute fonction $\alpha\, u^+ + (1-\alpha)\, u^-$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, est également solution de (5.21). Parmi toutes ces solutions possibles, laquelle est « la plus physique » ? Pour fournir une réponse à cette question, procédons comme indiqué dans la Remarque 5.2.3 et utilisons le principe d'absorption limite. Fixons $f \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ et considérons le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\gamma \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{B}) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}(\sigma^\gamma \nabla u^\gamma) = f \quad \text{dans } \mathcal{B}, \end{array} \right. \tag{5.22}$$

où $\sigma^\gamma := \sigma + i\gamma|\sigma|$ avec $\gamma > 0$. L'écriture (5.22) doit être considérée au sens de $\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{B})$. Ce problème est bien posé car la forme sesquilinéaire associée est coercive (cf. Chapitre 4). Nous noterons $u^\gamma \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{B})$ l'unique solution . La principe d'absorption limite consiste à choisir la solution physique de (5.5) comme la limite de u^γ lorsque $\gamma \to 0^+$. Dans notre configuration, nous allons montrer que $u^\gamma \to u^+$ dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ pour $\beta \in]0;2[$. Nous aurons alors justifié que $\mathscr{W}_\beta^+(\mathcal{B})$ constitue *le* cadre fonctionnel adapté à notre problème.

Remarque 5.4.1 *Ici, nous avons choisi un signe « + » devant « $i\gamma$ » correspondant à un milieu absorbant en régime temporel. La justification d'un tel choix n'est pas simple mais semble être en accord avec les modèles choisis dans la littérature physique comme nous l'avons observé dans le §4.2 du Chapitre 4. Notre analyse serait également valide avec un signe « - », conduisant alors à considérer u^- comme solution sortante.*

Analyse modale pour le problème dissipatif

Commençons par quelques observations concernant l'analyse modale du problème (5.22). Comme nous l'avons indiqué dans la Remarque 5.2.1, les valeurs propres du symbole associé à (5.22) peuvent se calculer à l'aide de la formule (5.9). Ceci prouve en particulier qu'il existe une valeur propre $i\eta_{\sigma,\gamma} \in \mathbb{C}$ telle que $\eta_{\sigma,\gamma} \to \eta_\sigma$ lorsque $\gamma \to 0^+$. Par continuité, pour $\beta \in]0;2[$, il existe $\gamma_0 > 0$ tel que, pour $\gamma < \gamma_0$, $+i\eta_{\sigma,\gamma}$ et $-i\eta_{\sigma,\gamma}$ sont les seules valeurs propres du problème (5.22) situées dans la bande $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta < \Re e\, \lambda < +\beta\}$. Montrons que $\Im m\, \eta_{\sigma,\gamma} < 0$, au moins pour γ suffisamment petit. Notons $\rho_\gamma = \rho(\kappa_{\sigma^\gamma})$. En utilisant l'expression de ρ_γ fournie par (5.8), on trouve

$$\rho_\gamma = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1(1+i\gamma) - \sigma_2(1-i\gamma)}{\sigma_1(1+i\gamma) + \sigma_2(1-i\gamma)} = \frac{1}{2}\frac{(1-\kappa_\sigma) + i\gamma(1+\kappa_\sigma)}{(1+\kappa_\sigma) + i\gamma(1-\kappa_\sigma)}.$$

D'après (5.8), on a $\cosh(\eta_{\sigma,\gamma}\pi/2) = \rho_\gamma$. Notons $\eta'_{\sigma,\gamma} = \partial_\gamma \eta_{\sigma,\gamma}$. En dérivant par rapport à γ en 0, on obtient

$$\eta'_{\sigma,0}\, \frac{\pi}{2}\, \sinh\left(\frac{\eta_\sigma \pi}{2}\right) = \frac{2i\kappa_\sigma}{(1+\kappa_\sigma)^2}.$$

Puisque $\eta_\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, on déduit $\Im m\, \eta'_{\sigma,0} < 0$ et donc $\Im m\, \eta_{\sigma,\gamma} < 0$ pour γ assez petit (car $\Im m\, \eta_{\sigma,0} = 0$). Par conséquent, $i\eta_{\sigma,\gamma}$ est la seule valeur propre du problème (5.22) située dans la bande $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re e\, \lambda < \beta\}$. La Figure 5.4 présente le comportement de $\pm i\eta_{\sigma,\gamma}$ lorsque $\gamma \to 0^+$.

Dans la suite, nous noterons $u^+_{\mathrm{p},\gamma}(z,\theta)$ (resp. $u^-_{\mathrm{p},\gamma}$) le mode associé à $i\eta_{\sigma,\gamma}$ (resp. $-i\eta_{\sigma,\gamma}$). L'expression explicite de $u^\pm_{\mathrm{p},\gamma}$ est donnée par la formule (5.10), en remplaçant η_σ par $\eta_{\sigma,\gamma}$. Définissons $s^\pm_\gamma(\theta, z) =$

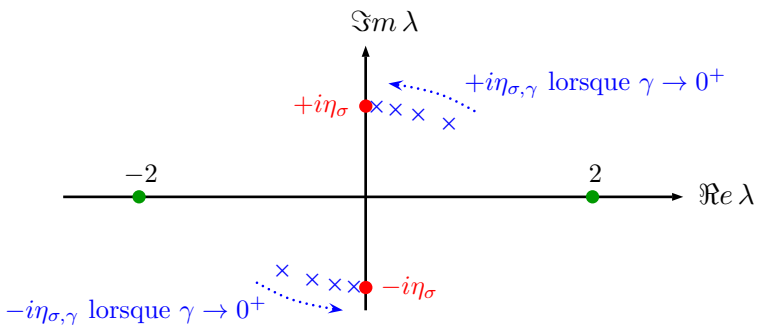


FIGURE 5.4 – Évolution des valeurs propres du symbole au voisinage de l'axe imaginaire lorsque la dissipation tend vers 0. Le contraste est fixé dans l'intervalle critique $]-1;-1/3[$.

$\zeta(z)\, u^{\pm}_{\mathrm{p},\gamma}(z,\theta)$ où ζ est la fonction de troncature utilisée dans la définition de $s^{\pm}$. À l'aide du théorème de convergence dominée, on peut vérifier que

$$\lim_{\gamma\to 0^+} \|s^-_\gamma - s^-\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\gamma\to 0^+} \|s^+_\gamma - s^+\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} = 0. \tag{5.23}$$

Revenons à $u^\gamma \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{B})$, l'unique solution du problème (5.22). D'après le théorème 5.4.1 de [102], que nous pouvons utiliser pour étudier ce problème fortement elliptique, pour $0 < \gamma < \gamma_0$, la fonction u^γ admet la décomposition suivante

$$u^\gamma = c^\gamma\, s^+_\gamma + u^\gamma_{-\beta} \qquad \text{où } c^\gamma \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad u^\gamma_{-\beta} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}).$$

Pour prouver que u^γ converge vers $u^+ \in \mathscr{W}^+_\beta(\mathcal{B})$, où u^+ est définie en (5.21), nous allons successivement montrer la convergence de la suite des coefficients de singularité c^γ et la convergence de la suite des composantes évanescentes $u^\gamma_{-\beta}$.

Convergence de la suite des coefficients de singularité

Prouvons d'abord que $c^\gamma \to c^+$ lorsque $\gamma \to 0^+$, où $c^+ \in \mathbb{C}$ est tel que $u^+ = c^+ s^+ + u_{-\beta}$ avec $u_{-\beta} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$. Nous fournissons ici une expression plus explicite de c^γ.

Proposition 5.4.2 *Soient $\beta \in]0;2[$ et $0 < \gamma < \gamma_0$. Définissons $s_\gamma(z,\theta) = -sin(\eta_{\sigma,\gamma} z)\, \varphi_{\mathrm{p},\gamma}(\theta)$. Considérons $u^\gamma = c^\gamma s^+_\gamma + u^\gamma_{-\beta}$ l'unique solution de (5.22). Alors on*

$$\langle f, s_\gamma\rangle_{\mathcal{B}} = c^\gamma \eta_{\sigma,\gamma} \int_0^\pi \sigma^\gamma \varphi_{\mathrm{p},\gamma}(\theta)^2 d\theta.$$

La preuve est très similaire à celle de la Proposition 5.3.3 et à celle du théorème 5.4.3 de [102]. Elle est donc laissée au lecteur. En utilisant (5.23), on vérifie que $\|s_\gamma - s\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} \to 0$ lorsque $\gamma \to 0^+$. De plus, nous avons

$$\lim_{\gamma\to 0^+} \eta_{\sigma,\gamma} \int_0^\pi \sigma^\gamma \varphi_{\mathrm{p},\gamma}(\theta)^2 d\theta = \eta_\sigma \int_0^\pi \sigma \varphi_{\mathrm{p}}(\theta)^2 d\theta.$$

Ceci montre en particulier que pour γ suffisamment petit, on a $\eta_{\sigma,\gamma} \int_0^\pi \sigma^\gamma \varphi^2_{\mathrm{p},\gamma} d\theta \neq 0$ (utiliser le Lemme 5.3.6). En appliquant les Propositions 5.3.3 et 5.4.2, on obtient alors

$$|c^+ - c^\gamma| = \Big| \frac{\langle f, s_\gamma\rangle_{\mathcal{B}}}{\eta_{\sigma,\gamma} \int_0^\pi \sigma^\gamma \varphi^2_{\mathrm{p},\gamma} d\theta} - \frac{\langle f, s\rangle_{\mathcal{B}}}{\eta_\sigma \int_0^\pi \sigma \varphi^2_{\mathrm{p}} d\theta} \Big| \underset{\gamma\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \tag{5.24}$$

Convergence de la suite des composantes évanescentes

Maintenant, prouvons que la suite $(u^\gamma_{-\beta})_\gamma$ converge vers $u_{-\beta}$. Tout d'abord, rappelons que $\mathrm{div}(\sigma\nabla s^+)$ et $\mathrm{div}(\sigma^\gamma\nabla s^+_\gamma)$ sont tous deux à support compact car, par construction, $\mathrm{div}(\sigma\nabla u^+_{\mathrm{p}}) = \mathrm{div}(\sigma^\gamma\nabla u^+_{\mathrm{p},\gamma}) = 0$ dans $\mathcal{B}$. Puisque $u^+ = c^+s^+ + u_{-\beta}$ est solution de (5.21) et $u^\gamma = c^\gamma s^+_\gamma + u^\gamma_{-\beta}$ est solution de (5.22), pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{B})$, on a

$$\begin{aligned}\left|(\sigma\nabla(u_{-\beta} - u^\gamma_{-\beta}), \nabla v)_{\mathcal{B}}\right| &\leq \left|\left(c^\gamma\sigma^\gamma\nabla s^+_\gamma - c^+\sigma\nabla s^+, \nabla v\right)_{\mathcal{B}}\right| + \left|\left((\sigma-\sigma^\gamma)\nabla u^\gamma_{-\beta}, \nabla v\right)_{\mathcal{B}}\right| \\ &\leq \Big[\, |c^\gamma|\|\mathrm{div}(\sigma\nabla s^+) - \mathrm{div}(\sigma^\gamma\nabla s^+_\gamma)\|_{\mathcal{B}} + |c^+ - c^\gamma|\|\mathrm{div}(\sigma\nabla s^+)\|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + |\sigma - \sigma^\gamma|\, \|u^\gamma_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} \Big]\, \|v\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})}.\end{aligned}$$

Mais comme $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{B})$ est dense dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$, d'après la définition de $L_{-\beta}$, l'estimation précédente montre que

$$\|L_{-\beta}(u_{-\beta} - u^\gamma_{-\beta})\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*} \leq \epsilon(\gamma)\left(1 + \|u^\gamma_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})}\right),$$

où $\epsilon(\gamma)$ tend vers 0 lorsque $\gamma \to 0^+$ (utiliser (5.24) et remarquer que $\|\mathrm{div}(\sigma\nabla s^+) - \mathrm{div}(\sigma^\gamma\nabla s^+_\gamma)\|_{\mathcal{B}} \to 0$ lorsque $\gamma \to 0^+$). D'après le Lemme 5.3.2, puisque $L_{-\beta}$ est u monomorphisme, il existe une constante $C > 0$ indépendante de γ telle que

$$\|u_{-\beta} - u^\gamma_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} \leq C\,\epsilon(\gamma)\left(1 + \|u^\gamma_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})}\right), \qquad \forall\gamma \in]0, \gamma_0[.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient finalement

$$\lim_{\gamma\to 0^+} \|u^\gamma_{-\beta} - u_{-\beta}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} = 0. \tag{5.25}$$

Résultat de convergence final

Finalement, en rassemblant (5.23), (5.24) et (5.25), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.4.3 *Pour $\beta \in]0; 2[$, on a*

$$\lim_{\gamma\to 0^+} \|u^\gamma - u^+\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} = 0 \tag{5.26}$$

où u^γ est la solution du problème (5.22) et $u^+ \in \mathscr{W}^+_\beta(\mathcal{B})$ celle du problème (5.21).

Ainsi, la solution du problème (5.22) pour un milieu légèrement dissipatif est proche de u^+. Par conséquent, d'un point de vue physique, nous pouvons conclure que la solution u^+ a plus de sens que u^-.

5.5 Caractère bien posé du problème dans la géométrie initiale

Dans cette section, nous revenons au problème initial (5.1) posé dans le domaine Ω. Nous nous intéressons toujours au cas d'un contraste κ_σ situé dans l'intervalle critique $]-1; -1/3[$. Les résultats que nous avons établis dans les Sections 5.3 et 5.4 pour le problème posé dans la demi-bande $\mathcal{B}$ vont nous aider à déterminer un cadre fonctionnel adapté à ce problème. Commençons par les réécrire dans le domaine ω de la Figure 5.2 à droite. Pour cela, il suffit de faire le changement de variable inverse $r = \exp z$. Définissons l'espace $\mathrm{V}^1_\beta(\omega)$ comme la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\omega)$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\omega)} := \left(\| r^\beta\nabla v \|^2_\omega + \| r^{\beta-1}v \|^2_\omega\right)^{1/2}. \tag{5.27}$$

On peut vérifier que $u = u(r,\theta)$ appartient à $\mathrm{V}^1_\beta(\omega)$ si et seulement si $\widetilde{u}(z,\theta) = u(e^z,\theta)$ appartient à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. Introduisons $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},[0;1])$ une fonction de troncature telle que $\zeta(r) = 1$ pour $r < 1/3$ et $\zeta(r) = 0$ pour $r > 1/2$. À l'instar de ce qui est fait en (5.16), pour $0 < \beta < 2$, définissons l'espace

$$\mathscr{V}^+_\beta(\omega) := \mathrm{vect}\{r^{i\eta_\sigma}\varphi_p(\theta)\zeta(r)\} \oplus \mathrm{V}^1_{-\beta}(\omega) \tag{5.28}$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{\mathscr{V}^+_\beta(\omega)} := \left(|c|^2 + \|v_{-\beta}\|^2_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\omega)} \right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad v = c\, r^{i\eta_\sigma}\varphi_p(\theta)\zeta(r) + v_{-\beta}.$$

Dans ce cadre fonctionnel, nous introduisons l'opérateur associé à l'équation (5.4). De la même manière que pour L^+_β, nous définissons $\mathcal{A}^+_\beta : \mathscr{V}^+_\beta(\omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\omega)^*$ comme l'unique opérateur linéaire continu vérifiant

$$\langle \mathcal{A}^+_\beta u, v\rangle_\omega = (\sigma\nabla u, \nabla v)_\omega, \quad \forall u \in \mathscr{V}^+_\beta(\omega), \ \ \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\omega). \tag{5.29}$$

En adaptant la preuve du Théorème 5.3.4 dans les coordonnées (r,θ), on obtient le résultat suivant :

Proposition 5.5.1 *Supposons $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ et $\beta \in]0;2[$. Alors l'opérateur continu $\mathcal{A}^+_\beta : \mathscr{V}^+_\beta(\omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\omega)^*$ défini par (5.29) constitue un isomorphisme.*

Pour un domaine quelconque Ω, on ne peut établir un résultat analogue à la Proposition 5.5.1 car des modes piégés peuvent apparaître. Nous pouvons par contre démontrer une version un peu plus faible en autorisant un noyau et un conoyau de même dimension finie. Notons $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)}$ définie par (5.27) où ω est remplacé par Ω. Définissons $\mathscr{V}^+_\beta(\Omega)$ comme en (5.28) en substituant Ω à ω. Redéfinissons les fonctions $s^\pm(r,\theta) = r^{\pm i\eta_\sigma}\varphi_p(\theta)\zeta(r)$ (le support de la fonction de troncature ζ est choisi suffisamment petit de sorte que $s^\pm = 0$ sur $\partial\Omega$). Définissons enfin $A^+_\beta : \mathscr{V}^+_\beta(\Omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ l'unique opérateur linéaire continu vérifiant

$$\langle A^+_\beta u, v\rangle_\Omega = (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \forall u \in \mathscr{V}^+_\beta(\Omega), \ \ \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega).$$

Le résultat principal de ce chapitre s'énonce ainsi :

Théorème 5.5.2 *Supposons $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ et $\beta \in]0;2[$. Alors A^+_β est un opérateur de type Fredholm et* $\operatorname{ind} A^+_\beta = 0$.

Preuve. Nous divisons la preuve en deux étapes.

Étape 1 : l'opérateur A^+_β est de type Fredholm. Nous procédons comme dans la preuve du théorème 1.2 de [119, chapitre 4, §1]. Commençons par introduire quelques notations. Définissons les ouverts $\omega_a = \Omega \cap B(O,d_a)$ et $\omega_b = \Omega\backslash\overline{B(O,d_b)}$ où d_a, d_b sont choisis de sorte que $0 < d_b < d_a$ et $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < d_a \ , \ 0 < \theta < \pi\} \subset \Omega$. Pour $\nu = a, b$, considérons ζ_ν et ψ_ν des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (à support dans $\overline{\Omega}$) vérifiant

$$(\Omega \cap \mathrm{supp}\ \zeta_\nu) \subset (\Omega \cap \mathrm{supp}\ \psi_\nu) \subset \omega_\nu, \quad \zeta_\nu\psi_\nu = \zeta_\nu, \quad \zeta_a + \zeta_b = 1 \text{ dans } \Omega.$$

Nous faisons aussi l'hypothèse que $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi_\nu = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\zeta_\nu = 0$ sur Σ, où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité normal à Σ dirigé de Ω_1 vers Ω_2. Introduisons $\mathcal{A}_a : \mathscr{V}^+_\beta(\omega_a) \to \mathrm{V}^1_\beta(\omega_a)^*$ l'unique opérateur linéaire continu vérifiant $\langle \mathcal{A}_a u, v\rangle_{\omega_a} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\omega_a}$ pour tout $u \in \mathscr{V}^+_\beta(\omega_a)$ et tout $v \in \mathscr{C}^\infty_0(\omega_a)$. D'après la Proposition 5.5.1, $\mathcal{A}_a$ est un isomorphisme. Introduisons également l'opérateur linéaire continu $\mathcal{A}_b : \mathrm{H}^1_0(\omega_b) \to \mathrm{H}^{-1}(\omega_b)$ tel que $\langle \mathcal{A}_b u, v\rangle_{\omega_b} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\omega_b} + i\,(u,v)_{\omega_b}$ pour tout $u, v \in \mathrm{H}^1_0(\omega_b)$. Le Théorème 1.4.2 du Chapitre 1 indique que $\mathcal{A}_b$ définit un opérateur Fredholm d'indice zéro. Puisque $\mathcal{A}_b$ est injectif (prendre la partie imaginaire de $\langle \mathcal{A}_b u, \overline{u}\rangle_{\omega_b}$ pour $u \in \ker \mathcal{A}_b$), on déduit que $\mathcal{A}_b$ est

un isomorphisme.

Prouvons l'estimation *a priori* :

$$\|u\|_{\mathscr{V}_\beta^+(\Omega)} \leq C\,(\|A_\beta^+ u\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*} + \|\psi_b u\|_\Omega), \quad \forall u \in \mathscr{V}_\beta^+(\Omega). \tag{5.30}$$

Pour $u \in \mathscr{V}_\beta^+(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathscr{V}_\beta^+(\Omega)} &\leq C\,(\|\zeta_a u\|_{\mathscr{V}_\beta^+(\omega_a)} + \|\zeta_b u\|_{\mathrm{H}_0^1(\omega_b)}) \\
&\leq C\,(\|\mathcal{A}_a(\zeta_a u)\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\omega_a)^*} + \|\mathcal{A}_b(\zeta_b u)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\omega_b)}) \\
&\leq C\,(\|\psi_a A_\beta^+ u\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*} + \|\psi_b A_\beta^+ u\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*} + \|\psi_b u\|_\Omega) \\
&\leq C\,(\|A_\beta^+ u\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*} + \|\psi_b u\|_\Omega).
\end{aligned}$$

Puisque l'application $u \mapsto \psi_b u$ de $\mathscr{V}_\beta^+(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte (rappelons que ψ_b s'annule dans un voisinage de O), on déduit de (5.30) et du Lemme 5.5.4 ci-après que $\operatorname{im} A_\beta^+$ est fermée et que $\ker A_\beta^+$ est de dimension finie.

Maintenant, construisons une paramétrix à droite, *i.e.* un opérateur R tel que $A_\beta^+ R - \mathrm{Id}$ soit un opérateur compact de $\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$. D'après le Théorème 3.3.3 du Chapitre 3, ceci prouvera que $\operatorname{coker} A_\beta^+$ est de dimension finie. Définissons l'opérateur

$$R := \zeta_a \mathcal{A}_a^{-1} \psi_a + \zeta_b \mathcal{A}_b^{-1} \psi_b.$$

Pour tout $f \in \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$, on obtient

$$\begin{aligned}
A_\beta^+ R f &= A_\beta^+ \zeta_a \mathcal{A}_a^{-1} \psi_a f + A_\beta^+ \zeta_b \mathcal{A}_b^{-1} \psi_b f \\
&= \zeta_a f + \zeta_b f + [A_\beta^+, \zeta_a] \mathcal{A}_a^{-1} \psi_a f + [A_\beta^+, \zeta_b] \mathcal{A}_b^{-1} \psi_b f,
\end{aligned}$$

où $[A_\beta^+, \zeta_\nu] = A_\beta^+ \zeta_\nu - \zeta_\nu A_\beta^+$ pour $\nu = a, b$. En utilisant $\partial_{\boldsymbol{n}} \psi_\nu = \partial_{\boldsymbol{n}} \zeta_\nu = 0$ sur Σ, on montre que $[A_\beta^+, \zeta_\nu]$ est compact en tant qu'opérateur de $\mathscr{V}_\beta^+(\Omega)$ dans $\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$. Ainsi, R est bien une paramétrix à droite et $\operatorname{coker} A_\beta^+$ est de dimension finie.

Étape 2 : L'indice de A_β^+ est égal à zéro. Par définition, on a $\operatorname{ind} A_\beta^+ = \dim \ker A_\beta^+ - \dim \operatorname{coker} A_\beta^+$. Introduisons $A_\beta : \mathrm{V}_\beta^1(\Omega) \to \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)^*$ et $A_{-\beta} : \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega) \to \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$ les deux opérateurs linéaires et continus tels que

$$\begin{aligned}
\langle A_\beta u, v \rangle_\Omega &= (\,\sigma \nabla u, \nabla v\,)_\Omega\,, \qquad \forall (u,v) \in \mathrm{V}_\beta^1(\Omega) \times \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)\ ; \\
\langle A_{-\beta} u, v \rangle_\Omega &= (\,\sigma \nabla u, \nabla v\,)_\Omega\,, \qquad \forall (u,v) \in \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega) \times \mathrm{V}_\beta^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Notre objectif est de prouver que $\dim \ker A_\beta^+ = \dim \ker A_{-\beta}$ et $\dim \operatorname{coker} A_\beta^+ = \dim \operatorname{coker} A_\beta$. Puisque $A_\beta^* = A_{-\beta}$, nous pourrons alors conclure. Pour commencer, remarquons que $\ker A_{-\beta} \subset \ker A_\beta^+ \subset \ker A_\beta$.

i) Considérons $u = cs^+ + u_{-\beta}$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $u_{-\beta} \in \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$, un élément de $\ker A_\beta^+$. On a $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$ p.p. dans Ω. En multipliant par $\overline{u}$, en intégrant par parties sur $\Omega \backslash \overline{B}(O, \delta)$ et en prenant la limite de la partie imaginaire lorsque δ tend vers zéro (utiliser les idées de la preuve de la Proposition 5.3.3), on trouve $c = 0$. Par conséquent, $\ker A_\beta^+ = \ker A_{-\beta}$.

ii) Montrons ensuite que $\ker A_{-\beta} \neq \ker A_\beta$. En procédant par l'absurde, supposons temporairement que $\ker A_{-\beta} = \ker A_\beta$. Introduisons F et G deux espaces vectoriels de dimension finie tels que

$$\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^* = \operatorname{im} A_{-\beta} \oplus \mathrm{F}; \tag{5.31}$$

$$\mathrm{F} = (\mathrm{F} \cap \operatorname{im} A_\beta) \oplus \mathrm{G}. \tag{5.32}$$

D'après le Lemme 5.5.3, prouvé plus loin, nous avons $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^* = \operatorname{im} A_\beta + \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$. Par conséquent, nous pouvons écrire $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^* = \operatorname{im} A_\beta \oplus \mathrm{G}$. Puisque $A_{-\beta}$ est l'adjoint de A_β, on a $\dim \mathrm{F} = \dim \operatorname{coker} A_{-\beta} = \dim \ker A_\beta$ et $\dim \mathrm{G} = \dim \operatorname{coker} A_\beta = \dim \ker A_{-\beta}$. Ainsi, notre hypothèse conduit à $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$ ce qui implique $\mathrm{F} \cap \operatorname{im} A_\beta = \{0\}$ d'après (5.32). Maintenant, rappelons que $A_\beta s^+ \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$. En vertu de la décomposition (5.31), il existe $u_{-\beta} \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$ et $w \in \mathrm{F}$ tels que $A_\beta s^+ = A_{-\beta} u_{-\beta} + w$. Mais clairement $w \in \mathrm{F} \cap \operatorname{im} A_\beta$ donc $w = 0$ et $s^+ - u_{-\beta} \in \ker A_\beta = \ker A_{-\beta}$. Ceci est absurde car $s^+ - u_{-\beta} \notin \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. Ainsi, $\ker A_{-\beta} \not\supset \ker A_\beta$.

iii) Considérons $u_\star \in \ker A_\beta$ tel que $u_\star \notin \ker A_{-\beta}$. Le Théorème 5.6.6 indique que $u_\star$ admet la représentation $u_\star = c^+_\star s^+ + c^-_\star s^- + u_{\star,-\beta}$ avec $u_{\star,-\beta} \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. Puisque $u_\star \notin \ker A_{-\beta}$, on a alors $|c^+_\star| + |c^-_\star| \neq 0$. Par ailleurs, en travaillant comme en *i)*, on montre que $c^+_\star$ et $c^-_\star$ sont tous les deux non triviaux. Autrement dit, les éléments de $\ker A_\beta \setminus \ker A_{-\beta}$ se décomposent nécessairement sur les deux singularités propagatives.

iv) Établissons enfin $\dim \operatorname{coker} A^+_\beta = \dim \operatorname{coker} A_\beta$, ce qui terminera la preuve. Comme en *ii)*, introduisons $\tilde{\mathrm{F}}$, $\tilde{\mathrm{G}}$ deux espaces vectoriels de dimension finie tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^* &= \operatorname{im} A^+_\beta \oplus \tilde{\mathrm{F}}; \\ \tilde{\mathrm{F}} &= (\tilde{\mathrm{F}} \cap \operatorname{im} A_\beta) \oplus \tilde{\mathrm{G}}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

De nouveau, on a $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^* = \operatorname{im} A_\beta \oplus \tilde{\mathrm{G}}$, $\dim \tilde{\mathrm{F}} = \dim \operatorname{coker} A^+_\beta$ et $\dim \tilde{\mathrm{G}} = \dim \operatorname{coker} A_\beta$. Prouvons que $\tilde{\mathrm{F}} = \tilde{\mathrm{G}}$. D'après (5.33), ceci est équivalent à $\tilde{\mathrm{F}} \cap \operatorname{im} A_\beta = \{0\}$. Considérons donc f un élément de $\tilde{\mathrm{F}} \cap \operatorname{im} A_\beta$. Il existe $u \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$ tel que $f = A_\beta u$. En utilisant le Théorème 5.6.6, on trouve pour u la représentation $u = c^+ s^+ + c^- s^- + u_{-\beta}$ avec $u_{-\beta} \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. Maintenant, en remarquant que $u - c^- u_\star / c^-_\star$ constitue un élément de $\mathscr{V}^+_\beta(\Omega)$ tel que $A^+_\beta\,(u - c^- u_\star/c^-_\star) = f$, on déduit que $f \in \tilde{\mathrm{F}} \cap \operatorname{im} A^+_\beta$. Puisque $\tilde{\mathrm{F}} \cap \operatorname{im} A^+_\beta = \{0\}$, nous obtenons $f = 0$. Ainsi, l'on a bien $\tilde{\mathrm{F}} = \tilde{\mathrm{G}}$ et donc $\dim \operatorname{coker} A^+_\beta = \dim \operatorname{coker} A_\beta$. ■

Dans la preuve du théorème précédent, nous avons eu besoin du lemme suivant.

Lemme 5.5.3 *On a la décomposition* $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^* = \operatorname{im} A_\beta + \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$.

Preuve. Considérons $f \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^*$. Reprenons ψ_a et ω_a comme dans la preuve du Théorème 5.5.2 ci-dessus. La fonction $\psi_a f$ appartient à $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\omega_a)^*$. Introduisons $\mathcal{A}_{a\,\beta} : \mathrm{V}^1_\beta(\omega_a) \to \mathrm{V}^1_{-\beta}(\omega_a)^*$ l'unique opérateur linéaire continu tel que $\langle \mathcal{A}_{a\,\beta} u, v\rangle_{\omega_a} = (\sigma \nabla u, \nabla v)_{\omega_a}$ pour tout $u \in \mathrm{V}^1_\beta(\omega_a)$ et tout $v \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\omega_a)$. D'après la discussion suivant le Lemme 5.3.2, nous savons que $\mathcal{A}_{a\,\beta}$ est surjectif (c'est un épimorphisme). Par conséquent, il existe $u \in \mathrm{V}^1_\beta(\omega_a)$ tel que $\mathcal{A}_{a\,\beta} u = \psi_a f$. On conclut alors en remarquant que la fonction $A_\beta(\zeta_a u) \in \operatorname{im} A_\beta$ est telle que $f - A_\beta(\zeta_a u) \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$. ■

Dans la preuve du Théorème 5.5.2, nous nous sommes également servis d'une version légèrement affaiblie du lemme de Peetre (cf. Lemme 1.3.5 dans le Chapitre 1). On trouvera une démonstration de ce résultat dans [147].

Lemme 5.5.4 *Soient* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_\mathrm{X}), (\mathrm{Y}, \|\cdot\|_\mathrm{Y})$ *et* $(\mathrm{Z}, \|\cdot\|_\mathrm{Z})$ *trois espaces de Banach réflexifs. Soit* $K : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *un opérateur compact et* $B : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un opérateur borné. Supposons qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|x\|_\mathrm{X} \leq C(\,\|Bx\|_\mathrm{Y} + \|Kx\|_\mathrm{Z}\,), \quad \forall x \in \mathrm{X}.$$

Alors $\dim \ker B < \infty$ *et* $\operatorname{im} B$ *est fermée dans* Y.

Remarque 5.5.5 *Jusqu'à présent, nous avons considéré un problème statique. Mais, comme indiqué dans la Section 5.1, une analyse similaire peut être menée pour étudier le problème en régime harmonique avec une pulsation $\omega_0 > 0$. À l'instar de ce qui est fait dans [125], revenons en régime temporel. Le résultat du Théorème 5.5.2 conduit à considérer une solution en temps long qui se comporte en*

$$e^{i(\eta_\sigma \ln r - \omega_0 t)}\varphi_p(\theta)$$

au voisinage de l'origine. On peut noter deux propriétés étonnantes.
1) Cette onde sortante semble provenir de l'origine, c'est-à-dire de l'infini dans la bande. Ceci est dû à la présence du métamatériau, dans lequel les vitesses de phase et de groupe sont de signe opposé [148]. Bien entendu, ceci est également lié au choix dans la modélisation de la dissipation dans §5.4 (voir la Remarque 5.4.1).
2) La vitesse de l'onde $\omega_0 r/\eta_\sigma$ tend vers 0 lorsqu'elle approche l'origine si bien que l'onde met un temps infini pour atteindre l'origine. De plus, lorsque $\kappa_\sigma \to -1$, on a $\eta_\sigma \to +\infty$. Par conséquent, plus le contraste κ_σ est proche de -1, plus les ondes se propagent lentement.

5.6 Analyse dans les espaces de Sobolev à poids

Dans cette section, nous prouvons les résultats techniques que nous avons utilisés précédemment. En particulier, nous donnons une démonstration détaillée du Théorème 5.3.1 et du Lemme 5.3.2. L'analyse que nous présentons, largement inspirée de [102, chapitre 6], fait suite au Chapitre 3. Cependant, nous détaillons ces résultats toujours pour cette même raison : le problème que nous étudions n'est pas fortement elliptique à cause du changement de signe de σ. Or [102] ne traite que des problèmes elliptiques. Il est donc important de vérifier que l'approche mise en place dans [102] peut également être utilisée dans notre cas. Dans un souci de concision, nous définissons

$$I :=]0;\pi[.$$

Nous notons $(\cdot,\cdot)$ le produit de $\mathrm{L}^2(I)$ et $(\cdot,\cdot)_1$ (resp. $(\cdot,\cdot)_2$) celui de $\mathrm{L}^2(]\pi/4;\pi[)$ (resp. $\mathrm{L}^2(]0;\pi/4[)$). De façon générale, pour une fonction v mesurable sur I, nous définissons les restrictions $v_1 := v|_{]\pi/4;\pi[}$ et $v_2 := v|_{]0;\pi/4[}$.

5.6.1 Norme à paramètre

Dans le paragraphe suivant, nous aurons à étudier des problèmes 1D mettant en jeu des fonctions de $\mathrm{H}^1_0(I)$. Ces problèmes dépendront d'un paramètre λ à valeurs complexes. Comme nous aurons besoin d'établir des estimations dans lesquelles $|\lambda|$ sera grand, nous n'allons pas utiliser la norme classique sur $\mathrm{H}^1_0(I)$ mais plutôt, comme dans le Chapitre 3, la norme à paramètre définie par

$$\|v\|_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)} := \left(\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(I)} + |\lambda|^2 \|v\|^2_I \right)^{1/2}, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1(I). \tag{5.34}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé, les normes $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1(I)}$ sont équivalentes. La différence entre ces deux normes apparaît pour de grandes valeurs de $|\lambda|$. Nous introduisons également la norme duale

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(I,|\lambda|)} := \sup_{v\in \mathrm{H}^1_0(I)\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, v\rangle_I|}{\|v\|_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}}, \qquad \forall f \in \mathrm{H}^{-1}(I). \tag{5.35}$$

5.6.2 Problème 1D dépendant d'un paramètre

Pour débuter, étudions les propriétés du symbole $\mathscr{L}(\lambda) : \mathrm{H}^1_0(I) \to \mathrm{H}^{-1}(I)$ dans les normes (5.34) et (5.35). Pour mémoire, cet opérateur est défini par

$$\langle \mathscr{L}(\lambda)u, v\rangle_I = \int_0^\pi \sigma\, d_\theta u\, d_\theta v\, d\theta - \lambda^2 \int_0^\pi \sigma u\, v\, d\theta, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

Clairement $\mathscr{L}(\lambda)$ est analytique par rapport à λ pour la norme des opérateurs continus de $\mathrm{H}_0^1(I)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(I)$. L'injectivité de $\mathscr{L}(\lambda)$ a déjà été étudiée dans le §5.2.1. Nous voulons maintenant établir des estimations sur le comportement de $\|\mathscr{L}(\lambda)u\|_{\mathrm{H}^{-1}(I)}$ pour $|\lambda|$ grand. Nous avons déjà étudié ce genre de questions dans le Chapitre 3. Nous représentons cependant les détails ici car nous travaillons avec des normes différentes.

Lemme 5.6.1 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. Alors $\mathscr{L}(\lambda) : \mathrm{H}_0^1(I) \to \mathrm{H}^{-1}(I)$ constitue un isomorphisme si et seulement si $\lambda \notin \Lambda(\kappa_\sigma)$, où $\Lambda(\kappa_\sigma)$ est l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$.*

Preuve. Comme dans la preuve du Lemme 3.1.6 du Chapitre 3, nous utiliserons la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité en 1D. Prouvons d'abord le

Lemme 5.6.2 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$. Alors, il existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{L}(i\tau_0)$ soit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(I)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(I)$.*

Preuve. Considérons une fonction de troncature $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, [0;1])$ telle que $\psi(z) = 1$ pour $|z - \pi/4| < \pi/16$ et $\psi(z) = 0$ pour $|z - \pi/4| > \pi/8$. Introduisons les isomorphismes $\mathtt{T}_1, \mathtt{T}_2 : \mathrm{H}_0^1(I) \to \mathrm{H}_0^1(I)$ tels que, pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$,

$$\begin{aligned}
(\mathtt{T}_1 v)(\theta) &= \begin{cases} v_1(\theta) & \text{pour } \theta \in]\pi/4;\pi[\\ -v_2(\theta) + 2\psi(\theta)\, v_1(\pi/2-\theta) & \text{pour } \theta \in]0;\pi/4[\end{cases}, \\
(\mathtt{T}_2 v)(\theta) &= \begin{cases} v_1(\theta) - 2\psi(\theta)\, v_2(\pi/2-\theta) & \text{pour } \theta \in]\pi/4;\pi[\\ -v_2(\theta) & \text{pour } \theta \in]0;\pi/4[\end{cases}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Notons $\mathfrak{s}(\theta) = \pi/2 - \theta$. Pour tout $\lambda = i\tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, on a, pour tout α, $\delta > 0$ et $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$,

$$\begin{aligned}
|\langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| &\geq \sigma_1(v_1', \overline{v_1}')_1 + \tau^2\sigma_1(v_1, \overline{v_1})_1 + |\sigma_2|(v_2', \overline{v_2}')_2 + \tau^2|\sigma_2|(v_2, \overline{v_2})_2 \\
&\quad -2|\sigma_2(v_2', (\psi\,\overline{v_1}\circ\mathfrak{s})')_2| - 2|\tau^2\sigma_2(v_2, (\psi\,\overline{v_1}\circ\mathfrak{s}))_2| \\
&\geq (\sigma_1 - \alpha^{-1}\,|\sigma_2|)(v_1', \overline{v_1}')_1 + (1-(\alpha+\delta))|\sigma_2|\,(v_2', \overline{v_2}')_2 \\
&\quad +(\tau^2(\sigma_1 - \alpha^{-1}\,|\sigma_2|) - \delta^{-1}\,C\,|\sigma_2|)(v_1, \overline{v_1})_1 + (\tau^2|\sigma_2|(1-\alpha))(v_2, \overline{v_2})_2,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

avec $C = \sup_I |\psi'|$. Supposons $\sigma_1 > |\sigma_2|$. On peut trouver $\alpha > 0$ tel que $\sigma_1 - \alpha^{-1}|\sigma_2| > 0$ et $1-\alpha > 0$. Choisissons ensuite $\delta > 0$ tel que $\delta < 1-\alpha$. De (5.37), on déduit qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, indépendantes de τ, telles que $|\langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| \geq C_1\left((v', \overline{v}') + \tau^2\,(v, \overline{v})\right) - C_2\,(v, \overline{v})$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$. Ceci prouve que pour τ^2 suffisamment grand, $(v, w) \mapsto \langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{w}\rangle_I$ est coercive. Lorsque $|\sigma_2| > \sigma_1$, on procède de la même manière en travaillant avec $\mathtt{T}_2$. ■

Revenons à la preuve du Lemme 5.6.1. Considérons $\tau_0 \in \mathbb{R}$ donné par le Lemme 5.6.2 tel que $\mathscr{L}(i\tau_0)$ définissons un isomorphisme. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathscr{L}(\lambda) - \mathscr{L}(i\tau_0)$ est un opérateur compact de $\mathrm{H}_0^1(I)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(I)$. L'alternative de Fredholm assure alors que $\mathscr{L}(\lambda)$ est un isomorphisme si et seulement si λ n'est pas valeur propre de $\mathscr{L}$. ■

D'après le théorème de Fredholm analytique (voir [103, Théorème 1.1.1]), le résultat précédent montre que pour $\kappa_\sigma \neq -1$, l'ensemble $\Lambda(\kappa_\sigma)$ des valeurs propres de $\mathscr{L}$ est discret. D'autre part, $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ est bien défini et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \Lambda(\kappa_\sigma)$.

Proposition 5.6.3 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. Fixons $\beta \in \mathbb{R}$ et supposons que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur la droite $\Re\mathrm{e}\,\lambda = \beta$. Alors, il existe une constante $C_\beta > 0$ indépendante de λ telle que*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)} \leq C_\beta\, \|\mathscr{L}(\lambda)u\|_{\mathrm{H}^{-1}(I,|\lambda|)}, \quad \forall u \in \mathrm{H}_0^1(I), \tag{5.38}$$

pour tout $\lambda = \beta + i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Preuve. Nous allons prouver cette proposition pour $\sigma_1 > |\sigma_2|$. La configuration $|\sigma_2| > \sigma_1$ s'étudie de la même façon en travaillant avec $\mathtt{T}_2$ au lieu de $\mathtt{T}_1$. Intéressons-nous d'abord au cas $\lambda = i\tau \in \mathbb{R}i$. L'estimation (5.37) montre qu'il existe $r_0 > 0$ tel que si $|\tau| > r_0$, alors

$$|\langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| \geq C_1((v', \overline{v}') + \tau^2(v, \overline{v})), \tag{5.39}$$

pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$, où C_1 est une constante indépendante de τ. Puisque l'opérateur $\mathtt{T}_1$ défini en (5.36) est également borné de $\mathrm{L}^2(I)$ dans $\mathrm{L}^2(I)$, on obtient (5.38) pour $\lambda = i\tau \in \mathbb{R}i$ avec $|\tau| > r_0$.

Considérons maintenant le cas $\lambda = i\tau e^{i\phi}$ avec $\phi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Ici, $\tau \in \mathbb{R}$ est tel que $|\tau| > r_0$ avec r_0 défini ci-dessus. Pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$, nous pouvons écrire

$$|\langle \mathscr{L}(\lambda)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I - \langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| \leq C_2\, \tau^2 |1 - e^{2i\phi}|\, (v, \overline{v}), \tag{5.40}$$

où C_2 est une constante indépendante de τ. En combinant (5.39) et (5.40), on trouve

$$\begin{array}{rcl} |\langle \mathscr{L}(\lambda)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| & \geq & |\langle \mathscr{L}(i\tau)v, \mathtt{T}_1\overline{v}\rangle_I| - C_2\, \tau^2 |1 - e^{2i\phi}|(v, \overline{v}) \\ & \geq & C_1(v', \overline{v}') + \tau^2(C_1 - C_2\, |1 - e^{2i\phi}|)(v, \overline{v}). \end{array}$$

En prenant ϕ suffisamment petit pour avoir, par exemple, $C_2\, |1 - e^{2i\phi}| \leq C_1/2$, on déduit qu'il existe deux nombres réels r_0 et δ_0 tels que (5.38) est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| > r_0$ et $|\Re e\, \lambda| < \delta_0\, |\Im m\, \lambda|$.

Enfin, puisque $\lambda \mapsto \mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ est bien défini et analytique dans un voisinage de la ligne $\Re e\, \lambda = \beta$, on obtient le résultat énoncé. ■

5.6.3 Espaces à poids et transformée de Laplace dans la bande infinie

Dans ce paragraphe, en utilisant la transformée de Laplace, nous étudions les relations entre les espaces $\mathrm{H}_0^1(I), \mathrm{H}^{-1}(I)$ et les espaces de Sobolev à poids la bande infinie. Définissons

$$\mathcal{S} := \mathbb{R}\times]0; \pi[.$$

Introduisons une famille d'espaces à poids pour cette géométrie. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_\beta^k(\mathcal{S})$ désignera la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{S})$ pour la norme définie par

$$\|v\|_{\mathrm{W}_\beta^k(\mathcal{S})} \;:=\; \Big(\sum_{\alpha+\gamma\leq k} \|e^{\beta z}\, \partial_z^\alpha \partial_\theta^\gamma v\, \|_{\mathcal{S}}^2 \Big)^{1/2}.$$

Nous noterons $\mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})^*$ le dual topologique de l'espace $\mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})$ et nous le munirons de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})^*} := \sup_{v\in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, v\rangle_{\mathcal{S}}|}{\|v\|_{\mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})}}, \qquad \forall f \in \mathrm{W}_\beta^1(\mathcal{S})^*.$$

Pour étudier le lien entre ces espaces à poids et les espaces que nous avons introduit dans le paragraphe précédent, nous utiliserons la transformée de Laplace. Cette transformée est définie par densité à partir de la formule suivante

$$\widehat{v}(\lambda, \theta) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} v(z, \theta) e^{-\lambda z} dz, \qquad \forall v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{S}),\;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Il est également possible de définir la transformée de Laplace des éléments de $\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{S})$, l'espace dual de $\mathrm{H}_0^1(\mathcal{S})$. Dans un souci de concision, nous restreignons notre définition aux éléments à support compact (bien que cette définition puisse être étendue). Si $f \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{S})$ est à support compact, sa

transformée de Laplace partielle par rapport à la variable z est la fonction $\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda)$, à valeurs dans $\mathrm{H}^{-1}(I)$, telle que

$$\langle \widehat{f}(\lambda), v\rangle_I = \langle f, \widetilde{v}_\lambda\rangle_{\mathcal{S}} \quad \text{avec} \quad \widetilde{v}_\lambda(z,\theta) = e^{-\lambda z} v(\theta)\ , \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

Bien que $\widetilde{v}_\lambda \notin \mathrm{H}^1_0(\mathcal{S})$, l'identité ci-dessus a un sens car f est à support compact. En tant que fonction à valeurs dans $\mathrm{H}^{-1}(I)$, $\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ est analytique.

Remarquons que, pour $v \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\xi,\theta) \mapsto \widehat{v}(-\beta + i\xi, \theta)$ est en fait la transformée de Fourier (partielle) par rapport à z de $(z,\theta) \mapsto e^{\beta z} u(z,\theta)$. Grâce à cette observation et à la caractérisation classique des espaces de Sobolev par la transformée de Fourier, on prouve l'identité de Parseval suivante

$$\|v\|^2_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})} = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \|\,\widehat{v}(\lambda,\cdot)\,\|^2_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}\, d\lambda, \qquad \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S}),\ \ \forall \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.41}$$

On a une relation similaire entre $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})^*$ et $\mathrm{H}^{-1}(I)$. C'est précisément la raison pour laquelle nous avons introduit les normes à paramètre $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^{-1}(I,|\lambda|)}$ (on ne pourrait pas écrire une telle identité de Parseval avec la norme classique $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^{-1}(I)}$).

Lemme 5.6.4 *Soit $f \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{S})$ à support compact. On a l'identité*

$$\|f\|^2_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})^*} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \|\,\widehat{f}(\lambda,\cdot)\,\|^2_{\mathrm{H}^{-1}(I,|\lambda|)}\, d\lambda, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.42}$$

Preuve. Fixons $\beta \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, remarquons que $(u,v) \mapsto (e^{2\beta z}\nabla u, \nabla \overline{v})_{\mathcal{S}} + (e^{2\beta z} u, \overline{v})_{\mathcal{S}}$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$. Pour $u \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$, définissons la fonctionnelle $f \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{S})$ telle que

$$\langle f, w\rangle_{\mathcal{S}} = (e^{2\beta z}\nabla u, \nabla w)_{\mathcal{S}} + (e^{2\beta z} u, w)_{\mathcal{S}}, \qquad \forall w \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S}). \tag{5.43}$$

Puisque $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$ est dense dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$, d'après le théorème de Riesz, les fonctionnelles de la forme (5.43) avec $u \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$ sont denses dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})^*$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})^*}$. Par conséquent, il suffit de prouver (5.42) simplement pour de telles fonctionnelles.

Observons que (5.43) a encore un sens pour $w(z,\theta) = e^{-\lambda z} v(\theta)$, pour tout $\lambda = \beta + i\eta \in \mathbb{C}$, puisque u est à support compact. En prenant un tel $w(z,\theta)$, nous obtenons

$$\langle \widehat{f}(\beta + i\eta), v\rangle_I = \big(\partial_\theta \widehat{u}(-\beta + i\eta), \partial_\theta v\big)_I + (1 + |\beta + i\eta|^2)\big(\widehat{u}(-\beta + i\eta), v\big)_I.$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathrm{H}^1_0(I)$. Pour $\eta \in \mathbb{R}$ fixé, en choisissant $v(\theta) = \overline{\widehat{u}}(-\beta + i\eta, \theta)$, nous obtenons l'identité

$$\|\widehat{f}(\beta + i\eta)\|^2_{\mathrm{H}^{-1}(I,|\beta+i\eta|)} = \|\widehat{u}(-\beta + i\eta)\|^2_{\mathrm{H}^{-1}(I,|-\beta+i\eta|)}.$$

Maintenant, revenons à (5.43), prenons $w(z,\theta) = \overline{u}(z,\theta)$ et utilisons l'identité de Parseval (5.41). Nous trouvons

$$\langle f, \overline{u}\rangle_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \|\,\widehat{u}(\lambda,\cdot)\,\|^2_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}\, d\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \|\,\widehat{f}(\lambda,\cdot)\,\|^2_{\mathrm{H}^1(I,|\lambda|)}\, d\lambda.$$

Puisque $\langle f, \overline{u}\rangle_{\mathcal{S}} = \|f\|^2_{\mathrm{W}^1(\mathcal{S})^*}$, l'égalité précédente permet de conclure la preuve. ∎

5.6.4 Problème dans la bande infinie

Dans la bande infinie, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, définissons $G_\beta : \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S}) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})^*$ l'unique opérateur linéaire continu tel que

$$\langle G_\beta u, v\rangle_{\mathcal{S}} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{S}}, \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S}),\ \ \forall v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S}).$$

Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier la question de l'inversibilité de G_β.

Théorème 5.6.5 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $G_\beta : \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S}) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})^*$ définit un isomorphisme lorsque le symbole $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = \beta$.*

Preuve. Supposons donc que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = \beta$. Montrons qu'alors il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})} \ \leq\ C_\beta\, \|G_\beta u\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})^*}, \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S}). \tag{5.44}$$

Puisque $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$ est dense dans $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$, il suffit de prouver qu'une telle estimation est vraie pour tout u dans $\mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$. Considérons donc $u \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathcal{S})$. Observons que

$$\widehat{G_\beta u}\,(\lambda,\theta) = \mathscr{L}(\lambda)\,\widehat{u}(\lambda,\theta), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

L'estimation (5.44) découle alors directement de la Proposition 5.6.3 et du Lemme 5.6.4. Ceci prouve que G_β est un opérateur injectif à image fermée. Par ailleurs, on a $G^*_\beta = G_{-\beta}$. Or en vertu de (5.9), nous savons que si $\mathscr{L}$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = \beta$ alors $\mathscr{L}$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$. En utilisant (5.44) avec β remplacé par $-\beta$, on déduit que G^*_β est injectif. Ceci prouve que G_β est surjectif d'après [116, théorème 2.13]. ■

5.6.5 Problème dans la demi-bande

Nous en venons au problème posé dans la demi-bande $\mathcal{B} =]-\infty; 0[\times]0;\pi[$, géométrie à laquelle nous nous sommes intéressés dans les Sections 5.3 et 5.4. Rappelons que nous avons défini l'opérateur continu $L_\beta : \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*$ tel que

$$\langle L_\beta u, v\rangle_{\mathcal{B}} = (\sigma\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{B}}, \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})\,,\ \ \forall v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}).$$

Théorème 5.3.1 *Supposons $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. L'opérateur $L_\beta : \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*$ est de type Fredholm si et seulement si $\Lambda(\kappa_\sigma) \cap \ell_\beta = \emptyset$ où ℓ_β désigne la droite $\{\ \lambda \in \mathbb{C}\ \mid\ \Re e\,\lambda = \beta\ \}$.*

Preuve. Fixons $\beta \in \mathbb{R}$ et supposons que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur ℓ_β. Définissons $Q =]-2; 0[\times]0;\pi[$. Considérons une fonction de troncature $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, [0;1])$ telle que $\zeta(z) = 0$ pour $z \geq -1$ et $\zeta(z) = 1$ pour $z \leq -2$. Définissons $\chi := 1 - \zeta$. D'après le Théorème 1.3.3 et l'estimation (1.8) du Chapitre 1, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|v\|_{\mathrm{H}^1(Q)} \ \leq\ C_1(\ \|\mathrm{div}(\sigma\nabla v)\|_{\mathrm{H}^{-1}(Q)} + \|v\|_Q\ ), \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(Q). \tag{5.45}$$

Remarquons que $\mathrm{div}(\sigma\nabla(\chi u)) = \chi\,\mathrm{div}(\sigma\nabla u) + 2\,\mathrm{div}(u\,\sigma\nabla\chi) - u\,\sigma\partial^2_z\chi$ appartient à $\mathrm{H}^{-1}(Q)$ pour tout $u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$. Par conséquent, en appliquant l'estimation (5.45) à χu, on obtient l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\|\chi u\|_{\mathrm{H}^1(Q)} \ \leq\ C_2(\ \|L_\beta u\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*} + \|u\|_Q\ ), \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}). \tag{5.46}$$

Prolongeons ζu par 0 sur $\mathcal{S} \setminus \overline{B}$ de sorte que ζu puisse être considéré comme un élément de $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$. Appliquons le Théorème 5.6.5 à ζu : il existe une constante C_3 telle que

$$\|\zeta u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})} \leq C_3\, \|G_\beta(\zeta u)\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})^*}, \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}).$$

De façon similaire, $\zeta L_\beta(u)$ peut être considéré comme un élément de $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})^*$. En utilisant l'égalité $G_\beta(\zeta u) = \zeta L_\beta(u) + 2\,\mathrm{div}(u\,\sigma\nabla\zeta) - u\,\sigma\partial_z^2\zeta$, nous obtenons, pour tout $u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$,

$$\|\zeta u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} = \|\zeta u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})} \leq C_3'(\,\|L_\beta u\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*} + \|u\|_Q\,). \tag{5.47}$$

Puisque $\zeta + \chi = 1$, en rassemblant les estimations (5.46) et (5.47), on déduit l'existence d'une constante $C_4 > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})} \leq C_4(\,\|L_\beta u\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})^*} + \|u\|_Q\,), \qquad \forall u \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B}). \tag{5.48}$$

Or l'opérateur $u \mapsto u|_Q$ de $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ dans $\mathrm{L}^2(Q)$ est compact. Par conséquent, le Lemme 5.5.4 et l'estimation (5.48) prouvent que $\mathrm{im}\,L_\beta$ est fermée et que $\ker L_\beta$ est de dimension finie.

De nouveau, remarquons que si $\mathscr{L}$ n'a pas de valeur propre sur la droite $\Re e\,\lambda = \beta$ alors $\mathscr{L}$ n'en a pas non plus sur la droite $\Re e\,\lambda = -\beta$. Nous pouvons donc utiliser ce qui précède avec β remplacé par $-\beta$. En particulier, puisque $L_\beta^* = L_{-\beta}$, on a $\dim\mathrm{coker}\,L_\beta = \dim\ker L_{-\beta} < \infty$. Ceci prouve finalement que L_β est de type Fredholm et termine la première partie de la preuve.

Maintenant, supposons que $\mathscr{L}$ possède une valeur propre λ_0 sur la droite $\Re e\,\lambda = \beta$. Considérons une fonction de troncature χ comme dans le début de cette preuve et définissons $u_n(z,\theta) := \chi(z/n)\exp(\lambda_0 z)\varphi_{\mathrm{p}}(\theta)$ où $\varphi_p(\theta)$, donné par la formule (5.10), est un vecteur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ_0. En travaillant avec la suite u_n on met en défaut l'estimation *a priori* (5.47). Puisque $\dim\ker L_\beta < \infty$ (notons en effet que $\ker L_\beta \subset \ker L_\gamma$ pour tout $\gamma > \beta$), ceci prouve que $\mathrm{im}\,L_\beta$ ne peut pas être fermée. ■

Le second résultat non trivial dont nous avons eu besoin dans la Section 5.3 est un résultat de décomposition. En effectuant un raisonnement par densité et en utilisant le Théorème 3.1.17 du Chapitre 3, on prouve comme le théorème 5.4.2 de [102] le

Théorème 5.6.6 *Supposons $\kappa_\sigma \neq -1$.*
Supposons que $\mathscr{L}$ ne possède pas de valeur propre sur les droites $\Re e\,\lambda = \beta^1$ et $\Re e\,\lambda = \beta^2$, $\beta^1 < \beta^2$. Notons $\lambda^1, \ldots, \lambda^N$ les valeurs propres de $\mathscr{L}$ dans la bande $\beta^1 < \Re e\,\lambda < \beta^2$. Supposons que pour $k = 1, \ldots, N$ on ait $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$, où φ^k est un vecteur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ^k. Soit u_{β^2} un élément de $\mathrm{W}^1_{\beta^2}(\mathcal{B})$ vérifiant $L_{\beta^2}u_{\beta^2} \in \mathrm{W}^1_{\beta^1}(\mathcal{B})^*$. Alors, on a le résultat de décomposition suivant

$$u_{\beta^2} = u_{\beta^1} + \sum_{k=1}^{N} c^k\,\zeta\,e^{-\lambda^k z}\varphi^k, \tag{5.49}$$

où u_{β^1} est un élément de $\mathrm{W}^1_{\beta^1}(\mathcal{B})$, c^k est une constante (qui dépend du choix de φ^k), $k = 1, \ldots, N$, et $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_-)$ est une fonction de troncature telle que $\zeta(z) = 1$ pour $z \leq -2$, $\zeta(z) = 0$ pour $z > -1$.

Remarque 5.6.7 *De nouveau, indiquons que l'hypothèse « $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$ » pour $k = 1, \ldots, N$ assure simplement que la chaîne de Jordan associée à la valeur propre λ^k (de multiplicité géométrique égale à un) est de longueur un. Autrement dit, la chaîne de Jordan n'est constituée que de la valeur propre. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Par exemple, pour un contraste $\kappa_\sigma = -1/3$, l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{L}$ contient 0 et le vecteur propre associé φ vérifie $0(\sigma\varphi, \overline{\varphi}) = 0$. Pour de telles situations, le développement (5.49) fait intervenir toute la chaîne de Jordan associée à la valeur propre λ^k. Nous renvoyons le lecteur à [85, 101, 102, 103] pour plus de détails concernant ces questions. Pour terminer cette remarque, indiquons que dans notre étude nous ne nous intéressons qu'aux valeurs propres (non-nulles) situées sur l'axe imaginaire. Pour ces dernières, le Lemme 5.3.6 montre qu'on a bien $\lambda^k(\sigma\varphi^k, \overline{\varphi^k}) \neq 0$.*

Démontrons maintenant le troisième et dernier résultat technique utilisé dans la Section 5.3.

Lemme 5.3.2 *Fixons* $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ *et* $\beta \in]0;2[$. *L'opérateur* $L_{-\beta} : \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}) \to \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*$ *est injectif. De plus, il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})} \leq C \, \|L_{-\beta} v\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})^*}, \quad \forall v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B}).$$

On dit alors que $L_{-\beta}$ *est un monomorphisme.*

Preuve. Considérons $u \in \ker L_{-\beta}$. Par anti-symétrie, définissons la fonction $\tilde{u}$ sur $\mathcal{S} := \mathbb{R}\times]0;\pi[$ telle que $\tilde{u}(z,\theta) = u(z,\theta)$ pour $z \leq 0$ et $\tilde{u}(z,\theta) = -u(-z,\theta)$ pour $z \geq 0$. Puisque $u|_{\partial\mathcal{B}} = 0$, la fonction $\tilde{u}$ appartient à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{S})$. De plus, on a $(z,\theta) \mapsto e^{-\beta z}\tilde{u}(-z,\theta) \in \mathrm{H}^1(\mathcal{B})$ et donc $(z,\theta) \mapsto e^{\beta z}\tilde{u}(-z,\theta) \in \mathrm{H}^1(\mathcal{B})$. Par conséquent, $\tilde{u}$ constitue un élément de $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})$. Pour $v \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$, définissons $w(z,\theta) = v(z,\theta) - v(-z,\theta)$. La fonction w appartient à $\mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{B})$ puisque $w|_{\partial\mathcal{B}} = 0$. Un calcul direct utilisant l'anti-symétrie de $\tilde{u}$ conduit à

$$(\sigma\nabla\tilde{u}, \nabla v)_{\mathcal{S}} = (\sigma\nabla u, \nabla w)_{\mathcal{B}} = 0.$$

Ainsi, nous obtenons $(\sigma\nabla\tilde{u}, \nabla v)_{\mathcal{S}} = 0$ pour tout $v \in \mathrm{W}^1_\beta(\mathcal{S})$. Le Théorème 5.6.5 montre que le seul élément $\tilde{u} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{S})$ vérifiant une telle propriété est $\tilde{u} = 0$, de sorte que $u = 0$. La continuité de $L^{-1}_{-\beta}$ de $\operatorname{im} L_{-\beta}$ dans $\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathcal{B})$ est alors une conséquence directe du théorème de Banach. ■

5.7 Aspects numériques

Dans la Section 5.5, nous avons introduit l'espace $\mathscr{V}^+_\beta(\Omega) = \mathrm{vect}\{r^{i\eta_\sigma}\varphi_p(\theta)\zeta(r)\} \oplus \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$, pour $\beta \in]0;2[$, ainsi que l'opérateur borné $A^+_\beta : \mathscr{V}^+_\beta(\Omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ tel que

$$\langle A^+_\beta u, v\rangle_\Omega = (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \forall u \in \mathscr{V}^+_\beta(\Omega), \ \ \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega).$$

Nous avons prouvé avec le Théorème 5.5.2 que A^+_β constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro avec $\ker A^+_\beta = \ker A_{-\beta}$. Supposons que la géométrie et le contraste soient tels que $A_{-\beta} : \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ soit injectif. Dans ce cas, nous pouvons affirmer que A^+_β définit un isomorphisme. En particulier, si nous considérons un terme source $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in \mathscr{V}^+_\beta(\Omega) \text{ tel que} \\ (\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \quad \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega), \end{array} \right. \tag{5.50}$$

possède une unique solution pour $0 < \beta \leq 1$. Nous devons faire l'hypothèse supplémentaire $\beta \leq 1$ pour avoir l'inclusion $\mathrm{L}^2(\Omega) \subset \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$. Ce dernier résultat se démontre en remarquant que pour de telles valeurs de β, on a $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega) = \mathrm{V}^0_0(\Omega)$. Dans ce paragraphe, nous souhaitons nous intéresser à la question de l'approximation de la solution du problème (5.50). C'est une question délicate car la solution u, de façon générale, n'appartient pas à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ en raison de la singularité propagative en O. Plus précisément, en procédant comme dans la preuve de la Proposition 5.3.3, on montre que u est dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ si et seulement si f satisfait la condition de compatibilité $(f, s)_\Omega = 0$ où s est une base[2] de $\ker A_\beta$. Ce problème d'approximation est intéressant car il fait le pont entre les problèmes d'approximation pour les guides d'ondes et les problèmes d'approximation pour les domaines à géométrie singulière. Nous pouvons envisager son traitement sous différents angles. Cependant, toujours en raison de ce changement de signe de σ, la justification complète des méthodes numériques semble compliquée et nous nous contenterons de descriptions formelles.

2. Puisque nous avons supposé $A_{-\beta}$ injectif, nous savons que $\dim\ker A_{-\beta} = \dim\operatorname{coker} A_\beta = 0$ et $\dim\operatorname{coker} A_{-\beta} = \dim\ker A_\beta = 1$.

Extraction du coefficient de singularité

Le premier procédé que l'on peut envisager pour approcher la solution du problème (5.50) provient des techniques mises en place pour traiter les problèmes d'approximation dans les domaines à géométrie singulière. Il a notamment été développé pour étudier la résolution des équations de Maxwell dans des domaines polygonaux non convexes [16, 31, 6, 110, 5, 82, 92, 96]. Cette approche consiste à calculer directement la partie singulière de la solution. On retire ensuite au second membre l'image de cette partie singulière. On peut alors mettre une place une méthode classique de type éléments finis pour approcher la partie régulière de la solution.

Habituellement, on utilise ce genre de techniques pour améliorer la vitesse de convergence. En effet, cette dernière est proportionnelle à la régularité de la solution, régularité qui, de façon générale, peut être réduite lorsque le domaine n'est pas régulier. Cette méthode repose sur la connaissance explicite du comportement singulier au voisinage du coin ou de l'arête. Le point le plus subtil dans le processus tient dans le calcul de la partie singulière. Il faut en effet être capable d'approcher efficacement le coefficient devant la singularité. Pour cela, on utilise une formule de projection analogue à celle obtenue dans la Proposition 5.3.3.

Tout laisse penser qu'on peut adopter cette démarche pour discrétiser (5.50). Précisons néanmoins que pour ce problème, l'extraction de la partie singulière n'est pas un moyen d'améliorer la vitesse de convergence mais plutôt un procédé nécessaire pour approcher la solution. Indiquons également que pour justifier complètement cette méthode, il faut notamment être capable de justifier la convergence de la méthode d'approximation de la partie régulière. Ceci n'est pas évident *a priori*. Cependant, en travaillant avec des maillages particuliers, l'on pourra utiliser les techniques variationnelles développées au cours du Chapitre 2.

Lorsqu'on considère un problème légèrement dissipatif, avec σ remplacé par $\sigma^\gamma := \sigma + i\gamma|\sigma|$, on retrouve un problème elliptique dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Les preuves existantes justifient alors rigoureusement la méthode que nous venons de présenter. Peut-être pourrait-on approcher la partie singulière (resp. régulière) de la solution du problème (5.50) par l'approximation de la partie singulière (resp. régulière) de la solution du problème légèrement dissipatif, quitte à adapter la dissipation. Ce point reste à étudier.

Utilisation d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann au voisinage de O

La deuxième stratégie que nous pouvons imaginer pour approcher la solution du problème (5.50) consiste à « borner » le domaine de calcul en imposant une condition artificielle. Expliquons-nous. Comme nous l'avons remarqué dans l'analogie avec le problème de guide d'ondes, dans le problème (5.50), le point O joue le rôle d'infini. Pour approcher la solution dans le guide, une méthode classique consiste à borner le domaine en utilisant un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DTN) qui permet de laisser « circuler » les modes propagatifs sans réflexion. Pour le problème dans Ω, cela revient à placer un opérateur DTN au voisinage du point singulier O (voir une illustration avec la Figure 5.5). Dans notre cas, il n'y a qu'un mode propagatif. Par conséquent, nous pouvons tronquer le domaine Ω en imposant la condition de Robin $\delta\partial_r u|_{r=\delta} = i\eta_\sigma u|_{r=\delta}$ où δ désigne un petit paramètre. Cela revient à approcher l'opérateur DTN à l'ordre un.

Avec les espaces de Sobolev à poids, en utilisant par exemple les idées présentées dans [97], on devrait pouvoir montrer que la solution du problème avec un opérateur DTN tronqué converge vers la solution du problème (5.50) lorsque δ tend vers 0. La seconde étape consistant à prouver la convergence du problème discrétisé avec un opérateur Dirichlet-to-Neumann tronqué semble un problème largement ouvert. Précisons enfin que cette technique nécessite de nouveau la connaissance des singularités/modes pour pouvoir construire l'opérateur DTN. Pour la géométrie particulière

que nous avons étudiée, nous avons pu mener tous les calculs explicitement. Ce n'est en général pas possible.

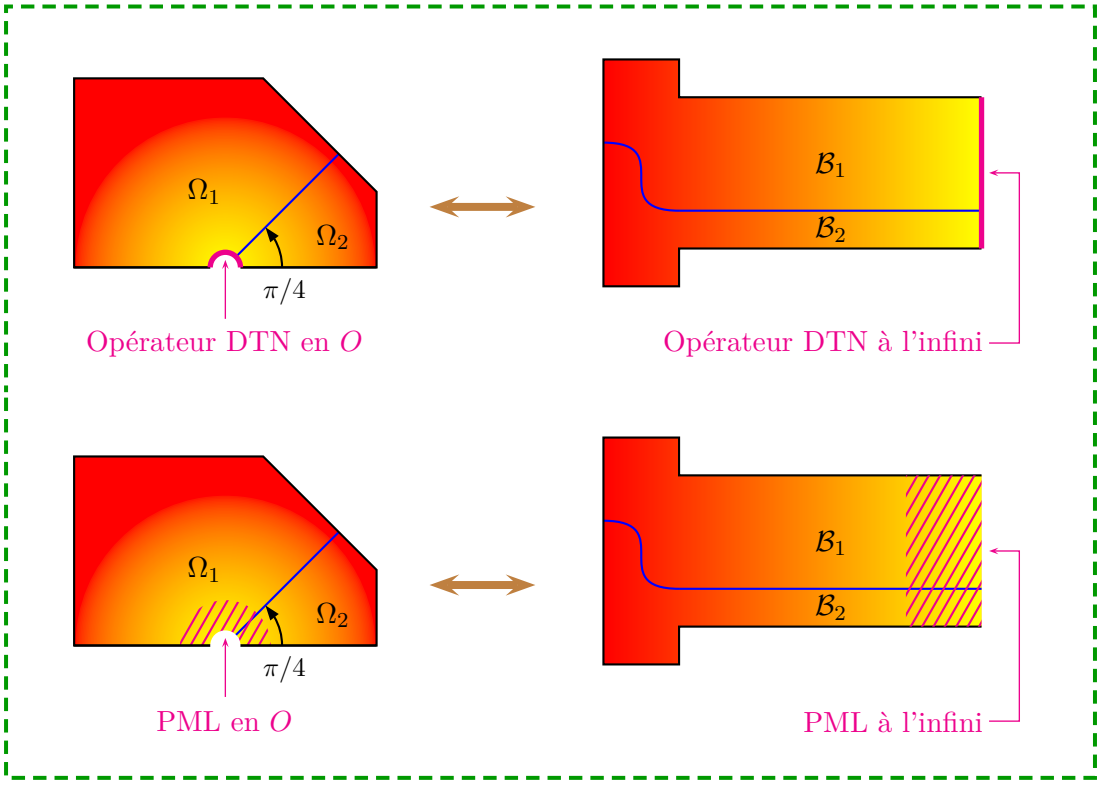


FIGURE 5.5 – Placer un opérateur DTN ou une PML dans le guide d'ondes à l'infini revient à placer un opérateur DTN ou une PML au voisinage du point singulier O dans Ω.

Utilisation de PMLs au voisinage de O

Pour borner le guide d'ondes, une alternative classique à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann consiste à utiliser une couche parfaitement adaptée (PML). De nouveau, placer une PML à l'infini dans le guide correspond à placer une PML au voisinage de O dans la géométrie initiale (voir la Figure 5.5). On tronque ensuite la PML en imposant une condition de Dirichlet. Avec cette technique, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les singularités/modes du problème. Ceci est un avantage important notamment si l'on souhaite étudier des configurations plus compliquées (cône ou arête en 3D). D'un point de vue pratique, le seul travail consiste à effectuer le changement de variable complexe, opération relativement peu coûteuse. En coordonnées polaires, on pourra utiliser les calculs présentés dans [57].

De nouveau, en travaillant dans les espaces de Sobolev à poids et en procédant comme dans [97], nous espérons pouvoir montrer que la solution du problème avec une PML tronquée approche la solution du problème initial (5.50). Par contre, la question de la justification de la convergence du problème discrétisé avec PML tronquée paraît plus ouverte. Le lecteur désirant en savoir plus est invité à étudier le travail de Camille Carvalho qui s'intéresse actuellement à ces aspects dans le cadre de son stage de Master.

Nous allons maintenant présenter quelques résultats numériques pour cette méthode. Nous nous

placerons dans le demi-disque unité avec

$$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,0<r<1 \;\text{ et }\; 0<\theta<\pi\}; \\ \Omega_1 & = & \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,0<r<1 \;\text{ et }\; \pi/4<\theta<\pi\}; \\ \Omega_2 & = & \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,0<r<1 \;\text{ et }\; 0<\theta<\pi/4\}. \end{array}$$

Nous considérons cette géométrie pour deux raisons. D'une part, dans ce cas, l'injectivité de l'opérateur $A_{-\beta}$ est garantie par le Lemme 5.3.2. D'autre part, cela permet de travailler directement dans le guide d'ondes. Nous effectuons tous les calculs dans la demi-bande, en particulier, nous écrivons le changement de variable de la PML en coordonnées cartésiennes, puis nous effectuons le changement de variable inverse $r = e^{-z}$ pour revenir à la géométrie initiale. Notons qu'avec ce procédé, nous obtenons directement un maillage raffiné logarithmiquement au voisinage de O dans le domaine Ω (cf. Figures 5.7 et 5.6).

Nous prenons le second membre f égal à 1 pour $e^{-1} < r < 1$ et 0 pour $0 < r \leq e^{-1}$. De la sorte, le terme source appartient à $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Nous tronquons la demi-bande $]0;+\infty[\times]0;\pi[$ en $L = 6.8$ et plaçons la couche PML dans la région $]3L/4;L[\times]0;\pi[$. Nous utilisons des éléments finis de Lagrange P_1 et travaillons avec le logiciel libre *Freefem++*. La commande `movemesh` permet d'effectuer le changement de variable dont nous avons besoin. Nous affichons les résultats avec le logiciel *Paraview*.

Pour la simulation de la Figure 5.8, le contraste κ_σ est choisi égal à $-1/2$. Nous observons l'action de la PML qui atténue le mode propagatif. Nous remarquons également que celui-ci est relativement confiné au voisinage de l'interface. C'est un trait caractéristique des ondes plasmoniques. Ceci illustre également le fait qu'une onde plasmonique peut exister à n'importe quelle fréquence (ici 0), sans fréquence de coupure, ce qui constitue un atout majeur pour les applications [8, 47, 152, 135, 86]. Pour la simulation de la Figure 5.9, nous prenons $\kappa_\sigma = -1/1.001$. Rappelons que la singularité propagative se comporte en $r^{i\eta_\sigma}$ avec η_σ qui tend vers l'infini lorsque $\kappa_\sigma \to -1^+$. Nous retrouvons bien ce résultat. D'un point de vue pratique, nous sommes contraints d'utiliser un maillage symétrique par rapport à l'interface pour travailler avec des contrastes proches de -1. Avec un maillage quelconque, la solution approchée présente des « pics » très forts sur l'interface. Sur la Figure 5.10, on peut vérifier que l'on a bien approché la solution à l'extérieur d'un voisinage de la singularité géométrique O. Enfin, sur la Figure 5.8, nous affichons l'approximation de la solution du problème (5.1) pour un contraste $\kappa_\sigma = -1/4$ situé en dehors de l'intervalle critique. Pour cette configuration, (5.1) est bien posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans le guide d'ondes, les modes sont tous évanescents.

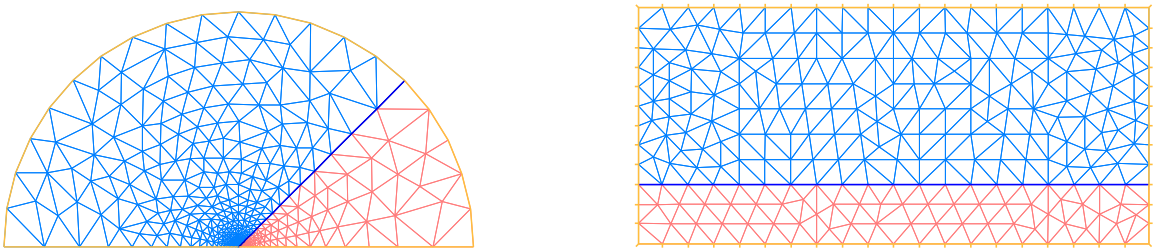


FIGURE 5.6 – Maillage utilisé pour la simulation avec $\kappa_\sigma = -1/2$. Nous maillons la bande puis nous effectuons le changement de variable $r = e^{-z}$. Nous obtenons ainsi un maillage raffiné logarithmiquement.

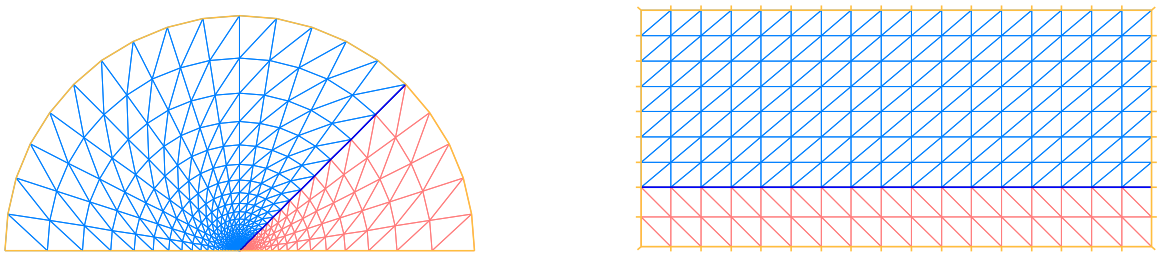


FIGURE 5.7 – Maillage utilisé pour la simulation avec $\kappa_\sigma = -1/1.001$. Pour une telle valeur du contraste, pour éviter les phénomènes d'instabilités numériques, nous utilisons un maillage symétrique par rapport à l'interface.

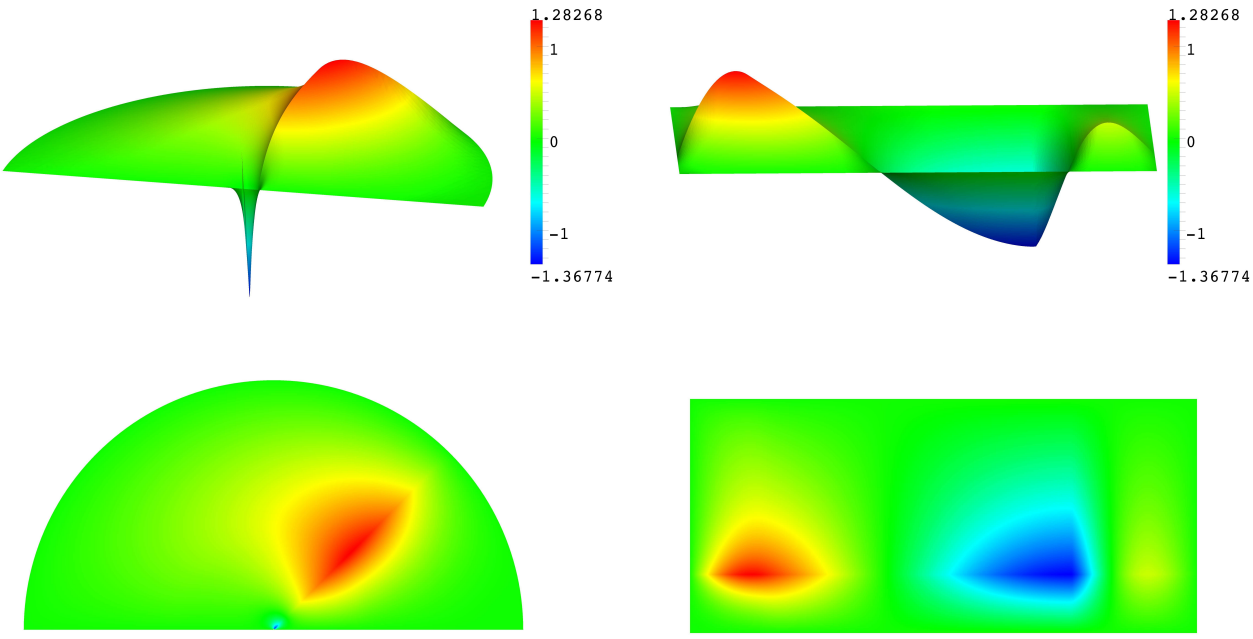


FIGURE 5.8 – Approximation de la solution du problème (5.50) pour un contraste $\kappa_\sigma = -1/2$.

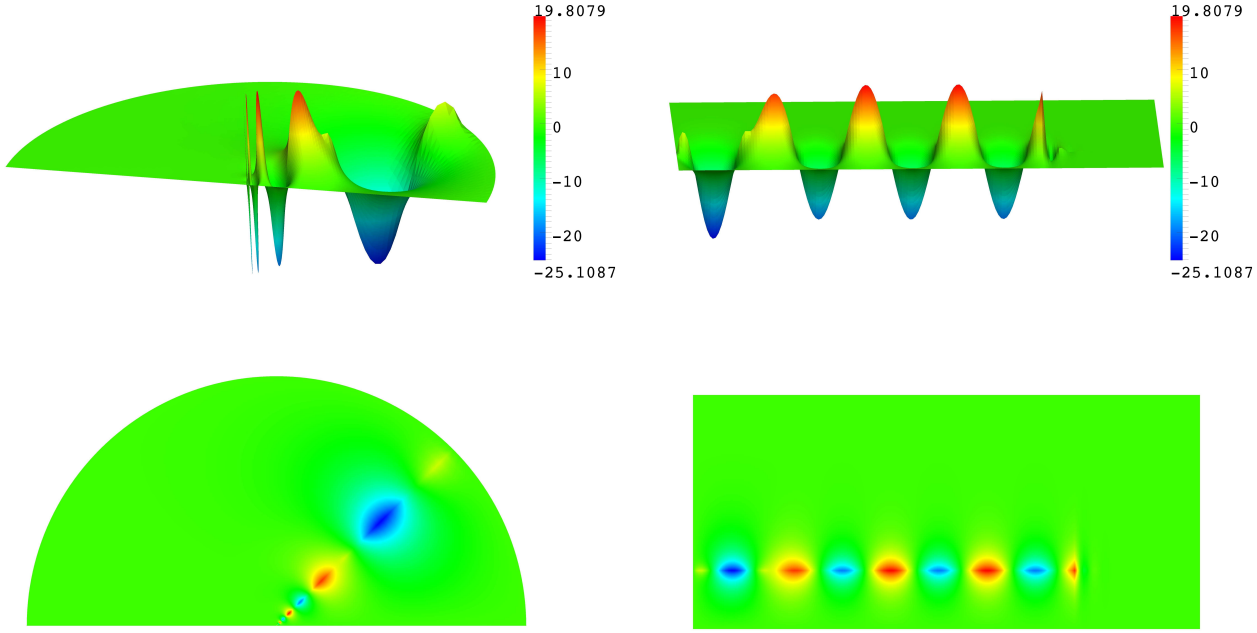


FIGURE 5.9 – Approximation de la solution du problème (5.50) pour un contraste $\kappa_\sigma = -1/1.001$.

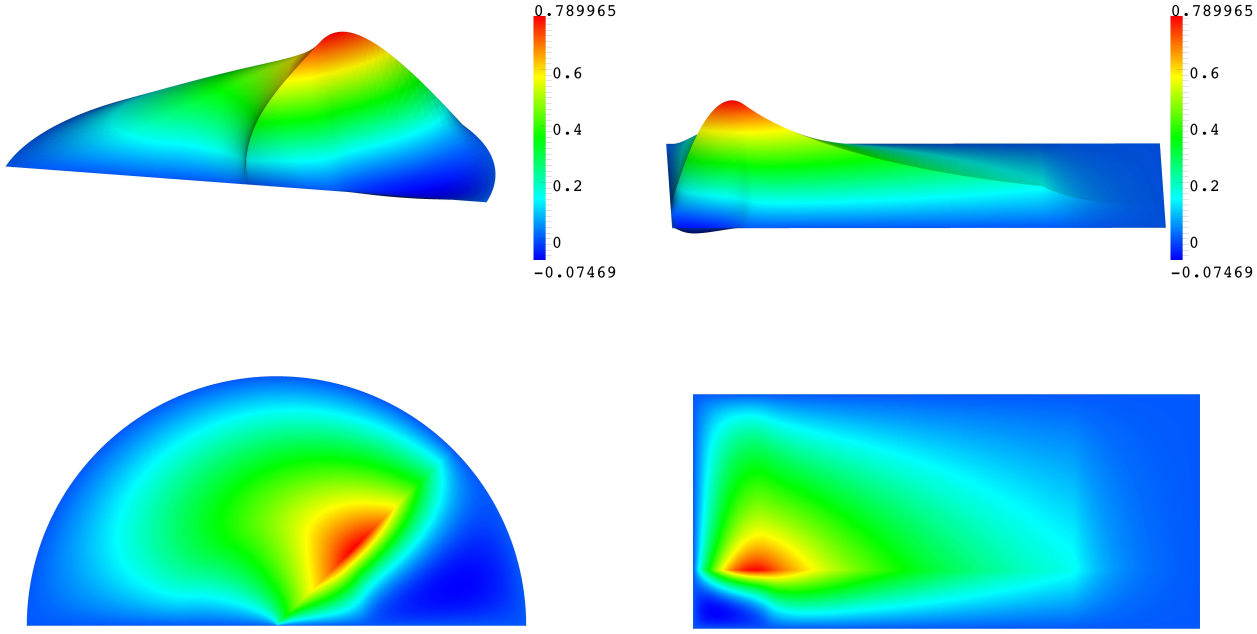


FIGURE 5.10 – Approximation de la solution du problème (5.1) pour un contraste $\kappa_\sigma = -1/4$ (en dehors de l'intervalle critique).

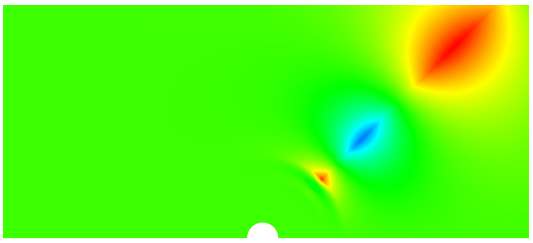


FIGURE 5.11 – Zoom au voisinage du point singulier O pour la simulation avec $\kappa_\sigma = -1/1.001$.

Chapitre Six

Développement asymptotique pour un coin arrondi dans l'intervalle critique

Les résultats de ce chapitre feront probablement l'objet de la publication :

[51] L. Chesnel, X. Claeys et S.A. Nazarov : Asymptotics expansion for a non-smooth interface between a dielectric and a negative material. *En cours*, 2012.

Sommaire

Introduction **149**
6.1 Description du problème **151**
6.1.1 Géométrie 151
6.1.2 Problème étudié 152
6.2 Géométries limites **153**
6.2.1 Géométrie externe 153
6.2.2 Géométrie interne 155
6.3 Résultat de stabilité **156**
6.3.1 Développement en champ lointain 156
6.3.2 Développement en champ proche 158
6.3.3 Le principe de raccord 159
6.3.4 Champ approché 159
6.3.5 Estimation du reste 160
6.3.6 Résultat de stabilité 162
6.4 Développement asymptotique au premier ordre **163**
6.4.1 Construction du développement 164
6.4.2 Champ approché et estimations d'erreur 164
6.5 Illustrations numériques **166**

Introduction

Le problème de transmission $(\mathscr{P})$ « trouver $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f$ », où f désigne un terme source et σ un coefficient qui change de signe sur le domaine, peut ne pas être bien posé au sens de Fredholm, notamment lorsque l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif présente un coin. Pour certaines valeurs du paramètre σ, il apparaît une singularité propagative au niveau du coin et il faut l'ajouter à l'espace pour retrouver un

problème bien posé au sens de Fredholm (cf. Chapitre 5).

Dans le Chapitre 4, nous avons observé que pour un milieu physique absorbant, ce qui revient à considérer un σ possédant une partie imaginaire positive sur tout le domaine, le problème $(\mathscr{P})$ devient un problème coercif. Le passage à la limite sur la dissipation, permettant d'étudier le cas d'un milieu faiblement absorbant, dépend des propriétés de $(\mathscr{P})$. Lorsque ce problème est bien posé, la suite de solutions dissipatives converge vers la solution de $(\mathscr{P})$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Lorsque l'interface présente un coin et qu'il existe une singularité propagative, la convergence de la suite de solutions dissipatives a également lieu mais dans le nouveau cadre fonctionnel. C'est le principe d'absorption limite que nous avons justifié dans le Chapitre 5. Ainsi, nous pouvons voir l'ajout d'un terme dissipatif dans $(\mathscr{P})$ comme un procédé de régularisation.

Le deuxième procédé de régularisation que nous pouvons naturellement envisager consiste à arrondir le coin. C'est ce point que nous souhaitons étudier dans ce chapitre. La problématique peut se décrire ainsi. Plaçons-nous dans une configuration pour laquelle le problème $(\mathscr{P})$ n'est pas bien posé au sens de Fredholm en raison de l'existence d'une singularité propagative. Arrondissons légèrement le coin. Dans ce cas, l'interface devient régulière et le problème $(\mathscr{P})$ dans cette géométrie est bien posé au sens de Fredholm. Que se passe-t-il pour un arrondi très faible ? Autrement dit, quel est le comportement de la suite des solutions, lorsqu'elles sont définies, du problème avec un coin arrondi lorsque l'arrondi tend vers 0 ? Au-delà de l'aspect mathématique, cette question présente un intérêt important pour la physique. En effet, en pratique, il est impossible de réaliser des coins idéaux et ces derniers sont toujours arrondis. Par conséquent, la question à laquelle nous nous intéressons n'est autre que la question de l'existence physique du phénomène de trou noir.

Le problème d'asymptotique pour un coin arrondi et un opérateur elliptique a fait l'objet de nombreuses études (voir notamment [114, 73, 96] et les références utilisées). Présentons brièvement une motivation de ces travaux. Imaginons que l'on souhaite approcher par une méthode numérique la solution d'un problème elliptique dans une géométrie à coin légèrement arrondi. Dans ce cas, il se révèle très coûteux de mailler finement l'arrondi. L'idée du développement asymptotique consiste à déterminer une approximation de la solution dans la géométrie arrondie à partir de fonctions définies dans des géométries limites ne présentant pas de petit paramètre. Ainsi, on ne maille que ces géométries limites et les calculs restent raisonnables. Dans ces études, il est notamment montré que la solution dans la géométrie arrondie converge, lorsque l'arrondi tend vers 0, vers la solution dans la géométrie limite avec une vitesse qui dépend des exposants de singularité associés à la géométrie limite. Ces résultats resteront vrais pour le problème avec changement de signe que nous voulons considérer lorsque le contraste est situé en dehors de l'intervalle critique. Nous ne les démontrerons pas dans ce document mais les techniques que nous allons développer permettraient de les obtenir. Indiquons que ces résultats présentent un intérêt en soi. En effet, pour les technologies basées sur les ondes plasmoniques, l'on cherche à utiliser ces géométries singulières pour confiner de l'énergie au voisinage du coin ou de l'arête en 3D. L'influence de l'arrondi, observée notamment dans [74, 17, 149, 130], doit par conséquent être bien comprise pour effectuer des simulations numériques cruciales dans un domaine où les expérimentations sont coûteuses et longues à mettre en place.

L'étude que nous allons mener dans l'intervalle critique est plus délicate en raison de la nature exotique du problème limite qui est bien posé au sens de Fredholm dans un cadre relativement inhabituel. Il s'agit d'un travail en cours avec X. Claeys [1] et S.A. Nazarov [2], ce dernier étant à l'origine de la méthode que nous allons présenter. Ce travail manque probablement encore de maturité mais nous avons néanmoins choisi de l'exposer pour deux raisons. D'une part, nous allons mettre

1. Université de Toulouse, ISAE, 10, avenue Edouard-Belin, 31055 Toulouse cedex 4, France.
2. Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, 61, Bolshoi pr. V.O., St. Pétersbourg 199178, Russie.

en évidence un phénomène de « valeur propre clignotante » plutôt surprenant. Vous ne pouviez pas manquer cela. D'autre part, la méthode proposée par S.A. Nazarov semble très puissante. Elle permet d'obtenir une estimation *a priori* de façon systématique, point souvent délicat dans le domaine du développement asymptotique.

Notre plan d'étude sera le suivant. Nous commencerons par présenter la géométrie du problème. Dans un second temps, dans la Section 6.1, nous rappellerons les résultats pour les géométries limites que nous avons prouvés dans le Chapitre 5. La section 6.3 sera consacrée à la démonstration d'une estimation *a priori* pour les solutions du problème avec un coin arrondi. Le point original tient dans le fait que cette estimation ne tient pas uniformément : elle est valable pour un paramètre d'arrondi qui n'appartient pas à un ensemble qui possède 0 comme point d'accumulation. Pour obtenir cette estimation, l'idée va consister à utiliser des espaces de Sobolev à poids bien adaptés. Dans la Section 6.4, nous nous servirons de cette estimation *a priori* pour prouver la convergence d'un développement asymptotique au premier ordre. Enfin, nous terminerons par des calculs explicites pour une géométrie simple et des illustrations numériques mettant en évidence ce curieux phénomène de « valeur propre clignotante ».

6.1 Description du problème

6.1.1 Géométrie

Considérons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière polygonale comme celui représenté sur la Figure 6.1 ci-dessous. Nous supposons Ω partitionné en deux sous-domaines $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$ avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1^\delta \cup \overline{\Omega}_2^\delta$ et $\Omega_1^\delta \cap \Omega_2^\delta = \emptyset$. Donnons-nous un segment droit Σ^0 qui intersecte $\partial\Omega$ en seulement deux points O et O' qui ne coïncident pas avec les sommets de $\partial\Omega$. Nous faisons l'hypothèse qu'en O', Σ^0 est perpendiculaire à $\partial\Omega$ et que l'interface $\Sigma^\delta := \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2^\delta \setminus \partial\Omega$ coïncide avec Σ^0 en dehors du disque $B(O, \delta)$.

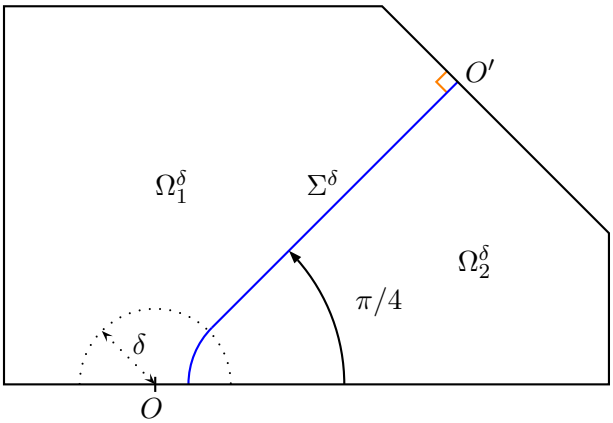


FIGURE 6.1 – Géométrie du problème.

Dans la suite, nous notons (r, θ) les coordonnées polaires centrées en O telle que $\theta = 0$ ou π sur la frontière dans un voisinage de O. Lorsque $\delta \to 0$, les sous-domaines $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$ convergent vers Ω_1^0, Ω_2^0 et nous supposons qu'il existe un disque $B(O, r_0)$ centré en O tel que $\Omega_2^0 \cap B(O, r_0) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0\ ,\ 0 < \theta < \pi/4\}$ et $\Omega_1^0 \cap B(O, r_0) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0\ ,\ \pi/4 < \theta < \pi\}$. Comme dans le Chapitre 5, nous considérons la valeur $\pi/4$ pour l'ouverture du cône simplement car elle permet de mener tous les calculs explicitement (voir le §6.2.1). Il n'y a aucune difficulté à adapter l'analyse que nous allons présenter au cas d'un angle quelconque. Pour fixer les idées, sans perte de généralité, nous supposons que nous pouvons prendre $r_0 = 2$, *i.e.* que $(B(O, 2) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \subset \Omega$. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}_+^*$ désignera l'intervalle $]0; +\infty[$.

Géométrie du coin arrondi

Nous avons supposé l'interface dans Ω^δ égale à un segment droit en dehors de $B(O,\delta)$. Décrivons à présent l'ensemble $\Sigma^\delta \cap B(O,\delta)$. Notons $\Xi := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ le demi-plan supérieur et partitionnons-le en deux ensembles ouverts Ξ_1, Ξ_2 avec $\overline{\Xi} = \overline{\Xi_1} \cup \overline{\Xi_2}$ et $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$. Nous supposons que $\Gamma := \partial\Xi_1 \setminus \partial\Xi = \partial\Xi_2 \setminus \partial\Xi$ est une courbe $\Gamma = \{\phi_\Gamma(t),\ t \in [0;+\infty[\}$ où $\phi_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\partial_t\phi_\Gamma(0)$ est orthogonal à l'axe (Ox) et $\phi_\Gamma(t) = (t,t)$ pour $t \geq 1$, voir la (Figure 6.2) ci-dessous. Dans un voisinage du coin, nous faisons l'hypothèse que $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$ peuvent être définis à partir de Ξ_1, Ξ_2 par auto-similarité :

$$\begin{aligned} \Omega_1^\delta \cap B(O,\delta) &= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}/\delta \in \Xi_1 \cap B(O,1) \,\}\,; \\ \Omega_2^\delta \cap B(O,\delta) &= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}/\delta \in \Xi_2 \cap B(O,1) \,\}. \end{aligned}$$

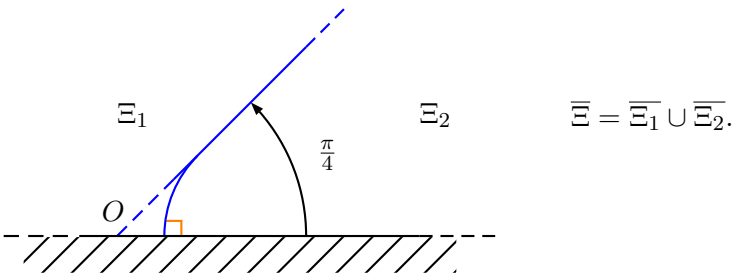


FIGURE 6.2 – Géométrie « gelée ».

6.1.2 Problème étudié

Introduisons la fonction $\sigma^\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\sigma^\delta = \sigma_1$ dans Ω_1^δ, $\sigma^\delta = \sigma_2$ dans Ω_2^δ, où $\sigma_1 < 0$ et $\sigma_2 > 0$ sont des constantes. Pour $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, considérons alors le problème :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\delta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma^\delta \nabla u^\delta) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons quelques notations. Pour un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ avec $d = 1, 2$, le produit de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ (respectivement $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2$) est noté

$$(u,v)_\mathcal{O} = \int_\mathcal{O} uv\, d\boldsymbol{x}, \qquad \forall u, v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}) \text{ (resp. } \mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2).$$

En conséquence, le produit scalaire standard de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})^2$) est $(u,v) \mapsto (u,\overline{v})_\mathcal{O}$. Nous définissons $\|u\|_\mathcal{O} := (u,\overline{u})_\mathcal{O}^{1/2}$ et $\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\mathcal{O})} := \|\nabla u\|_\mathcal{O}$. Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathcal{O}$ le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}) \times \mathrm{H}_0^1(\mathcal{O})$ et nous définissons la norme

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O})} := \sup_{v \in \mathrm{H}_0^1(\mathcal{O}) \setminus \{0\}} \frac{|\,\langle f, v \rangle_\mathcal{O}\,|}{\|v\|_{\mathrm{H}_0^1(\mathcal{O})}}, \qquad \forall f \in \mathrm{H}^{-1}(\mathcal{O}).$$

Ces notations permettent d'associer au problème (6.1) l'opérateur linéaire et continu $\mathcal{A}^\delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ défini par $\langle \mathcal{A}^\delta u, v \rangle_\Omega = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_\Omega$ pour tout $u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. La fonction u^δ vérifie le problème (6.1) si et seulement si elle satisfait $\mathcal{A}^\delta u^\delta = f$. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, $\mathcal{A}^\delta$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro dès lors que $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$. Ceci vient du fait que l'interface Σ^δ est régulière et rencontre $\partial\Omega$ orthogonalement. Dans le Chapitre 1, nous avons également prouvé que lorsque Σ^δ présente une portion droite, dans le cas $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1$, l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$ n'est pas de type Fredholm. De nouveau, la situation $\kappa_\sigma = -1$ semble particulièrement

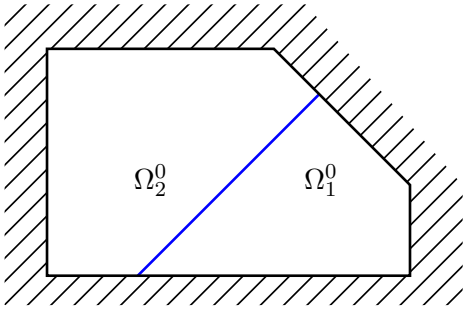


FIGURE 6.3 – Géométrie pour $\delta = 0$.

problématique et nous la mettons de côté.
Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement, lorsque $\delta \to 0$, de la solution u^δ du problème (6.1) lorsqu'elle est bien définie. Remarquons que pour $\delta = 0$, l'interface ne rencontre plus $\partial\Omega$ perpendiculairement.
Pour la configuration choisie, nous savons en vertu des résultats du Chapitre 1 que l'opérateur $\mathcal{A}^0$ est de type Fredholm si et seulement si $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_2^*$ vérifie $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$. Rappelons que la valeur 3 correspond au rapport des valeurs des ouvertures : $3 = (\pi - \pi/4)/(\pi/4)$.
Lorsque $\mathcal{A}^0$ est de type Fredholm, il n'y a pas de différence qualitative entre le problème (6.1) pour $\delta > 0$ et le problème (6.1) pour $\delta = 0$. Dans ce cas, en utilisant la technique nous développons dans ce chapitre, on peut montrer que, si $\mathcal{A}^0$ est injectif, alors $\mathcal{A}^\delta$ est injectif pour δ suffisamment petit. De plus, en définissant $u^\delta = (\mathcal{A}^\delta)^{-1} f$ et $u = (\mathcal{A}^0)^{-1} f$, on peut montrer que la suite (u^δ) converge vers u dans la norme H^1. Puisque ces résultats peuvent être obtenus à partir de la méthode que nous allons utiliser, nous choisissons de ne pas les présenter.
Lorsque $\mathcal{A}^0$ n'est pas de type Fredholm, il y a une différence qualitative entre le problème (6.1) pour $\delta > 0$ et le problème (6.1) pour $\delta = 0$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier une telle transition qualitative. Dans la suite, nous laissons de côté le cas $\kappa_\sigma = -1/3$ car il présente des difficultés techniques qui risquent d'obscurcir la démarche. Nous supposons donc

$$\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in]-1; -1/3[. \tag{6.2}$$

Classiquement en analyse asymptotique, pour étudier le problème (6.1) lorsque $\delta \to 0$, nous nous servirons de résultats établis dans des géométries indépendantes de δ. Nous présentons maintenant ces résultats.

6.2 Géométries limites

6.2.1 Géométrie externe

La première géométrie que nous considérons est obtenue à partir de la Figure 6.1 en prenant $\delta = 0$ (cf. Figure 6.3 ci-dessus). Nous l'appelons *géométrie externe*. Dans cette géométrie, l'interface $\Sigma^0 = \overline{\Omega}_2^0 \cap \overline{\Omega}_1^0$ ne rencontre pas $\partial\Omega$ perpendiculairement et l'opérateur $\mathcal{A}^0$ n'est pas de type Fredholm lorsque $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$. Pour pallier cette difficulté, dans le Chapitre 5, nous avons introduit un nouveau cadre fonctionnel. Rappelons-en la construction.

Pour un terme source donné g, nous souhaitons nous intéresser au problème

$$\text{Trouver } v \text{ tel que } \; -\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla v) = g \quad \text{dans } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{6.3}$$

Ici, σ^0 désigne la fonction telle que $\sigma^0 = \sigma_1$ dans Ω_1^0 et $\sigma^0 = \sigma_2$ dans Ω_2^0. Nous ne précisons pas de cadre fonctionnel pour le moment. Nous aurons à introduire des espaces de Sobolev à poids

adaptés pour retrouver une structure d'opérateur Fredholm classique.

Rappelons quelques éléments concernant les exposants de singularité pour cette configuration. Dans le Chapitre 3, nous avons montré que le problème « trouver $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}_0^1(]0;\pi[) \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla(r^\lambda \varphi(\theta))) = 0$ dans Ω » possède une solution si et seulement si λ appartient à l'ensemble des exposants de singularité

$$\begin{aligned} &\Lambda = \{2k,\, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{i\eta + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-i\eta + 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{avec} \quad \eta = -\frac{2}{\pi} \ln\Big[\ \frac{1}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} + i\sqrt{1 - \Big(\frac{1}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}\Big)^2}\ \Big]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Lorsque $\sigma_2/\sigma_1 \in]-1;-1/3[$, on a $\eta \in]0;+\infty[$, de sorte que l'ensemble Λ contient seulement deux éléments dans la bande $|\Re e\, \lambda| < 2$: $\pm i\eta$. Pour $\lambda = \pm i\eta$, l'espace des fonctions $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(]0;\pi[)$ telles que $\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla(r^{\pm i\eta}\varphi(\theta)) = 0$ est de dimension un et engendré par un certain $\varphi(\theta)$ (le même pour $\lambda = \pm i\eta$), avec

$$\varphi(\theta) = c_\varphi \frac{\sinh(\eta\theta)}{\sinh(\eta\pi/4)} \quad \text{sur} \ \ [0;\pi/4] \qquad \text{et} \qquad \varphi(\theta) = c_\varphi \frac{\sinh(\eta(\pi-\theta))}{\sinh(\eta 3\pi/4)} \quad \text{sur} \ \ [\pi/4\pi].$$

Ci-dessus, $c_\varphi \in \mathbb{R}^*$ désigne une constante. En vertu du Lemme 5.3.6 du Chapitre 4, nous savons que l'intégrale $\int_0^\pi \sigma^0(\theta)\varphi(\theta)^2 d\theta$ est non nulle. Par conséquent, nous pouvons fixer c_φ pour normaliser φ et avoir $\eta \int_0^\pi \sigma^0(\theta)\varphi(\theta)^2 d\theta = 1$.

Remarque 6.2.1 • *Pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1/3$, l'ensemble des exposants de singularité contient la valeur 0. Dans ce cas, la chaîne de Jordan associée à la valeur propre 0 est de longueur 2. Ceci conduit à des complications techniques et, comme annoncé précédemment, nous n'étudions pas cette configuration ici.*
• *Pour $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$ tel que $\kappa_\sigma \to -1^+$, le nombre η tend vers $+\infty$.*
• *Enfin, pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\kappa_\sigma \notin [-1;-1/3]$, on a $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda = 0\} = \emptyset$. L'opérateur $\mathcal{A}^0$ est alors de type Fredholm et d'indice nul.*

Pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$, définissons l'espace $\mathrm{V}_\beta^k(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}_\beta^k(\Omega)} := \Big(\sum_{\alpha+\gamma \leq k} \int_\Omega r^{2(\beta+\alpha+\gamma-k)} |\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma v|^2 \, d\boldsymbol{x}\Big)^{1/2}.$$

Notons en particulier que pour tout β, les éléments de $\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)$ s'annulent sur $\partial\Omega$. La norme sur l'espace dual de $\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)$ est définie de façon usuelle, comme suit

$$\|g\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*} := \sup_{v \in \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle g, v\rangle_\Omega|}{\|v\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)}}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ désigne le crochet de dualité $\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^* \times \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)$. Bien que nous adoptions la même notation pour le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, il n'y aura pas de risque de confusion dans la suite. Pour $0 < \beta < 2$, définissons l'espace

$$\mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega) := \operatorname{vect}\{\psi(r) r^{i\eta} \varphi(\theta)\} \oplus \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega)} := |c| + \|\tilde{v}\|_{\mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)} \quad \text{pour} \quad v(r,\theta) = c\,\psi(r) r^{i\eta} \varphi(\theta) + \tilde{v}(r,\theta).$$

Ici, la fonction de troncature $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+, [0;1])$ est telle que $\psi(r) = 1$ pour $r \leq 1$ et $\psi(r) = 0$ pour $r \geq 2$. Dans le Chapitre 5, nous avons introduit l'opérateur $\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}} : \mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega) \to \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$ tel que

$\langle \mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}} u, v\rangle_\Omega = (\sigma^0 \nabla u, \nabla v)_\Omega$ pour tout $u \in \mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega)$ et tout $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Nous avons prouvé que $\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}}$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro.

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1 *Pour $\beta \in]0;2[$, l'opérateur $\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}}$ est injectif.*

Par conséquent, $\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}} : \mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega) \to \mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*$ définit un isomorphisme et il existe une constante $\mathfrak{K} > 0$ (qui dépend de β) telle que

$$|c| + \|\tilde{v}\|_{\mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)} \leq \mathfrak{K}\, \|\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}} v\|_{\mathrm{V}_\beta^1(\Omega)^*}, \qquad \forall v = c\,\psi(r) r^{i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v} \in \mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega). \tag{6.5}$$

Remarque 6.2.2 *D'après les résultats du Chapitre 5, nous savons que les éléments de $\ker \mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}}$ appartiennent à $\mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$. Par conséquent, l'Hypothèse 1 équivaut à imposer que la seule fonction $u \in \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$ vérifiant $(\sigma^0 \nabla u, \nabla v)_\Omega = 0$ pour tout $v \in \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$ est la fonction nulle.*

6.2.2 Géométrie interne

La seconde géométrie que nous considérons est obtenue en effectuant l'homothétie $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}/\delta$ de centre O. Par cette transformation, Ω devient une nouvelle géométrie Ξ^δ dans laquelle le coin arrondi est fixé. En passant formellement à la limite lorsque $\delta \to 0$, le domaine Ξ^δ devient le domaine limite $\Xi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (voir la Figure 6.2). Les coordonnées polaires dans la *géométrie interne* Ξ sont notées (ρ, θ). Par ailleurs, nous notons σ^∞ la fonction telle que $\sigma^\infty(\boldsymbol{x}) = \sigma_1$ pour $\boldsymbol{x} \in \Xi_1$ et $\sigma^\infty(\boldsymbol{x}) = \sigma_2$ pour $\boldsymbol{x} \in \Xi_2$.

Dans cette géométrie interne, nous aurons à considérer des problèmes similaires à (6.3). Par conséquent, pour $\beta \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, nous introduisons l'espace $\mathrm{W}_\beta^k(\Xi)$ défini comme la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Xi)$ pour la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}_\beta^k(\Xi)} := \Big(\sum_{\alpha+\gamma \leq k} \int_\Xi (1+\rho)^{2(\beta+\alpha+\gamma-k)} |\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma v|^2 \, d\boldsymbol{x}\Big)^{1/2}.$$

Pour ces espaces, le poids en $(1+\rho)$ permet de mesurer le comportement des fonctions uniquement à l'infini et non en O. Remarquons que pour tout β, les éléments de $\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)$ s'annulent sur $\partial\Xi$. La norme sur l'espace dual de $\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)$ est définie de la façon suivante

$$\|g\|_{\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)^*} := \sup_{v \in \mathrm{W}_\beta^1(\Xi)\setminus\{0\}} \frac{|\langle g, v\rangle_\Xi|}{\|v\|_{\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)}}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Xi$ désigne le crochet de dualité $\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)^* \times \mathrm{W}_\beta^1(\Xi)$. Introduisons un espace imposant un comportement propagatif bien particulier à l'infini. Pour $0 < \beta < 2$, définissons

$$\mathrm{W}_{-\beta}^{\mathrm{out}}(\Xi) := \mathrm{vect}\{\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta)\} \oplus \mathrm{W}_\beta^1(\Xi)$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{-\beta}^{\mathrm{out}}(\Xi)} := |c| + \|\tilde{v}\|_{\mathrm{W}_\beta^1(\Xi)} \quad \text{pour} \quad v(\rho,\theta) = c\,\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v}(\rho,\theta).$$

Ici, nous prenons $\chi = 1 - \psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+, [0;1])$, ψ étant la fonction de troncature définie dans le paragraphe précédent. En particulier, on a $\chi(r) = 1$ pour $r \geq 2$ et $\chi(r) = 0$ pour $r \leq 1$. Dans cette seconde géométrie limite, définissons par densité l'opérateur $\mathrm{A}_{-\beta}^{\mathrm{out}} : \mathrm{W}_{-\beta}^{\mathrm{out}}(\Xi) \to \mathrm{W}_{-\beta}^1(\Xi)^*$ tel que $\langle \mathrm{A}_{-\beta}^{\mathrm{out}} u, v\rangle_\Xi = (\sigma^\infty \nabla u, \nabla v)_\Xi$ pour tout $u \in \mathrm{W}_{-\beta}^{\mathrm{out}}(\Xi)$ et tout $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\Xi)$. Pour cet opérateur, on a un résultat similaire au Théorème 5.5.2 du Chapitre 5. Nous n'en donnons par la preuve car elle est très proche de celle du Théorème 5.5.2.

Théorème 6.2.3 *Pour $\beta \in]0;2[$, l'opérateur $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{-\beta} : \mathrm{W}^{\mathrm{out}}_{-\beta}(\Xi) \to \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)^*$ est Fredholm d'indice zéro.*

Imposons l'injectivité pour $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{-\beta}$.

Hypothèse 2 *Pour $\beta \in]0;2[$, l'opérateur $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{-\beta}$ est injectif.*

Ainsi, avec cette hypothèse, $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{-\beta}$ constitue un isomorphisme et il existe $C > 0$ (qui dépend de β) telle que

$$|c| + \|\tilde{v}\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\Xi)} \leq C \, \|\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{-\beta} v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)^*}, \qquad \forall v = c\,\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v} \in \mathrm{W}^{\mathrm{out}}_{-\beta}(\Xi). \tag{6.6}$$

6.3 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous appliquons la méthode du développement raccordé pour obtenir les premiers ordres dans le développement de u^δ. Dans le problème qui nous intéresse, il apparaît une couche limite au voisinage du coin arrondi et nous avons besoin de calculer un développement en champ proche et un développement en champ lointain. Pour séparer les régions interne et externe, réintroduisons les fonctions de troncature régulières χ et ψ telles que

$$\chi(r) + \psi(r) = 1, \qquad \chi(r) = 1 \ \text{ pour } r \geq 2\,, \quad \text{et} \quad \chi(r) = 0 \ \text{ pour } r \leq 1.$$

Dans la suite, nous noterons $\chi_t(r) = \chi(r/t)$ et $\psi_t(r) = \psi(r/t)$ pour $t > 0$. Introduisons également la notation $(\tau_t \cdot v)(r,\theta) := v(r/t,\theta)$ pour $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Décomposons ensuite le terme source $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ en une contribution champ lointain indicée par ext et une contribution champ proche indicée par in :

$$f = f^\delta_{\mathrm{ext}} + \tau_\delta \cdot F^\delta_{\mathrm{in}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle f^\delta_{\mathrm{ext}}, v\rangle_\Omega := \langle f, v\chi_{\sqrt{\delta}}\rangle_\Omega \\ \langle F^\delta_{\mathrm{in}}, v\rangle_\Xi := \delta^{-2}\langle f, (\tau_\delta \cdot v)\,\psi_{\sqrt{\delta}}\rangle_\Omega \\ \langle \tau_\delta \cdot F^\delta_{\mathrm{in}}, v\rangle_\Omega := \delta^2 \langle F^\delta_{\mathrm{in}}, \tau_{1/\delta} \cdot v\rangle_\Xi \end{cases}. \tag{6.7}$$

Dans le cas où $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, cette décomposition s'écrit simplement $f(r,\theta) = f^\delta_{\mathrm{ext}}(r,\theta) + F^\delta_{\mathrm{in}}(r/\delta,\theta)$ avec $f^\delta_{\mathrm{ext}}(r,\theta) = f(r,\theta)\chi(r/\sqrt{\delta})$ et $F^\delta_{\mathrm{in}}(\rho,\theta) = f(\delta\rho,\theta)\psi(\rho\sqrt{\delta})$. En particulier $\mathrm{supp}(f^\delta_{\mathrm{ext}})$ ne rencontre par l'origine et $\mathrm{supp}(F^\delta_{\mathrm{in}})$ est borné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$. En conséquence, on a

$$f^\delta_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^* \quad \text{et} \quad F^\delta_{\mathrm{in}} \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)^*, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

6.3.1 Développement en champ lointain

Dans la région champ lointain, on cherche un développement de $u^\delta(r,\theta)$ de la forme

$$u^\delta(r,\theta) = u^\delta_0(r,\theta) + a(\delta)\,\zeta(r,\theta) + \dots \quad . \tag{6.8}$$

Nous indiquons une dépendance par rapport à δ pour le terme principal u^δ_0 car la donnée f^δ_{ext} pour le développement en champ lointain présente cette dépendance. La fonction ζ, elle, sera associée à une donnée nulle et c'est pourquoi nous ne mettons pas d'exposant δ. Cependant, il est important de préciser que les fonctions u^δ_0 et ζ sont définies dans la géométrie externe qui ne dépend pas de δ. En injectant (6.8) dans l'équation (6.1), nous trouvons $-\mathrm{div}\,(\sigma^0 \nabla u^\delta_0) = f^\delta_{\mathrm{ext}}$. Pour obtenir une solution, nous travaillons dans $\mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ et considérons le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\delta_0 \in \mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma^0 \nabla u^\delta_0) = f^\delta_{\mathrm{ext}} \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

D'après l'Hypothèse 1, le terme u^δ_0 est donc défini de façon unique. De plus, par définition de $\mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$, on a

$$u^\delta_0(r,\theta) = c^\delta_0\,\psi(r) r^{i\eta}\,\varphi(\theta) + \tilde{u}^\delta_0(r,\theta) \qquad \text{où} \quad c^\delta_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \tilde{u}^\delta_0 \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega). \tag{6.10}$$

Dans (6.8), pour le moment, nous ne savons pas quel est la forme adaptée pour la fonction de jauge $a(\delta)$. Nous déterminerons cela plus tard en appliquant le principe de développement raccordé. En injectant (6.8) dans (6.1), nous observons qu'on doit avoir les équations suivantes :

$$\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla \zeta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \zeta = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \tag{6.11}$$

Nous devons chercher ζ dans un espace plus grand que $\mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$, autrement nous serions obligés de conclure $\zeta = 0$ ce qui est exclus. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, considérons l'opérateur borné $\mathcal{A}_\beta : \mathrm{V}^1_\beta(\Omega) \to \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)^*$ tel que $\langle \mathcal{A}_\beta u, v\rangle_\Omega = (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega$, pour tout $u \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$ et tout $v \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. Pour $\beta = 0$, puisque $\mathrm{V}^1_0(\Omega) = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}^0$, où $\mathcal{A}^0$ a été défini dans le §6.1.2. L'équation (6.11) impose $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$. En choisissant $\beta \in]0;2[$, nous connaissons ζ presque complètement, à une constante près $c_\zeta \in \mathbb{C}$ en vertu de la proposition suivante.

Proposition 6.3.1 *Pour $\beta \in]0;2[$, sous l'Hypothèse 1, on a $\dim \ker \mathcal{A}_\beta = 1$.*

Preuve. Notons $w_1(r,\theta) = \psi(r) r^{-i\eta} \varphi(\theta)$. D'après la construction de $\varphi(\theta)$, on a $g = -\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla w_1) \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$. Par conséquent, d'après le Théorème 5.5.2 du Chapitre 5 et l'Hypothèse 1, il existe un unique $w_2 \in \mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ tel que $-\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla w_2) = g$ dans Ω. La fonction $w := w_1 - w_2$ vérifie alors $w \in \ker \mathcal{A}_\beta$. Remarquons que $w \neq 0$ puisque $w - w_1 \in \mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ et $w_1 \notin \mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$. Ainsi, $\dim \ker \mathcal{A}_\beta \geq 1$.

Supposons que $v \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$ soit un autre élément de $\ker \mathcal{A}_\beta$. Puisque $\beta \in]0;2[$ et $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda \leq \beta\} = \{\pm i\eta\}$, d'après le Théorème 5.6.6 du Chapitre 5, il existe $c_2, c_1 \in \mathbb{C}$ tels que $v(r,\theta) - (c_1 \psi(r) r^{i\eta} + c_2 \psi(r) r^{-i\eta})\varphi(\theta) \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. Par conséquent, $v - c_2 w$ est un élément de $\mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ et $v - c_2 w$ appartient à $\ker \mathcal{A}^{\mathrm{out}}_\beta$. Ceci implique $v - c_2 w = 0$ car $\mathcal{A}^{\mathrm{out}}_\beta : \mathrm{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) \to \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ définit un isomorphisme. Ainsi, $\dim \ker \mathcal{A}_\beta \leq 1$. ∎

D'après (6.11), nous devons avoir $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$. En ajustant la fonction de jauge $a(\delta)$ si nécessaire, nous pouvons choisir ζ comme l'unique élément de $\ker \mathcal{A}_\beta$ admettant le développement suivant

$$\zeta(r,\theta) = \psi(r) r^{-i\eta} \varphi(\theta) + c_\zeta\, \psi(r) r^{i\eta} \varphi(\theta) + \tilde{\zeta}(r,\theta) \qquad \text{avec } \tilde{\zeta} \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega) \text{ et } \beta \in]0;2[. \tag{6.12}$$

Lemme 6.3.2 *La constante $c_\zeta \in \mathbb{C}$ du développement (6.12) vérifie $|c_\zeta| = 1$.*

Preuve. De façon très classique, nous allons prouver ce résultat en effectuant un bilan énergétique. Puisque $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$, d'après la définition de $\mathcal{A}_\beta$, on a $0 = \Im m\, \langle \mathcal{A}_\beta \zeta, \chi_\varepsilon \overline{\zeta}\rangle_\Omega = \Im m \int_\Omega \sigma^0 \nabla \zeta \cdot \nabla(\chi_\varepsilon \overline{\zeta}) d\boldsymbol{x} = \Im m \int_\Omega \sigma^0\, \overline{\zeta} \partial_r \zeta\, \partial_r \chi_\varepsilon d\boldsymbol{x}$. Regardons le comportement de cette expression lorsque $\varepsilon \to 0$. En utilisant (6.12), on obtient

$$\begin{aligned}
0 = \Im m \int_\Omega \sigma^0 \overline{\zeta} \partial_r \zeta\, \partial_r \chi_\varepsilon d\boldsymbol{x} &= \int_0^\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \sigma^0(\theta)\, \Im m\, (\overline{\zeta} \partial_r \zeta \partial_r \chi_\varepsilon) r dr d\theta \\
&= \eta \int_0^\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \sigma^0(\theta)\, |\varphi(\theta)|^2 (1 - |c_\zeta|^2) \partial_r \chi_\varepsilon\, dr d\theta + O(\varepsilon) \\
&= (1 - |c_\zeta|^2)\, \eta \int_0^\pi \sigma^0(\theta)\, |\varphi(\theta)|^2 d\theta \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \partial_r \chi_\varepsilon\, dr + O(\varepsilon) \\
&= (1 - |c_\zeta|^2) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Ceci implique $1 - |c_\zeta|^2 = 0$ et conduit au résultat de ce lemme. ∎

Pour résumer, d'un point de vue formel, à un reste près en δ, on a le développement quand $r \to 0$,

$$\begin{aligned}
u^\delta(r,\theta) &= u^\delta_0(r,\theta) + a(\delta)\, \zeta(r,\theta) + \dots \\
&= (\, c^\delta_0 + a(\delta) c_\zeta\,)\, r^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta)\, r^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots \quad .
\end{aligned} \tag{6.13}$$

6.3.2 Développement en champ proche

Dans la région interne, près de O, nous considérons le changement de variable $r = \delta\rho$, nous définissons $U^\delta(\rho,\theta) = u^\delta(r,\theta)$ et nous cherchons un développement de $U^\delta(\rho,\theta)$ de la forme

$$U^\delta(\rho,\theta) = A(\delta)\, Z(\rho,\theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho,\theta) + \dots \quad . \tag{6.14}$$

Comme pour le développement en champ lointain, nous ne savons pas pour le moment quelle est la forme de la fonction de jauge $A(\delta)$. Nous la déterminerons au cours de l'étape de raccordement des développements asymptotiques. Nous avons introduit le terme $\delta^2 U_1^\delta(\rho,\theta)$ dans l'optique de compenser la contribution $F_{\rm in}^\delta$ venant du terme source. En utilisant la relation $r = \delta\rho$ et en injectant (6.14) dans (6.1), nous sommes conduits à

$$\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla Z) = 0 \quad \text{dans } \Xi, \qquad Z = 0 \ \text{ sur } \partial\Xi. \tag{6.15}$$

La fonction Z doit être cherchée dans un espace plus vaste que $\mathrm{W}^{\rm out}_{-\beta}(\Xi)$ pour ne pas avoir $Z = 0$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, définissons l'opérateur continu $\mathrm{A}_{-\beta} : \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi) \to \mathrm{W}^1_\beta(\Xi)^*$ tel que $\langle \mathrm{A}_{-\beta} u, v\rangle_\Xi = (\sigma^\infty \nabla u, \nabla v)_\Xi$ pour tout $u \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)$ et tout $v \in \mathrm{W}^1_\beta(\Xi)$. L'équation (6.15) détermine $Z \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)$, pour $\beta \in]0;2[$, à une constante multiplicative près d'après la

Proposition 6.3.3 *Pour $\beta \in]0;2[$, sous l'Hypothèse 2, on a* $\dim\ker \mathrm{A}_{-\beta} = 1$.

Cette proposition se montre de la même façon que la Proposition 6.3.1. En ajustant la fonction de jauge $A(\delta)$ si nécessaire, nous pouvons choisir $Z(\rho,\theta)$ comme l'unique élément de $\ker\mathrm{A}_{-\beta}$ qui admet le développement

$$Z(\rho,\theta) = \chi(\rho)\rho^{i\eta}\varphi(\theta) + c_{\rm z}\,\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\,\varphi(\theta) + \tilde Z(\rho,\theta) \qquad \text{avec } \tilde Z \in \mathrm{W}^1_\beta(\Xi) \text{ et } \beta \in]0;2[. \tag{6.16}$$

L'existence d'un tel développement pour $Z(\rho,\theta)$ est une conséquence d'un calcul de résidu classique dans la théorie de la transformée de Mellin (cf. Chapitre 3). De nouveau, nous utilisons le fait que pour $\beta \in]0;2[$, on a $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda \le \beta\} = \{\pm i\eta\}$, où Λ désigne l'ensemble des exposants de singularité défini en (6.4). Concernant le coefficient $c_{\rm z}$, on a un résultat similaire au Lemme 6.3.2.

Lemme 6.3.4 *La constante $c_{\rm z} \in \mathbb{C}$ qui intervient dans le développement (6.16) vérifie $|c_{\rm z}| = 1$.*

Maintenant, étudions le second terme dans l'asymptotique de U^δ. En injectant le développement (6.14) dans (6.1) et en utilisant la définition de $F_{\rm in}^\delta(\rho,\theta)$, nous obtenons formellement le problème suivant pour U_1^δ :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } U_1^\delta \in \mathrm{W}^{\rm out}_{-\beta}(\Xi) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla U_1^\delta) = F_{\rm in}^\delta. \end{array}\right.$$

D'après le Théorème 6.2.3, U_1^δ est déterminé de façon unique. Remarquons que par définition de $\mathrm{W}^{\rm out}_{-\beta}(\Xi)$, on a le développement suivant

$$U_1^\delta(\rho,\theta) = c_1^\delta \chi(\rho)\rho^{-i\eta}\,\varphi(\theta) + \tilde U_1^\delta(\rho,\theta) \qquad \text{où} \quad c_1^\delta \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \tilde U_1^\delta \in \mathrm{W}^1_\beta(\Xi). \tag{6.17}$$

Pour récapituler, à un reste près en δ, le champ proche admet le développement suivant lorsque $\rho = r/\delta \to +\infty$,

$$\begin{aligned} U^\delta(\rho,\theta) &= A(\delta)\, Z(\rho,\theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho,\theta) + \dots \\ &= A(\delta)\rho^{i\eta}\varphi(\theta) + (A(\delta)c_{\rm z} + \delta^2\, c_1^\delta)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta) + \dots, \end{aligned}$$

$$i.e., \quad u^\delta(r,\theta) = A(\delta)\Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{i\eta}\varphi(\theta) + (A(\delta)c_{\rm z} + \delta^2\, c_1^\delta)\Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{-i\eta}\varphi(\theta) + \dots \quad . \tag{6.18}$$

6.3.3 Le principe de raccord

Pour conclure la construction des premiers termes de l'asymptotique de u^δ, il nous reste à déterminer les fonctions de jauge $a(\delta)$ et $A(\delta)$. Pour ce faire, nous allons appliquer le principe de raccord qui consiste dans le cas présent, à égaler les développements (6.13) et (6.18) lorsque $r, \delta \to 0$. Nous obtenons

$$(\, c_0^\delta + a(\delta) c_\zeta \,)\, r^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta)\, r^{-i\eta} \varphi(\theta) = A(\delta) \Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{i\eta} \varphi(\theta) + A(\delta)\, c_{\mathrm{z}} \Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{-i\eta} \varphi(\theta). \tag{6.19}$$

Pour le raccord, nous ne prenons pas en compte le terme dans (6.18) mettant en jeu c_1^δ car il est d'un ordre inférieur, puisque multiplié par δ^2. Comme $r^{i\eta}$ et $r^{-i\eta}$ sont indépendants, l'équation (6.19) conduit aux conditions de raccord suivantes

$$c_0^\delta + a(\delta) c_\zeta = A(\delta)\, \delta^{-i\eta} \qquad \text{et} \qquad a(\delta) = A(\delta)\, c_{\mathrm{z}}\, \delta^{i\eta}. \tag{6.20}$$

Dans ces équations, $c_0^\delta, c_\zeta, c_{\mathrm{z}}$ sont des données connues. Le système (6.20) en $a(\delta)$, $A(\delta)$ possèdent une unique solution sous la condition suivante

$$\delta^{-2i\eta} \neq c_{\mathrm{z}} c_\zeta. \tag{6.21}$$

Cette condition nécessite des commentaires. Tout d'abord, remarquons qu'il n'est pas commun que la définition des termes du développement asymptotique nécessite une condition sur δ. Observons également que, puisque $|c_{\mathrm{z}} c_\zeta| = 1$ d'après les Lemmes 6.3.2 et 6.3.4, il existe $\delta_\star \in]0; +\infty[$ tel que $c_{\mathrm{z}} c_\zeta = \delta_\star^{-2i\eta}$. Par conséquent, la condition (6.21) n'est pas satisfaite pour δ appartenant à $\{\, (e^{\pi/\eta})^k\, \delta_\star\, , k \in \mathbb{Z} \,\}$. C'est une situation inconfortable car l'ensemble $\{\, (e^{\pi/\eta})^k\, \delta_\star\, , k \in \mathbb{Z} \,\}$ admet 0 comme point d'accumulation, si bien que (6.21) ne peut être garantie en imposant une condition de la forme « $\delta \in]0; \delta_0[$ pour un certain $\delta_0 > 0$ suffisamment petit ». Dans le cas où (6.21) est vraie, on a l'expression suivante pour les fonctions de jauge

$$a(\delta) = \frac{c_0^\delta\, c_{\mathrm{z}}\, \delta^{2i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}} \qquad \text{et} \qquad A(\delta) = \frac{c_0^\delta\, \delta^{i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}}.$$

D'après ces relations, lorsque $\delta \to 0$, les deux fonctions de jauge sont *a priori* non bornées, ce qui brise tout espoir d'établir une estimation *a priori*. Pour cette raison, nous devons imposer une restriction sur l'ensemble des valeurs de δ.

Définition 6.3.5 *Pour* $\alpha \in]0; 1/2[$, *définissons* $\mathrm{I}(\alpha) := \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \big[\, \delta_\star\, e^{(k+\alpha)\frac{\pi}{\eta}};\ \delta_\star\, e^{(k+1-\alpha)\frac{\pi}{\eta}} \,\big]$.

Notons que $\mathrm{I}(\alpha)$ admet 0 comme point d'accumulation. Dans la suite de ce chapitre, la phrase « $\delta \to 0$ » doit être comprise dans le sens $\delta \to 0$ *et* $\delta \in \mathrm{I}(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in]0; 1/2[$. Pour $\delta \in \mathrm{I}(\alpha)$, les fonctions de jauge restent bornées lorsque $\delta \to 0$, *i.e.* il existe $C_\alpha > 0$ indépendante de δ telle que

$$|a(\delta)| + |A(\delta)| \leq C_\alpha\, |c_0^\delta|, \qquad \forall \delta \in \mathrm{I}(\alpha). \tag{6.22}$$

6.3.4 Champ approché

Dans ce paragraphe, nous construisons une approximation $\hat{u}^\delta$ de u^δ au moyen des développements en champ proche et lointain. En accord avec la méthode des développements raccordés et en observant que $\chi_\delta(r) + \psi(r) - \psi(r)\chi_\delta(r) = 1$, définissons

$$\hat{u}^\delta(r,\theta) := u_{\mathrm{ext}}^\delta(r,\theta)\chi_\delta(r) + U_{\mathrm{in}}^\delta(r/\delta,\theta)\psi(r) - m^\delta(r,\theta)\chi_\delta(r)\psi(r)$$

$$\text{avec} \quad \left| \begin{array}{lcl} u_{\mathrm{ext}}^\delta(r,\theta) & = & u_0^\delta(r,\theta) + a(\delta)\zeta(r,\theta) \\ U_{\mathrm{in}}^\delta(\rho,\theta) & = & A(\delta) Z(\rho,\theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho,\theta) \\ m^\delta(r,\theta) & = & A(\delta)(r/\delta)^{i\eta}\varphi(\theta) + a(\delta) r^{-i\eta}\varphi(\theta) \end{array} \right. . \tag{6.23}$$

Rappelons que nous avons introduit l'application τ_δ, telle que, pour toute fonction v, $(\tau_\delta \cdot v)(r,\theta) := v(r/\delta,\theta)$. Vérifions que $\hat{u}^\delta$ satisfait l'équation (6.1) à un « petit » reste près. Tout d'abord, il est clair, d'après la définition de $\zeta, Z, u_0^\delta, U_1^\delta$ et $\varphi(\theta)$, que $\hat{u}^\delta = 0$ sur $\partial\Omega$ pour δ suffisamment petit. Ensuite, pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned}
(\sigma^\delta \nabla \hat{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= (\sigma^0 \nabla(\chi_\delta\, u_{\mathrm{ext}}^\delta), \nabla v)_\Omega + (\sigma^\delta \nabla \tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta}\, U_{\mathrm{in}}^\delta), \nabla v)_\Omega - (\sigma^\delta \nabla(\chi_\delta \psi\, m^\delta), \nabla v)_\Omega \\
&= \langle f_{\mathrm{ext}}^\delta, \chi_\delta\, v\rangle_\Omega + (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, u_{\mathrm{ext}}^\delta \nabla v - v \nabla u_{\mathrm{ext}}^\delta)_\Omega \\
&\quad + \langle \delta^2 F_{\mathrm{in}}^\delta, \psi_{1/\delta}\,(\tau_{1/\delta} \cdot v)\,\rangle_\Xi + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, U_{\mathrm{in}}^\delta \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla U_{\mathrm{in}}^\delta)_\Xi \\
&\quad - (\sigma^\delta \nabla(\chi_\delta\, \psi),\, m^\delta \nabla v - v \nabla m^\delta)_\Omega.
\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons utilisé le fait que $\sigma^\delta = \sigma^0$ sur $\mathrm{supp}(\chi_\delta)$ et $\sigma^\delta = \tau_\delta \cdot \sigma^\infty$ sur $\mathrm{supp}(\psi)$. Nous avons également utilisé la l'égalité $(\sigma^\delta \nabla m^\delta, \nabla v)_\Omega = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mathrm{supp}(v) \subset \mathrm{supp}(\chi_\delta\, \psi)$ (ceci provient de la définition de $\varphi(\theta)$). Maintenant, observons que $f_{\mathrm{ext}}^\delta \chi_\delta = f_{\mathrm{ext}}^\delta$ et $F_{\mathrm{in}}^\delta\, \psi_{1/\delta} = F_{\mathrm{in}}^\delta$ pour δ assez petit. Rappelons que $f = f_{\mathrm{ext}}^\delta + \tau_\delta \cdot F_{\mathrm{in}}^\delta$, et $-\chi_\delta\, \psi = 1 - \chi_\delta - \psi$. Notons $M^\delta := \tau_{1/\delta} \cdot m^\delta$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\sigma^\delta \nabla \hat{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= \langle f, v\rangle_\Omega \\
&\quad + (\,\sigma^0 \nabla \chi_\delta,\, (u_{\mathrm{ext}}^\delta - m^\delta) \nabla v - v \nabla (u_{\mathrm{ext}}^\delta - m^\delta)\,)_\Omega \\
&\quad + (\,\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta},\, (U_{\mathrm{in}}^\delta - M^\delta) \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla (U_{\mathrm{in}}^\delta - M^\delta)\,)_\Xi.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Ainsi $\hat{u}^\delta$ vérifie bien la même équation que (6.1) à un reste près. Remarquons que u_0^δ, U_1^δ et $a(\delta), A(\delta)$ dépendent linéairement de f. Par conséquent, nous pouvons introduire les opérateurs $\hat{R}^\delta : \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $K^\delta : \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ définis respectivement par $\hat{R}^\delta f = \hat{u}^\delta$ et

$$\begin{aligned}
\langle K^\delta f, v\rangle_\Omega &= (\,\sigma^0 \nabla \chi_\delta,\, (u_{\mathrm{ext}}^\delta - m^\delta) \nabla v - v \nabla (u_{\mathrm{ext}}^\delta - m^\delta)\,)_\Omega \\
&\quad + (\,\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta},\, (U_{\mathrm{in}}^\delta - M^\delta) \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla (U_{\mathrm{in}}^\delta - M^\delta)\,)_\Xi
\end{aligned} \tag{6.25}$$

pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. D'après (6.24), on l'identité suivante

$$\mathcal{A}^\delta \cdot \hat{R}^\delta = \mathrm{Id} + K^\delta, \tag{6.26}$$

où nous rappelons que $\mathcal{A}^\delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ désigne l'opérateur tel que $\langle \mathcal{A}^\delta u, v\rangle_\Omega = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_\Omega$, pour u, v dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Nous allons prouver que la norme de K^δ est petite devant 1 de sorte que $\hat{R}^\delta \cdot (\mathrm{Id} + K^\delta)^{-1}$ constitue un inverse à droite de $\mathcal{A}^\delta$. Puisque $\mathcal{A}^\delta$ est autoadjoint, cela prouvera que $\hat{R}^\delta \cdot (\mathrm{Id} + K^\delta)^{-1}$ est également un inverse à gauche pour $\mathcal{A}^\delta$ et conduira au résultat de stabilité désiré. Nous avons besoin d'une estimation de K^δ en norme d'opérateur lorsque $\delta \to 0$. Cette estimation sera formulée dans une norme plutôt inhabituelle dépendant de δ. Définissons

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)} := \Big(\int_\Omega (\delta + r)^{2\beta} |\nabla v|^2 r dr d\theta + \int_\Omega (\delta + r)^{2(\beta-1)} |v|^2 r dr d\theta \Big)^{1/2} \\
\text{et} \quad &\|g\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*} := \sup_{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle g, v\rangle|}{\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)}}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Pour $\delta > 0$ fixé, il y a une équivalence claire entre $\|\cdot\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)}$ et la norme usuelle $\|\cdot\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. Cependant, pour δ tendant vers 0, ces deux normes adoptent des comportements différents. Les normes (6.27) sont bien adaptées à l'analyse asymptotique que nous souhaitons mener car elles partagent des similarités avec les normes à poids classiques.

6.3.5 Estimation du reste

Pour $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ fixé, nous bornons $\|K^\delta f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}$ au moyen de $\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}$. Dans cette optique, observons que $\sup_{\mathbb{R}} |r\partial_r \chi_\delta|$ et $\sup_{\mathbb{R}} |\rho\partial_\rho \psi_{1/\delta}|$ restent uniformément bornées lorsque $\delta \to 0$. De plus,

$K^\delta f$ dépend uniquement des valeurs de $u^\delta_{\text{ext}} - m^\delta$ et $U^\delta_{\text{in}} - M^\delta$ dans les régions $\mathbb{Q}^\delta$ et $\mathbb{Q}^{1/\delta}$, avec $\mathbb{Q}^t := \{\boldsymbol{x}(r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+ \mid t \leq r \leq 2t\}$ pour $t > 0$. Par conséquent, d'après (6.25), pour β, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dont les valeurs seront précisées plus tard, on a [3]

$$\begin{aligned} |\langle K^\delta f, v\rangle_\Omega| \quad \leq \quad & C\, \|u^\delta_{\text{ext}} - m^\delta\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^\delta)} \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\varepsilon}(\mathbb{Q}^\delta)} \\ & + C\, \|U^\delta_{\text{in}} - M^\delta\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \|\tau_{1/\delta} \cdot v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Dans l'estimation ci-dessus, nous utilisons le fait que $\mathrm{supp}(\nabla\chi_\delta) \subset \mathbb{Q}^\delta$ et $\mathrm{supp}(\nabla\psi_{1/\delta}) \subset \mathbb{Q}^{1/\delta}$. Bornons d'abord les termes mettant en jeu la fonction test $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\varepsilon}(\mathbb{Q}^\delta)} \leq C\, \delta^\varepsilon \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta}(\mathbb{Q}^\delta)} \leq C\, \delta^\varepsilon \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\mathbb{Q}^\delta)} \leq C\, \delta^\varepsilon \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)} \\ & \|\tau_{1/\delta} \cdot v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})} = \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta+\varepsilon,\delta}(\mathbb{Q}^1)} \leq C\, \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\mathbb{Q}^1)} \leq C\, \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

En injectant (6.29) dans (6.28), en divisant par $\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)}$ et en prenant le supremum sur tout les $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, nous obtenons

$$\|K^\delta f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*} \leq C\, \delta^\varepsilon\, \|u^\delta_{\text{ext}} - m^\delta\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^\delta)} + C\, \delta^{\beta-\varepsilon}\, \|U^\delta_{\text{in}} - M^\delta\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})}. \tag{6.30}$$

Bornons les termes associés à $u^\delta_{\text{ext}} - m^\delta = \tilde{u}^\delta_0 + a(\delta)\tilde{\zeta} \in \mathrm{V}^1_\gamma(\Omega)$ pour tout $\gamma \in]-2;0[$. Fixons $\beta \in]0;2[$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\beta + \varepsilon < 2$. D'après (6.5) et (6.9), nous avons

$$\begin{aligned} \|u^\delta_{\text{ext}} - m^\delta\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^\delta)} \quad & \leq \quad |a(\delta)|\, \|\tilde{\zeta}\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\Omega)} + \|\tilde{u}^\delta_0\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\Omega)} \\ & \leq \quad C\, |c^\delta_0| + \|\tilde{u}^\delta_0\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta-\varepsilon}(\Omega)} \leq C\, \|f^\delta_{\text{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\varepsilon}(\Omega)^*}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Maintenant, bornons le terme de (6.30) associé à $U^\delta_{\text{in}} - M^\delta = A(\delta)\tilde{Z} + \delta^2 U^\delta_1$. Imposons à ε de vérifier la relation $0 < \beta - \varepsilon$. D'après (6.22) et puisque $\tilde{Z} \in \mathrm{W}^1_\gamma(\Xi)$ pour tout $\gamma \in]0;2[$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|U^\delta_{\text{in}} - M^\delta\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})} & \leq |A(\delta)|\, \|\tilde{Z}\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\Xi)} + \delta^2 \|U^\delta_1\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \\ & \leq C\, |c^\delta_0| + C\, \delta^{2-\beta+\varepsilon} \big(|c^\delta_1| + \|\tilde{U}^\delta_1\|_{\mathrm{W}^1_{\beta-\varepsilon}(\Xi)} \big) \\ & \leq C\, \|f^\delta_{\text{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta-\varepsilon}(\Omega)^*} + C\, \delta^{2-\beta+\varepsilon} \|F^\delta_{\text{in}}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\Xi)^*}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

En injectant (6.31) et (6.32) dans (6.30), nous trouvons alors

$$\|K^\delta f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*} \leq C\, \delta^\varepsilon\, \|f^\delta_{\text{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\varepsilon}(\Omega)^*} + C\, \delta^{\beta-\varepsilon}\, \|f^\delta_{\text{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta-\varepsilon}(\Omega)^*} + C\, \delta^2 \|F^\delta_{\text{in}}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\Xi)^*}. \tag{6.33}$$

Pour conclure l'estimation, il ne reste plus qu'à examiner séparément chacun des termes qui apparaissent dans le membre de droite ci-dessus.

Borne pour le membre de droite de (6.33)

Nous avons d'abord besoin d'une borne pour f^δ_{ext}. Fixons $\nu = \pm\varepsilon$. Considérons v un élément de $\mathrm{V}^1_{\beta+\nu}(\Omega)$. Notons que $v\chi_{\sqrt{\delta}} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Observons également que $\|v\chi_{\sqrt{\delta}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)} \leq C\, \delta^{-\nu/2} \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\nu}(\Omega)}$. D'après (6.7), nous avons

$$\begin{aligned} |\langle f^\delta_{\text{ext}}, v\rangle_\Omega| = |\langle f, v\chi_{\sqrt{\delta}}\rangle_\Omega| \quad & \leq \quad \|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}\, \|v\chi_{\sqrt{\delta}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)} \\ & \leq \quad C\, \delta^{-\nu/2} \|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}\, \|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\nu}(\Omega)}. \end{aligned}$$

3. N.B. : dans ce paragraphe et le suivant, $C > 0$ désigne une constante indépendante de δ qui peut varier d'une ligne à l'autre.

Divisons par $\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\nu}(\Omega)}$ et prenons le supremum sur tous les v. Dans les deux cas $\nu = \pm\varepsilon$, nous obtenons

$$\|f^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta+\varepsilon}(\Omega)^*} \leq C\,\delta^{-\varepsilon/2}\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*} \quad \text{et} \quad \|f^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta-\varepsilon}(\Omega)^*} \leq C\,\delta^{\varepsilon/2}\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}. \tag{6.34}$$

Pour obtenir une borne pour F^δ_{in}, considérons $v \in \mathrm{W}^1_{-\beta}(\Xi)$. En utilisant la définition de F^δ_{in} donnée en (6.7) et puisque $\rho \leq 2/\sqrt{\delta}$ dans $\mathrm{supp}(\psi_{1/\sqrt{\delta}})$, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\langle F^\delta_{\mathrm{in}}, v\rangle_\Xi| &\leq \delta^{-2}\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}\|(\tau_\delta v)\psi_{\sqrt{\delta}}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)} \\ &\leq \delta^{\beta-2}\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}\|v\psi_{1/\sqrt{\delta}}\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\Xi)} \leq C\,\delta^{-2+\varepsilon/2}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}\,\|v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\Xi)}. \end{aligned}$$

Divisant par $\|v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\Xi)}$ et prenant le supremum sur les v, nous pouvons écrire

$$\|F^\delta_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta+\varepsilon}(\Xi)^*} \leq C\,\delta^{-2+\varepsilon/2}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}. \tag{6.35}$$

Conclusion de l'estimation

Nous concluons le calcul en injectant (6.34) et (6.35) dans (6.33). Pour $\varepsilon > 0$ tel que $\beta + \varepsilon < 2$ et $\beta - \varepsilon > 0$, cela montre qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|K^\delta f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*} \leq C\,(\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2})\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}, \qquad \forall f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega),\ \ \forall \delta \in]0;1[\cap \mathrm{I}(\alpha). \tag{6.36}$$

Ce résultat signifie qu'au sens d'une norme bien choisie, l'opérateur K^δ tend vers 0 lorsque $\delta \to 0$. Pour tout opérateur borné $T : \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, définissons la norme

$$\|T, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*\| := \sup_{g\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|Tg\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}}{\|g\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}}.$$

Nous venons de montrer que $\|K^\delta, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*\|$ tend vers 0 lorsque $\delta \to 0$. Par conséquent, l'opérateur $\mathrm{Id} + K^\delta$, qui intervient dans le membre de droite de (6.24), est inversible pour δ suffisamment petit. Ainsi $\hat{R}^\delta \cdot (\mathrm{Id} + K^\delta)^{-1}$ constitue la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$.

C'est un résultat intéressant car il montre que, dès lors que les Hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, le problème (6.1), posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ possède une unique solution pour $\delta \in \mathrm{I}(\alpha)$ suffisamment petit.

6.3.6 Résultat de stabilité

Nous utilisons ceci pour prouver une estimation de stabilité pour le problème (6.1). Pour l'obtenir, nous avons besoin de borner $\hat{R}^\delta$ pour la norme dépendant de δ suivante :

$$\|T, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)\| := \sup_{g\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|Tg\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}}{\|g\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}}.$$

Pour $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ fixé, revenons à l'expression de $\hat{R}^\delta f = \hat{u}^\delta$ fournie par (6.23). Notons $\mathbb{T}^\delta := \{\boldsymbol{x}(r,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+ \mid r \geq \delta\}$. Il est facile de vérifier que $\|\chi_\delta v\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\|v\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)}$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et tout $\delta \in]0;1[$. Par conséquent, on a

$$\|\hat{u}^\delta\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,\|u^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} + C\,\|m^\delta\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} + \|\tau_\delta\cdot(\psi_{1/\delta}U^\delta_{\mathrm{in}})\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}. \tag{6.37}$$

Par un calcul direct, en prenant en compte (6.22), en appliquant (6.5) à c^δ_0 et en utilisant (6.34) avec $\varepsilon = 0$, on obtient

$$\|m^\delta\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} \leq C|\ln\delta|\,|c^\delta_0| \leq C'|\ln\delta|\,\|f^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*} \leq C''|\ln\delta|\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}. \tag{6.38}$$

Puisque Ω est borné, l'espace $\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans $\mathrm{V}^1_0(\Omega)$. Autrement dit, on a $\|v\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} \leq C\|v\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)}$ pour tout $v \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$. De plus, $\|\zeta\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} = O(|\ln\delta|)$. Par conséquent, en prenant en compte (6.22), et (6.5) appliqué à c_0^δ, on trouve

$$\begin{aligned}\|u^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} &\leq \|u_0^\delta\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)} + |a(\delta)|\ \|\zeta\|_{\mathrm{V}^1_0(\mathbb{T}^\delta)}\\ &\leq C|\ln\delta|\ \big(|c_0^\delta| + \|\tilde{u}_0^\delta\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)}\big)\\ &\leq C|\ln\delta|\ \|f^\delta_{\mathrm{ext}}\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*} \leq C|\ln\delta|\ \|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}.\end{aligned} \tag{6.39}$$

Travaillons enfin sur le troisième terme dans le second membre de (6.37). Remarquons que $\Xi \cap \mathrm{supp}(\psi_{1/\delta}) = \Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta}$. Nous supposons que δ est suffisamment petit, *i.e.* $\delta \leq 2$, de sorte que $\delta \leq 2/(1+\rho)$ dans $\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\|\tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U^\delta_{\mathrm{in}})\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} &\leq C\ \|U^\delta_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{W}^1_0(\Xi\setminus\mathbb{T}_{2/\delta})}\\ &\leq C\ |A(\delta)|\ \|Z(\delta)\|_{\mathrm{W}^1_0(\Xi\setminus\mathbb{T}_{2/\delta})} + C\ \delta^2\|U^\delta_1\|_{\mathrm{W}^1_0(\Xi\setminus\mathbb{T}_{2/\delta})}\\ &\leq C\,|\ln\delta|\ |c_0^\delta| + C\ |\ln\delta|\,\delta^2(|c_1^\delta| + \|\tilde{U}_1^\delta\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\Xi)}).\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons utilisé $\|Z(\delta)\|_{\mathrm{W}^1_0(\Xi\setminus\mathbb{T}_{2/\delta})} = O(|\ln\delta|)$ et la décomposition (6.17). Maintenant, il reste à utiliser (6.5) appliqué à c_0^δ, (6.6) appliqué à c_1^δ, ainsi que (6.34) et (6.35) avec $\varepsilon = 0$. Ceci conduit à

$$\|\tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U^\delta_{\mathrm{in}})\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\ |\ln\delta|\ \|f\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}. \tag{6.40}$$

Pour conclure, injectons (6.38), (6.39) et (6.40) dans (6.37). Puisque $\hat{u}^\delta = \hat{R}^\delta f$, pour δ suffisamment petit appartenant à $]0;1[\cap\mathrm{I}(\alpha)$, nous obtenons l'estimation

$$\|\hat{R}^\delta, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)\| \leq C\ |\ln\delta|. \tag{6.41}$$

Cette estimation constitue la dernière pierre pour établir le résultat de stabilité pour le problème (6.1). Nous l'énonçons et le prouvons maintenant.

Théorème 6.3.6 *Soit $\beta \in]0;2[$. Sous les Hypothèses 1 et 2, il existe δ_0 tel que le problème (6.1) possède une unique solution pour tout $\delta \in]0;\delta_0[\cap\mathrm{I}(\alpha)$, avec $\alpha \in]0;1/2[$. De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que*

$$\|u^\delta\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq\ C\ |\ln\delta|\ \|\mathrm{div}\,(\sigma^\delta\nabla u^\delta)\|_{\mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*}, \qquad \forall u^\delta \in \mathrm{H}^1_0(\Omega),\ \ \forall\delta \in]0;\delta_0[\cap\mathrm{I}(\alpha).$$

Preuve. Le résultat d'inversibilité a déjà été établi à la fin du §6.3.5. À présent, nous devons établir une borne supérieure pour $\|(\mathcal{A}^\delta)^{-1}, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)\|$ où $\mathcal{A}^\delta$ a été défini en (6.25). D'après (6.26), (6.36) et (6.41), on a

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}^\delta)^{-1}, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)\|\\ \leq\ &\|\hat{R}^\delta, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)\| \cdot \|(\mathrm{Id} + K^\delta)^{-1}, \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^* \to \mathrm{V}^1_{\beta,\delta}(\Omega)^*\| \leq \frac{C\ |\ln\delta|}{1 - (\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2})}.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve car $\delta \mapsto (1 - (\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2}))^{-1}$ reste bornée pour δ dans $]0;\delta_0[\cap\mathrm{I}(\alpha)$. ■

6.4 Développement asymptotique au premier ordre

Nous savons maintenant que pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (6.1) possède une unique solution pour $\delta \in \mathrm{I}(\alpha)$ suffisamment petit. Pour obtenir le résultat de stabilité du Théorème 6.3.6, nous avons utilisé un développement asymptotique bien choisi au premier ordre et des espaces à poids bien adaptés. Dans cette section, nous construisons un développement asymptotique de u^δ plus standard, avec des termes qui ne dépendent pas de δ (mis à part, bien sûr, les fonctions de jauge), au premier ordre. Nous supposons que le terme source f dans (6.1) appartient à $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$ avec $\beta \in]0;2[$. Puisque $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \subset \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$, on a $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^* \subset \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

6.4.1 Construction du développement

Commençons par construire le développement. De nouveau, nous allons définir un champ proche et un champ lointain.

Développement en champ lointain

Dans la région externe, nous cherchons un développement de $u^\delta(r,\theta)$ de la forme

$$u^\delta(r,\theta) = u^0(r,\theta) + a(\delta)\,\zeta(r,\theta) + \dots$$

avec $\left|\begin{array}{l} u^0 := (\mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}})^{-1} f \in \mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega), \text{ l'opérateur } \mathcal{A}_\beta^{\mathrm{out}} \text{ étant défini dans le §6.2.1 ;} \\ \zeta \text{ définie en (6.12).} \end{array}\right.$

Par définition de $\mathrm{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega)$, on a $u^0(r,\theta) = c^0\,\psi(r) r^{i\eta}\,\varphi(\theta) + \tilde{u}^0(r,\theta)$, avec $c^0 \in \mathbb{C}$ et $\tilde{u}^0 \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)$ qui vérifient, d'après (6.5), $|c^0| + \|\tilde{u}^0\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)} \leq \mathfrak{K}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}$. Puisque ζ admet le développement (6.12), à un reste près en δ, on a le développement suivant pour le champ lointain lorsque $r \to 0$:

$$u^\delta(r,\theta) = (\,c^0 + a(\delta)c_\zeta\,)\,r^{i\eta}\varphi(\theta) + a(\delta)\,r^{-i\eta}\varphi(\theta) + \dots \quad .$$

Développement en champ proche

Dans la région interne, près de O, nous introduisons de nouveau $r = \delta\rho$ et nous cherchons un développement de $u^\delta(r,\theta)$ de la forme

$$u^\delta(r,\theta) = A(\delta)\,Z(\rho,\theta) + \dots$$

avec Z définie dans (6.16). À un reste près en δ, on a le développement suivant pour le champ proche quand $\rho = r/\delta \to +\infty$:

$$\begin{array}{rrcl} & U^\delta(r,\theta) & = & A(\delta)\,\rho^{i\eta}\varphi(\theta) + A(\delta)c_{\mathrm{z}}\rho^{-i\eta}\varphi(\theta) + \dots, \\ i.e., & u^\delta(r,\theta) & = & A(\delta)\Big(\dfrac{r}{\delta}\Big)^{i\eta}\varphi(\theta) + A(\delta)c_{\mathrm{z}} + \Big(\dfrac{r}{\delta}\Big)^{-i\eta}\varphi(\theta) + \dots \quad . \end{array}$$

Principe du raccord

Comme dans le paragraphe 6.3.3, le principe du raccord permet de déterminer les fonctions de jauge $a(\delta)$ et $A(\delta)$. Nous obtenons, en redéfinissant $a(\delta)$ et $A(\delta)$,

$$a(\delta) = \frac{c^0\,c_{\mathrm{z}}\,\delta^{2i\eta}}{1-(\delta/\delta_\star)^{2i\eta}} \qquad \text{et} \qquad A(\delta) = \frac{c^0\,\delta^{i\eta}}{1-(\delta/\delta_\star)^{2i\eta}}.$$

6.4.2 Champ approché et estimations d'erreur

Définissons le champ

$$\check{u}^\delta(r,\theta) := u_{\mathrm{ext}}(r,\theta)\chi_\delta(r) + U_{\mathrm{in}}(r/\delta,\theta)\psi(r) - m(r,\theta)\chi_\delta(r)\psi(r)$$

$$\text{avec} \quad \left|\begin{array}{lcl} u_{\mathrm{ext}}(r,\theta) & = & u^0(r,\theta) + a(\delta)\zeta(r,\theta) \\ U_{\mathrm{in}}(\rho,\theta) & = & A(\delta)Z(\rho,\theta) \\ m(r,\theta) & = & A(\delta)(r/\delta)^{i\eta}\varphi(\theta) + a(\delta)r^{-i\eta}\varphi(\theta) \end{array}\right. . \tag{6.42}$$

Nous allons prouver que cette fonction constitue une bonne approximation de u^δ. De nouveau, soulignons que $\check{u}^\delta$ diffère de $\hat{u}^\delta$ introduite en (6.23) car elle est construite à partir de termes qui ne dépendent pas de δ.

En injectant l'expression de $u^\delta - \check{u}^\delta$ dans l'estimation de stabilité du Théorème 6.3.6, nous obtenons, pour $\varepsilon \in]0;\beta[$ et δ_0 suffisamment petit,

$$\|u^\delta - \check{u}^\delta\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,|\ln\delta|\,\|\mathrm{div}\,(\sigma^\delta\nabla(u^\delta - \check{u}^\delta))\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)^*}, \qquad \forall\delta \in]0;\delta_0[\cap \mathrm{I}(\alpha). \tag{6.43}$$

Estimons le terme de droite de l'équation précédente. Pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, en procédant comme dans le §6.3.4, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}(\sigma^\delta\nabla\check{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= (\sigma^0\nabla(\chi_\delta\, u_{\mathrm{ext}}), \nabla v)_\Omega + (\sigma^\delta\nabla\tau_\delta\cdot(\psi_{1/\delta}\, U_{\mathrm{in}}), \nabla v)_\Omega - (\sigma^\delta\nabla(\chi_\delta\psi\, m), \nabla v)_\Omega \\ &= \langle f, \chi_\delta\, v\rangle_\Omega + (\sigma^0\nabla\chi_\delta, u_{\mathrm{ext}}\nabla v - v\nabla u_{\mathrm{ext}})_\Omega \\ &\quad + (\sigma^\infty\nabla\psi_{1/\delta}, U_{\mathrm{in}}\nabla(\tau_{1/\delta}\cdot v) - (\tau_{1/\delta}\cdot v)\nabla U_{\mathrm{in}})_\Xi \\ &\quad - (\sigma^\delta\nabla(\chi_\delta\,\psi),\, m\nabla v - v\nabla m)_\Omega.\end{aligned}$$

Puisque $-\chi_\delta\,\psi = 1 - \chi_\delta - \psi$, en notant, $M := \tau_{1/\delta}\cdot m$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(\sigma^\delta\nabla(u^\delta - \check{u}^\delta), \nabla v)_\Omega = \quad & \langle f, \psi_\delta\, v\rangle_\Omega \\ & +(\sigma^0\nabla\chi_\delta,\, (u_{\mathrm{ext}} - m)\nabla v - v\nabla(u_{\mathrm{ext}} - m))_\Omega \\ & +(\sigma^\infty\nabla\psi_{1/\delta},\, (U_{\mathrm{in}} - M)\nabla(\tau_{1/\delta}\cdot v) - (\tau_{1/\delta}\cdot v)\nabla(U_{\mathrm{in}} - M))_\Xi.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Étudions chacun des trois termes du membre de droite de (6.44). Pour le premier, on a,

$$\begin{aligned}|\langle f, \psi_\delta\, v\rangle_\Omega| \leq C\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}\,\|\psi_\delta\, v\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)} &\leq C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}\,\|\psi_\delta\, v\|_{\mathrm{V}^1_\varepsilon(\Omega)} \\ &\leq C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}\,\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.45}$$

Pour le second et le troisième terme de (6.44), en utilisant (6.28), (6.29), (6.31) et (6.32), on trouve successivement

$$\begin{aligned}&|(\,\sigma^0\nabla\chi_\delta,\, (u_{\mathrm{ext}} - m)\nabla v - v\nabla(u_{\mathrm{ext}} - m)\,)_\Omega| \\ \leq\ & C\,\|u_{\mathrm{ext}} - m\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\mathbb{Q}^\delta)}\|v\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\mathbb{Q}^\delta)} \\ \leq\ & C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,\|u_{\mathrm{ext}} - m\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\mathbb{Q}^\delta)}\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)} \\ \leq\ & C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,(|c^0| + \|\tilde{u}^0\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)})\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)} \leq C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)}\end{aligned} \tag{6.46}$$

et

$$\begin{aligned}&|(\,\sigma^\infty\nabla\psi_{1/\delta},\, (U_{\mathrm{in}} - M)\nabla(\tau_{1/\delta}\cdot v) - (\tau_{1/\delta}\cdot v)\nabla(U_{\mathrm{in}} - M)\,)_\Xi| \\ \leq\ & C\,\|U_{\mathrm{in}} - M\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathbb{Q}^{1/\delta})}\|\tau_{1/\delta}\cdot v\|_{\mathrm{W}^1_{-\beta}(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \\ \leq\ & C\,\delta^\beta\,\|U_{\mathrm{in}} - M\|_{\mathrm{W}^1_\beta(\mathbb{Q}^{1/\delta})}\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)} \\ \leq\ & C\,\delta^\beta\,|c^0|\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)} \leq C\,\delta^\beta\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.47}$$

En injectant (6.45), (6.46) et (6.47) dans (6.44), en divisant par $\|v\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)}$ et en prenant le supremum sur tous les $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, nous obtenons

$$\|\mathrm{div}\,(\sigma^\delta\nabla(u^\delta - \check{u}^\delta))\|_{\mathrm{V}^1_{\varepsilon,\delta}(\Omega)^*} \leq C\,\delta^{\beta-\varepsilon}\,\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}.$$

Revenant à (6.43), nous pouvons énoncer le résultat principal de ce chapitre

Théorème 6.4.1 *Soient $\beta \in]0;2[$ et $f \in \mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*$. Sous les Hypothèses 1 et 2, il existe δ_0 tel que le problème (6.1) possède une unique solution pour tout $\delta \in]0;\delta_0[\cap\mathrm{I}(\alpha)$, avec $\alpha \in]0;1/2[$. De plus, la function $\check{u}^\delta \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ définie en (6.42) vérifie, pour tout ε dans $]0;\beta[$,*

$$\|u^\delta - \check{u}^\delta\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,|\ln\delta|\,\delta^{\beta-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)^*}, \qquad \forall\delta \in]0;\delta_0[\cap\mathrm{I}(\alpha),$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ et f.

Remarque 6.4.2 *Sous les Hypothèses 1 et 2, nous avons montré qu'il existe δ_0 tel que le problème (6.1) possède une unique solution dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ pour $\delta < \delta_0$ tel que $\delta \notin \{ (e^{\pi/\eta})^k \, \delta_\star \, , k \in \mathbb{Z} \}$ où $\delta_\star$ est défini à partir de (6.21). L'étape suivante, qui n'entre pas dans le cadre de ce document, va consister à prouver que pour $\delta \in \{ (e^{\pi/\eta})^k \, \delta_\star \, , k \in \mathbb{Z} \}$ l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$ n'est effectivement pas un isomorphisme. Puisque pour $\delta > 0$, $\mathcal{A}^\delta$ est Fredholm et autoadjoint, cela revient à montrer que pour tout $\delta \in \{ (e^{\pi/\eta})^k \, \delta_\star \, , k \in \mathbb{Z} \}$ l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$ possède un noyau de dimension finie non réduit à zéro. En d'autres termes, nous souhaitons prouver que 0 est « valeur propre clignotante » au sens où il existe une suite de valeurs du paramètre δ s'accumulant en 0 telle que 0 est valeur propre de l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$.*

6.5 Illustrations numériques

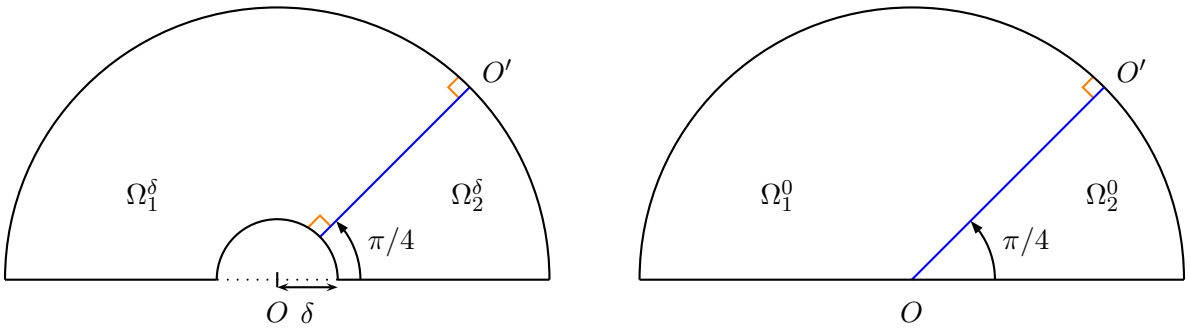


FIGURE 6.4 – Domaines Ω^δ et Ω^0.

Pour illustrer les résultats que nous avons obtenus dans ce chapitre, étudions sur une géométrie canonique la question de la stabilité du problème (6.1) par rapport au paramètre δ. La géométrie est choisie de sorte que l'on puisse séparer les variables et ainsi, procéder à des calculs explicites. De nouveau, nous mettons en évidence le résultat suivant. Si le problème limite, c'est-à-dire le problème (6.1) avec $\delta = 0$, est bien posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega^0)$, ce qui revient à dire, pour la configurations choisie, que $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in]-\infty; -1[\cup]-1/3; 0[$, alors la solution u^δ est bien définie pour δ suffisamment petit et converge vers u^0 pour la norme H^1. Par contre, si le problème limite est mal posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega^0)$ (si l'opérateur associé n'est pas de type Fredholm), alors il existe une suite (δ^n) de valeurs de δ qui tend vers 0 pour lesquelles le problème (6.1) n'est pas bien posé (non injectif) dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega^0)$. Le cadre de travail (voir la Figure 6.4) sera un peu différent de celui introduit dans le §6.1 car $\overline{\Omega}_1^\delta \cup \overline{\Omega}_2^\delta$ ne sera pas un domaine fixe. Néanmoins, l'analyse que nous avons développée au cours de ce chapitre s'étend sans difficulté à la géométrie de ce paragraphe et nous permet d'obtenir des résultats analogues.

Nous présenterons des simulations numériques, obtenues avec une approximation de type éléments finis classique, pour illustrer la différence dans le comportement de la suite (u^δ), selon que le contraste appartienne ou non à l'intervalle critique $]-1; -1/3[$.

Commençons par décrire la géométrie. Considérons $\delta \in]0; 1[$ et définissons (voir la Figure 6.4)

$$\begin{array}{rcl} \Omega_1^\delta & := & \{ \, (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \delta < r < 1, \;\; \pi/4 < \theta < \pi \, \}; \\ \Omega_2^\delta & := & \{ \, (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \delta < r < 1, \;\; 0 < \theta < \pi/4 \, \}; \\ \Omega^\delta & := & \{ \, (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \delta < r < 1, \;\; 0 < \theta < \pi \, \}. \end{array} \tag{6.48}$$

De nouveau, définissons la fonction $\sigma^\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\sigma^\delta = \sigma_1$ dans Ω_1^δ et $\sigma^\delta = \sigma_2$ dans Ω_2^δ, où $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$ sont des constantes. Introduisons l'opérateur linéaire et continu $\mathcal{A}^\delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega^\delta)$ tel que

$$\langle \mathcal{A}^\delta u, v \rangle_{\Omega^\delta} = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_{\Omega^\delta}, \quad \forall u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta).$$

Puisque l'interface $\Sigma^\delta := \partial\Omega_1^\delta \backslash \partial\Omega = \partial\Omega_2^\delta \backslash \partial\Omega$ est régulière et rencontre $\partial\Omega^\delta$ perpendiculairement, grâce à la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité, nous savons que pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \backslash \{-1\}$, pour tout $\delta \in]0;1[$, $\mathcal{A}^\delta$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro. Étudions la question de l'injectivité de $\mathcal{A}^\delta$.

Approche $\mathtt{T}$-coercivité

Dans la suite, si v est une fonction définie sur Ω^δ, nous notons $v_1 := v|_{\Omega_1^\delta}$ et $v_2 := v|_{\Omega_2^\delta}$. Introduisons les opérateurs R_1, R_2, $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ tels que, pour tout $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$,

$$(R_1 u_1)(r,\theta) = u_1(r, \pi - 3\,\theta) \qquad ; \quad (R_2 u_2)(r,\theta) = \begin{cases} u_2(r, \pi/2 - \theta) & \text{si } \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

$$\mathtt{T}_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{sur } \Omega_1^\delta \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{sur } \Omega_2^\delta \end{cases} \quad ; \quad \mathtt{T}_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{sur } \Omega_1^\delta \\ -u_2 & \text{sur } \Omega_2^\delta. \end{cases} .$$

On a $u_1 = -u_2 + 2R_1 u_1$ sur Σ^δ, donc $\mathtt{T}_1$ est à valeurs dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$. En remarquant que $\mathtt{T}_1 \circ \mathtt{T}_1 = \mathrm{Id}$, on déduit que $\mathtt{T}_1$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$. Ce résultat vaut également pour $\mathtt{T}_2$. Pour tout $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$, à l'aide de l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout $\varsigma > 0$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^\delta u, \mathtt{T}_1 u \rangle_{\Omega^\delta} &= (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} - 2(|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2^\delta} \\ &\geq (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} \\ &\quad -\varsigma\,(|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} - 1/\varsigma\,(|\sigma_2| \nabla(R_1 u_1), \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2^\delta} \\ &\geq ((\sigma_1 - \|R_1\|^2 |\sigma_2|/\varsigma) \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2|\,(1-\varsigma) \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\sigma_1/|\sigma_2| > \|R_1\|^2 = 3$ (ceci implique en particulier $\kappa_\sigma \notin]-1;-1/3[$), il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que

$$C\,\|u\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)} \leq \langle \mathcal{A}^\delta u, \mathtt{T}_1 u \rangle_{\Omega^\delta}, \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta).$$

En procédant de la même façon avec $\mathtt{T}_2$ (remarquons que $\|R_2\|^2 = 1$), nous pouvons énoncer la

Proposition 6.5.1 *Supposons $\kappa_\sigma \in]-\infty;-1[\cup]-1/3;0[$. Alors, pour tout $\delta \in]0;1[$, l'opérateur $\mathcal{A}^\delta$ est un isomorphisme. De plus, il existe $C > 0$ indépendante de δ telle que*

$$\|u^\delta\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)} \leq C\,\|\mathcal{A}^\delta u^\delta\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega^\delta)}, \qquad \forall u^\delta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta).$$

Bien sûr, ce résultat de stabilité n'est plus vrai pour un contraste situé dans l'intervalle critique. Pour $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$, la méthode de la $\mathtt{T}$-coercivité ne peut plus être utilisée.

Approche directe

Calculons explicitement les éléments de $\ker\mathcal{A}^\delta$. Considérons u^δ un élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$ tel que $\mathcal{A}^\delta u^\delta = 0$. Le couple (u_1^δ, u_2^δ) vérifie

$$\left| \begin{array}{lcll} \Delta u_1^\delta & = & 0 & \text{dans } \Omega_1^\delta \\ \Delta u_2^\delta & = & 0 & \text{dans } \Omega_2^\delta \\ u_1^\delta - u_2^\delta & = & 0 & \text{sur } \Sigma^\delta \\ \sigma_1 \partial_\theta u_1^\delta - \sigma_2 \partial_\theta u_2^\delta & = & 0 & \text{sur } \Sigma^\delta. \end{array} \right. \tag{6.49}$$

En utilisant le changement de variable $(t,\theta) := (\ln r, \theta)$, le problème (6.49) devient un problème posé dans la demi-bande tronquée $\mathcal{B}^\delta :=]\ln\delta; 0[\times]0;\pi[$. Dans cette géométrie, la séparation de variables constitue une approche naturelle. En utilisant cette astuce, il est facile de prouver que la famille

$\{r \mapsto \sin(n\pi(\ln r - \ln\delta)/\ln\delta)\}_{n=1}^{\infty}$ définit une base de $\mathrm{L}^2(]\delta;1[)$. En décomposant u_1^δ, u_2^δ et puisque $\Delta u_1^\delta = \Delta u_2^\delta = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} & u_1^\delta(r,\theta) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}^\delta \sinh(n\pi(\theta-\pi)/\ln\delta)\,\sin(n\pi(\ln r - \ln\delta)/\ln\delta) \\ \text{et}\quad & u_2^\delta(r,\theta) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{2,n}^\delta \sinh(n\pi\theta/\ln\delta)\,\sin(n\pi(\ln r - \ln\delta)/\ln\delta), \end{aligned}$$

où $u_{1,n}^\delta$ et $u_{2,n}^\delta$ sont des constantes. Les conditions de transmission conduisent aux relations supplémentaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \begin{array}{lcl} -u_{1,n}^\delta \sinh(3n\pi^2/(4\ln\delta)) & = & u_{2,n}^\delta \sinh(n\pi^2/(4\ln\delta)) \\ u_{1,n}^\delta\,\sigma_1 \cosh(3n\pi^2/(4\ln\delta)) & = & u_{2,n}^\delta\,\sigma_2 \cosh(n\pi^2/(4\ln\delta)). \end{array} \right. \tag{6.50}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le système (6.50) par rapport à $(u_{1,n}^\delta, u_{2,n}^\delta)$ possède une solution non triviale si et seulement si

$$\begin{aligned} & \sigma_2 \sinh(3n\pi^2/(4\ln\delta))\cosh(n\pi^2/(4\ln\delta)) + \sigma_1 \sinh(n\pi^2/(4\ln\delta))\cosh(3n\pi^2/(4\ln\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sigma_2\,(\sinh(4\nu_n^\delta) + \sinh(2\nu_n^\delta)) + \sigma_1\,(\sinh(4\nu_n^\delta) - \sinh(2\nu_n^\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \cosh(2\nu_n^\delta) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\sigma_1+\sigma_2)} = \frac{1-\kappa_\sigma}{2(1+\kappa_\sigma)}, \end{aligned}$$

avec $\nu_n^\delta = n\pi^2/(4\ln\delta)$.
- Configuration $\kappa_\sigma \in]-\infty;-1[\cup]-1/3;0[$. Dans ce cas, on a $(1-\kappa_\sigma)/(2(1+\kappa_\sigma)) < 1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la seule solution de (6.50) est la solution nulle et $\mathcal{A}^\delta$ est injectif. Ce résultat est consistant avec la Proposition 6.5.1.
- Configuration $\kappa_\sigma \in]-1;-1/3[$. Dans cette situation, on a $(1-\kappa_\sigma)/(2(1+\kappa_\sigma)) > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique δ^n tel que (6.50) possède une solution non triviale :

$$\delta^n = \exp\left(-\frac{n\pi^2}{2\,\mathrm{acosh}(\frac{1-\kappa_\sigma}{2(1+\kappa_\sigma)})}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.51}$$

Par conséquent, $\mathcal{A}^\delta$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega^\delta)$ si et seulement si $\delta \in]0;1[\setminus \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\delta^n\}$. Ainsi, pour cette géométrie particulière, nous obtenons par le calcul le résultat de la Proposition 6.3.6 (ici, nous pouvons prendre $\delta_\star = 1$) et nous montrons le phénomène de valeur propre clignotante mentionné dans la Remarque 6.4.2.

Illustrations numériques

Confrontons ces calculs avec les résultats numériques. Considérons $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ dont le support ne rencontre pas O. Considérons $(\mathcal{T}_h^\delta)_h$ une famille de triangulations régulières de $\overline{\Omega}^\delta$. Supposons de plus que pour tout triangle τ, on a $\tau \subset \overline{\Omega}_1^\delta$ ou bien $\tau \subset \overline{\Omega}_2^\delta$.
Définissons la famille d'espaces de dimension finie

$$\mathrm{V}_h^\delta := \left\{ v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta) \text{ tel que } v|_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{T}_h^\delta \right\},$$

où $\mathbb{P}_1(\tau)$ est l'espace des polynômes de degré au plus 1 sur le triangle τ. Considérons le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^\delta \in \mathrm{V}_h^\delta \text{ tel que} \\ (\sigma^\delta \nabla u_h^\delta, \nabla v_h^\delta)_{\Omega^\delta} = (f, v_h^\delta)_{\Omega^\delta}, \quad \forall v_h^\delta \in \mathrm{V}_h^\delta. \end{array} \right. \tag{6.52}$$

- En dehors de l'intervalle critique. La Figure 6.5 présente la variation de $\|u_h^\delta\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)}$ par rapport à $1-\delta$ pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1-10^{-4}$. En accord avec ce que nous attendions, le problème (6.52) semble stable par rapport à δ.

- À l'intérieur de l'intervalle critique. Sur la Figure 6.6, nous affichons la variation de $\|u_h^\delta\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)}$ par rapport à $1-\delta$ pour $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1+10^{-4}$. Nous observons des pics qui correspondent aux valeurs de $\delta = \delta^n$ pour lesquelles $\mathcal{A}^\delta$ n'est pas injectif. L'idée importante est la suivante : lorsque le contraste est situé dans l'intervalle critique, la solution, lorsqu'elle est bien définie, dans la géométrie arrondie, dépend de façon critique du paramètre δ. Pour de petites valeurs de δ, il est très coûteux d'utiliser un maillage adapté à la géométrie. Par conséquent, le pas du maillage est choisi constant par rapport à δ. Ceci explique pourquoi les pics n'apparaissent pas pour les petites valeurs de δ. Ici, nous travaillons avec un contraste très proche de -1. Cela peut paraître surprenant de se placer si près de ce cas très mal posé (rappelons que pour $\kappa_\sigma = -1$, les opérateurs $\mathcal{A}^\delta$ ne sont pas de type Fredholm en raison de la présence de singularité sur tout l'interface). Cependant, ceci permet d'obtenir plusieurs pics sans être obligés d'utiliser un maillage vraiment très raffiné. En effet, dans ce cas, dans (6.51), le coefficient $\pi^2/(2\,\mathrm{acosh}(\frac{1-\kappa_\sigma}{2(1+\kappa_\sigma)}))$ vaut environ -0.5. D'un point de vue numérique, il faut simplement faire attention à choisir un maillage localement symétrique par rapport à l'interface pour éviter les phénomènes d'instabilité.

Analogie avec un problème de guide d'ondes

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 5, le problème (6.1) présente une forte analogie avec un problème de guide d'ondes classique. Pour simplifier, supposons que f s'annule dans un voisinage de O. Considérons le changement de variable $(t,\theta) = (\ln r, \theta)$. Notons $\widetilde{u}^\delta(t,\theta) = u^\delta(e^t,\theta)$, $\widetilde{\sigma}^\delta(t,\theta) = \sigma^\delta(e^t,\theta)$ et $\widetilde{f}(t,\theta) = e^{2t} f(e^t,\theta)$. Le problème (6.1) pour la géométrie étudiée dans ce paragraphe devient un problème posé dans la demi-bande tronquée $\mathcal{B}^\delta =]\ln\delta; 0[\times]0;\pi[$ qui s'écrit

$$-\left(\widetilde{\sigma}^\delta \partial_z^2 + \partial_\theta \widetilde{\sigma}^\delta \partial_\theta\right)\widetilde{u}^\delta = \widetilde{f} \quad \text{dans } \mathcal{B}^\delta \quad \text{et} \quad \widetilde{u} = 0 \ \text{ sur } \partial\mathcal{B}^\delta. \tag{6.53}$$

La domaine limite obtenu pour $\delta = 0$ est alors la demi-bande infinie $\mathcal{B}^0 =]-\infty; 0[\times]0;\pi[$. Ainsi, pour cette géométrie, « arrondir le coin » comme indiqué en (6.48) correspond à tronquer la demi-bande infinie et donc à borner le guide d'ondes. Dès lors, on va distinguer deux situations suivant qu'il existe ou non des modes propagatifs dans le guide infini.

En dehors de l'intervalle critique, *i.e.* pour $\kappa_\sigma \in]-\infty; -1[\cup]-1/3; 0[$, dans la demi-bande infinie $\mathcal{B}^0$, tous les modes associés au problème (6.53) sont exponentiellement croissants ou décroissants. En cherchant une solution $\widetilde{u}^0 \in \mathrm{H}_0^1(\mathcal{B}^0)$, on impose une décomposition uniquement sur les modes exponentiellement décroissants. Par conséquent, l'erreur qui consiste à approcher $\widetilde{u}^\delta \in \mathrm{H}_0^1(\mathcal{B}^\delta)$ par $\widetilde{u}^0$ tend vers 0 lorsque $\delta \to 0$. Autrement dit, la solution dans la demi-bande tronquée est bien approchée par la solution dans la demi-bande infinie.
À l'intérieur de l'intervalle critique, *i.e.* pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, dans la demi-bande infinie $\mathcal{B}^0$, il apparaît exactement deux modes propagatifs $e^{\pm i\eta t}\varphi(\theta)$, avec η défini en (6.4), se propageant en sens opposé. En cherchant une solution $\widetilde{u}^0$ qui se décompose sur les modes sortants, nous sommes amenés à considérer une solution qui se divise en un mode propagatif et une partie évanescente. Dans ce cas, nous savons qu'il n'est pas possible d'approcher la solution dans la demi-bande tronquée, lorqu'elle est bien défnie, par la solution dans la demi-bande infinie. En raison de la réflexion du mode propagatif, $\widetilde{u}^\delta \in \mathrm{H}_0^1(\mathcal{B}^\delta)$ n'est pas stable par rapport à δ. Le phénomène de « valeur propre clignotante » s'explique lui par la présence de modes résonnants dans la demi-bande tronquée.

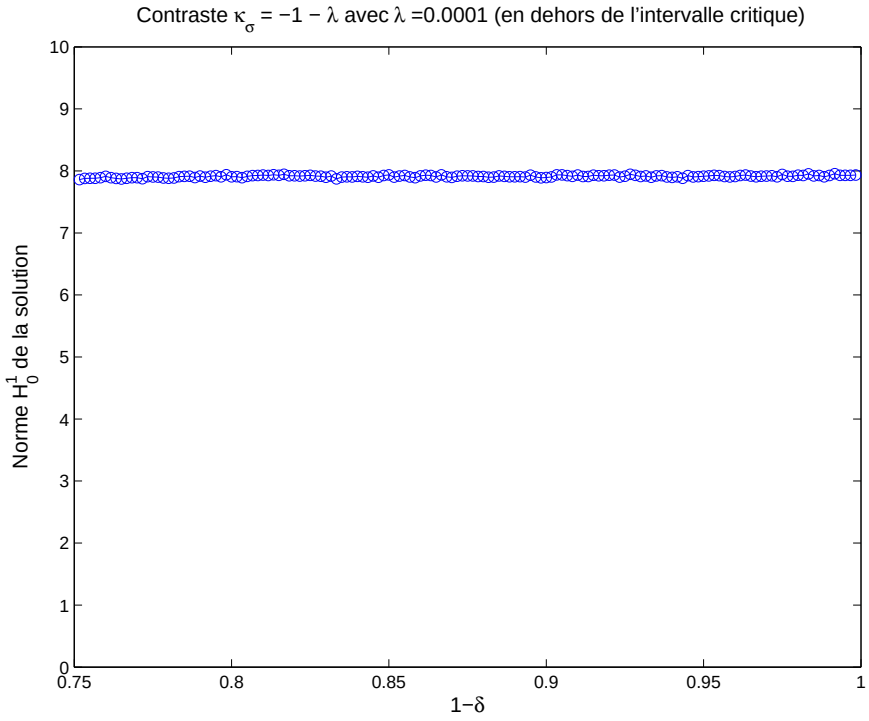


FIGURE 6.5 – Évolution de $\|u_h^\delta\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)}$ par rapport à $1-\delta$.

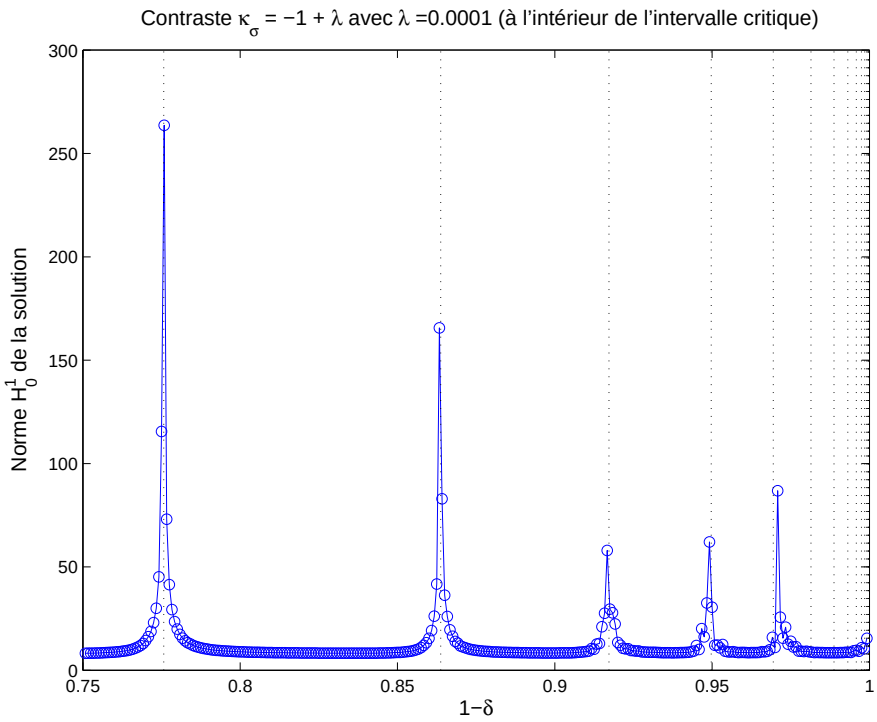


FIGURE 6.6 – Évolution de $\|u_h^\delta\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega^\delta)}$ par rapport à $1-\delta$. Les pointillés correspondent aux valeurs attendues $\delta = \delta^n$ pour lesquelles $\mathcal{A}^\delta$ n'est pas injectif.

Troisième partie

Équations de Maxwell

CHAPITRE SEPT

ÉQUATIONS DE MAXWELL EN 2D

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

[19] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Soumis à Appl. Num. Math., Special Issue : NELIA 2011*, 24 pages, 2012.

Sommaire

Introduction **173**
7.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic* **178**
7.1.1 Formulation scalaire pour E_z 178
7.1.2 Formulation vectorielle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ 179
7.1.3 Bilan de l'approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic* . . 183
7.2 Relation entre les opérateurs scalaires **183**
7.3 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ **185**
7.4 Résumé pour le problème *Transverse Electric* **188**
7.4.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Electric* 189
7.4.2 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{E}_\perp$ 190
7.5 Illustration sur un cas particulier **190**

Introduction

Nous souhaitons étudier les champs électromagnétiques dans un milieu $D \subset \mathbb{R}^3$. Pour $\boldsymbol{x} \in D$ et $t \geq 0$, notons $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x},t)$ le champ électrique, $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction électrique, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x},t)$ le champ magnétique et $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction magnétique. Les variations de ces champs sont régies par les équations de Maxwell :

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{D}} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\mathcal{H}} = -\boldsymbol{\mathcal{J}} \qquad \text{et} \qquad \partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0. \tag{7.1}$$

Ci-dessus, la source $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x},t)$ représente la densité de courant. Nous supposons le milieu sans dissipation et nous faisons l'hypothèse que $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ possède un comportement harmonique en temps : $\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}$ pour $\boldsymbol{x} \in D$ et $t \geq 0$. Cela conduit à chercher des champs électromagnétiques s'écrivant sous la forme

$$\begin{array}{rclcrcl} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x},t) & = & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\,; & \qquad & \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x},t) & = & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\,; \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x},t) & = & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\,; & & \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t) & = & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\,. \end{array} \tag{7.2}$$

Rappelons qu'en régime fréquentiel, les champs électrique et magnétique sont respectivement reliés aux inductions électrique et magnétique par les relations

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega) = \varepsilon(\boldsymbol{x},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\omega) = \mu(\boldsymbol{x},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\omega), \tag{7.3}$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in D$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Ici, ε et μ désignent la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique caractérisant les propriétés du matériau. Le fait de considérer un milieu sans absorption conduit à supposer que ε et μ sont à valeurs réelles. En utilisant (7.2) et (7.3) dans (7.1), nous pouvons éliminer la dépendance temporelle ainsi que les inconnues $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$. Nous obtenons alors les équations de Maxwell en *régime harmonique* :

$$i\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \quad \text{et} \quad -i\omega\mu\boldsymbol{H} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{dans le milieu } D \subset \mathbb{R}^3. \tag{7.4}$$

Dans toute la suite de ce document, nous ferons l'hypothèse que la pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ est fixée. Par conséquent, nous n'indiquerons plus la dépendance par rapport à ω. Dans ce chapitre, nous désirons nous intéresser au problème de Maxwell dans une géométrie invariante dans une direction et bornée dans le plan transverse.

Introduisons Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, un ensemble ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Pour simplifier, nous supposons $\partial\Omega$ connexe. En 2D, ceci est équivalent à supposer Ω simplement connexe. Nous préciserons dans la suite où cette hypothèse intervient et nous verrons en 3D, dans le Chapitre 9, comment procéder lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe. Nous définissons alors $D := \{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$. Nous considérons un milieu D entouré par un conducteur parfait. En conséquence, la trace tangentielle de $\boldsymbol{E}$, ainsi que la trace normale de $\boldsymbol{H}$, s'annulent sur la frontière ∂D. Si on appelle $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire sortante à ∂D, ceci s'écrit

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \mu\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \tag{7.5}$$

Nous faisons l'hypothèse que la densité de courant $\boldsymbol{J}$ et les constantes physiques ε, μ, tout comme la géométrie, sont invariantes par rapport à la variable z. Ainsi, l'ensemble du problème ne dépend pas de z et nous pouvons faire la simplification :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0. \tag{7.6}$$

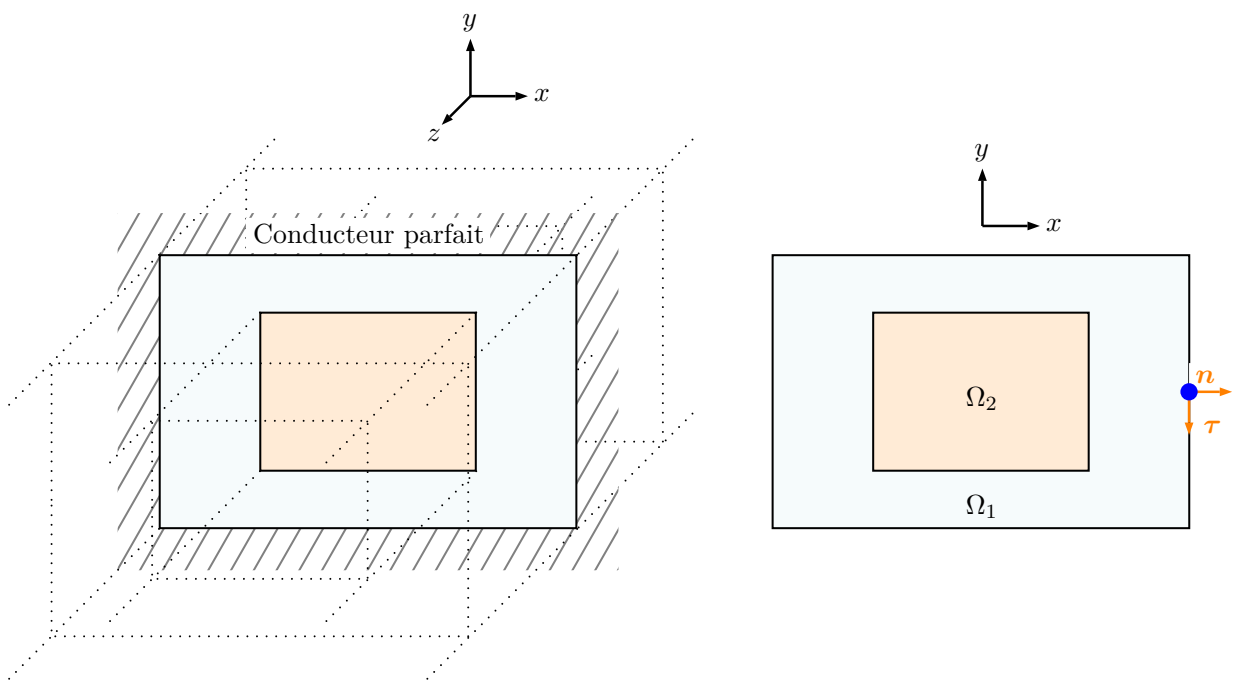


FIGURE 7.1 – Un problème modèle : vue 3D à droite, coupe 2D à gauche.

La Figure 7.1 ci-contre présente un problème modèle. Ici, Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1

et Ω_2. Notons $D_1 := \Omega_1 \times \mathbb{R}$ et $D_2 := \Omega_2 \times \mathbb{R}$. La région D_1 est vide tandis que D_2 est occupée par un métal de pulsation de plasma ω_p. D'après les résultats du §4.2.1 du Chapitre 4, nous pouvons modéliser les propriétés de métal en prenant $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$. Rappelons que nous avons supposé le milieu non absorbant. C'est la raison pour laquelle, dans la formule (4.7), nous avons imposé $\gamma = 0$. Considérons une source périodique en temps de pulsation $\omega < \omega_p$. Dans ce cas, on a $\varepsilon|_{\Omega_1} > 0$, $\mu|_{\Omega_1} > 0$, $\varepsilon|_{\Omega_2} < 0$ et $\mu|_{\Omega_2} > 0$. Dans ce chapitre, nous souhaitons également étudier la situation où D_2 contient un métamatériau doublement négatif tel que $\varepsilon|_{\Omega_2} < 0$ et $\mu|_{\Omega_2} < 0$.

En vertu de la simplification (7.6), nous sommes ramenés à un problème 2D et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous travaillerons avec des champs définis sur Ω. Pour simplifier, nous supposons que le terme source $\boldsymbol{J} := (J_x, J_y, J_z)^t \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3$ vérifie $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$. Nous considérerons des constantes physiques ε, μ (à valeurs réelles) vérifiant $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\mu^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. À partir de (7.4), on observe que les composantes des champs $\boldsymbol{E} := (E_x, E_y, E_z)^t$ et $\boldsymbol{H} := (H_x, H_y, H_z)^t$ satisfont, dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, les équations

$$\begin{aligned} & i\omega\varepsilon E_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} = J_x\,; \quad i\omega\varepsilon E_y - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y\,; \quad i\omega\varepsilon E_z + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z\,; \\ \text{et} \quad & -i\omega\mu H_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0\,; \quad -i\omega\mu H_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0\,; \quad -i\omega\mu H_z + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Introduisons $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)^t$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$, et $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)^t$ le vecteur tel que $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ soit une base orthonormale directe. Sur $\partial\Omega$, les conditions aux limites (7.5) conduisent à

$$\mu(H_x n_x + H_y n_y) = 0\,; \quad E_z = 0\,; \quad E_x n_y - E_y n_x = 0. \tag{7.8}$$

Classiquement, on constate qu'il apparaît un découplage dans les équations (7.7)-(7.8) et nous pouvons les réorganiser sous la forme de deux systèmes indépendants. Dans cette optique, introduisons $\boldsymbol{J}_\perp := (J_x, J_y)^t$, les champs transverses $\boldsymbol{E}_\perp := (E_x, E_y)^t$, $\boldsymbol{H}_\perp := (H_x, H_y)^t$ et les opérateurs rotationnels 2D tels que, pour $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)^t \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$, $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \in \mathcal{D}'(\Omega)\,; \quad \mathbf{rot}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega).$$

Écrivons maintenant les deux systèmes indépendants issus de (7.7) et (7.8). Le premier met en jeu les inconnues $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$. On l'appelle *problème TM* pour *transverse magnétique* (Transverse Magnetic en anglais).

$$\left|\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } E_z \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{H}_\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tels que :}} \\ i\omega\varepsilon E_z + \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_\perp & = & J_z & \text{dans } \Omega; \\ -i\omega\mu \boldsymbol{H}_\perp + \mathbf{rot}\, E_z & = & 0 & \text{dans } \Omega; \\ E_z & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega; \\ \mu \boldsymbol{H}_\perp \cdot \boldsymbol{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{7.9}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé la notation $\mathbf{L}^2(\Omega) := \mathrm{L}^2(\Omega)^2$. Le second système d'équations régit les champs $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$. C'est le *problème TE* pour *transverse électrique* (Transverse Electric en anglais).

$$\left|\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } H_z \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{E}_\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tels que :}} \\ -i\omega\mu H_z + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_\perp & = & 0 & \text{dans } \Omega; \\ i\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_\perp + \mathbf{rot}\, H_z & = & \boldsymbol{J}_\perp & \text{dans } \Omega; \\ \varepsilon^{-1}(\mathbf{rot}\, H_z - \boldsymbol{J}_\perp) \cdot \boldsymbol{\tau} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega; \\ \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{7.10}$$

Pour mesurer les champs, introduisons quelques espaces adaptés

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) & := & \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\}; \\
\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\,\Omega) & := & \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\}; \\
\mathbf{H}_N(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}; \\
\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u}) = 0,\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}; \\
\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{u}) = 0,\ \mu\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.
\end{array} \tag{7.11}$$

Remarque 7.0.2 *Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie le problème (7.9), on a $E_z \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. En prenant la divergence dans la seconde équation de (7.9), on remarque que $\boldsymbol{H}_\perp$ appartient à $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. De même, si $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$ est solution de (7.10), alors $H_z \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, et $\boldsymbol{E}_\perp \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ car nous avons imposé* $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$.

Nous souhaitons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer que les problèmes (7.9) et (7.10) possèdent chacun une unique solution. Lorsque les paramètres physiques ε et μ sont positifs, la théorie est bien connue. Nous voulons étudier des situations pour lesquelles ε et μ changent de signe dans le domaine Ω comme dans l'exemple de la Figure 7.1. Pour présenter notre démarche, intéressons-nous au problème TM pour $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$.

Classiquement, *i.e.* lorsque ε et μ restent positifs, plutôt que d'écrire une formulation variationnelle pour $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$, on travaille avec une seule inconnue, de préférence scalaire. On montre alors que si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie le problème (7.9), la composante E_z vérifie une certaine formulation variationnelle $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$, précisée en (7.14) et posée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Réciproquement, on prouve qu'à partir d'une solution E_z de $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$, on peut reconstruire une solution $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ de (7.9). Ce résultat montre que (7.9) est bien posé si et seulement si $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ est bien posé. Nous allons voir que ce procédé peut encore être utilisé dans le cas où ε et μ changent de signe, la différence résidant dans le fait que $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ (et donc (7.9)), n'est pas toujours bien posé au sens de Fredholm. Précisons cela. Lorsque μ est positif, pour tout $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, le problème $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. D'autre part, pour $\omega \in \mathscr{S}$, $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ présente un noyau et un conoyau non réduits à zéro, mais tout de même de dimension finie. Lorsque μ change de signe dans Ω, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, il y a des configurations, *i.e.* des fonctions μ, telles qu'il existe un espace de dimension infinie de termes sources pour lesquels le problème $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ ne possède pas de solution. Notons que le ε n'intervient pas dans le caractère Fredholm pour le problème TM car il entre dans la partie compacte dans $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$. Enfin, d'un point de vue pratique, quand (7.9) possède une unique solution, on peut discrétiser la formulation variationnelle $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ par une méthode de type éléments finis pour approcher E_z. Il est alors possible de retrouver $\boldsymbol{H}_\perp$ à partir de E_z.

Imaginons maintenant que l'on souhaite calculer directement $\boldsymbol{H}_\perp$ sans passer par E_z. C'est moins commun, car il faut résoudre un problème vectoriel, au lieu d'un problème scalaire dans la démarche que nous venons de décrire, mais cela peut être intéressant pour avoir une meilleure précision sur $\boldsymbol{H}_\perp$. On cherche alors à écrire une formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ que l'on pourra discrétiser. On peut l'établir dans $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ comme en (7.15). Malheureusement, il n'est pas facile d'étudier ce problème car l'injection de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. C'est pourquoi, on préfère classiquement construire une formulation pour $\boldsymbol{H}_\perp$ dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ comme en (7.18). L'étape suivante dans le processus consiste à montrer qu'à partir d'une solution $\boldsymbol{H}_\perp$ du problème (7.18), on peut reconstruire une solution $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ au problème (7.9). Il est facile de montrer que c'est possible lorsque μ est positif. Quand μ change de signe, ce n'est pas toujours le cas et nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Nous montrerons que cette hypothèse est vérifiée lorsque le problème $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$, celui-là même qui apparaît dans l'étude de la composante E_z, est bien posé pour $\omega = 0$. Sous cette condition $(\mathscr{P}_{E_z})_0$ bien posé, nous établirons les deux résultats pour

prouver que le problème (7.18) est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$. D'une part, nous montrerons que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. D'autre part, nous prouverons que l'opérateur $\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\ :\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)\to\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)^*$ définit un isomorphisme. De façon surprenante, nous verrons que ce dernier résultat ne nécessite sur ε que l'hypothèse $\varepsilon\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1}\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Cela nous conduira à la conclusion suivante : si $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ et $(\mathscr{P}_{E_z})_0$ sont bien posés, alors (7.18), la formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ posée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, possède une unique solution, et à partir de $\boldsymbol{H}_\perp$, on peut reconstruire une solution $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ au problème (7.9).

La question naturelle qui vient ensuite s'énonce ainsi : comment définir une formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$, que l'on sache étudier à l'aide de la théorie de Fredholm, lorsque $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ est bien posé avec, par contre, $(\mathscr{P}_{E_z})_0$ mal posé ? Puisque $(\mathscr{P}_{E_z})_0$ diffère de $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ d'une perturbation compacte, cela revient à étudier la situation dans laquelle $(\mathscr{P}_{E_z})_0$ possède un noyau non réduit à zéro de dimension finie. Nous verrons que dans un tel cas, pour tout $\omega\in\mathbb{C}$, le problème (7.18) posé dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ possède un noyau non réduit à zéro contenant les gradients du noyau du problème scalaire. C'est là une curiosité du cadre fonctionnel due à la présence de matériaux négatifs. Pour obtenir un problème bien posé pour $\boldsymbol{H}_\perp$, il ne faut pas travailler dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ mais dans un espace un peu plus gros de façon à éliminer ces gradients du noyau du problème scalaire. Nous retrouverons la même originalité pour les équations de Maxwell 3D.

Précisons maintenant le plan de ce chapitre. Nous commencerons par étudier le problème TM pour $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$. Nous présenterons une formulation équivalente en passant par E_z puis une seconde en passant par $\boldsymbol{H}_\perp$. Comme indiqué plus haut, pour avoir l'équivalence entre la formulation pour $\boldsymbol{H}_\perp$ et le problème TM, nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Sous cette hypothèse, nous effectuerons l'étude de la formulation pour $\boldsymbol{H}_\perp$. Dans la Section 7.2, nous démontrerons deux résultats liant les problèmes scalaires avec condition de Dirichlet homogène et condition de Neumann homogène. Ces résultats vrais uniquement en 2D, montrerons que l'hypothèse supplémentaire que nous avons introduite n'est pas très contraignante. Nous définirons dans la Section 7.3, le nouveau cadre fonctionnel qu'il faut adopter pour obtenir un problème bien posé pour $\boldsymbol{H}_\perp$ lorsque la condition supplémentaire n'est pas remplie. Nous résumerons ensuite, en 7.4, l'étude pour le problème TE. Enfin, nous terminerons par une illustration des résultats que nous avons obtenus dans le cas d'une géométrie très simple.

Quelques rappels sur les formules de Green en 2D. Nous énonçons des résultats issus de [84] qui serviront au cours de notre étude. Dans tout ce chapitre, nous noterons indistinctement $(\cdot,\cdot)_\Omega$, resp. $\|\cdot\|_\Omega$, les produits scalaires, resp. les normes, de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 7.0.3 *L'application $\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ définie sur $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^2$ s'étend par continuité en une application linéaire continue surjective de $\mathbf{H}(\operatorname{div};\,\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, on a la formule de Green*

$$(\boldsymbol{v},\nabla\varphi)_\Omega+(\operatorname{div}\boldsymbol{v},\varphi)_\Omega=\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},\varphi\rangle_{\partial\Omega}\,,\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}(\operatorname{div};\,\Omega),\ \forall\varphi\in\mathrm{H}^1(\Omega). \tag{7.12}$$

On déduit le

Corollaire 7.0.4 *On a $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\operatorname{rot};\,\Omega)\,|\,(\mu\boldsymbol{u},\nabla\varphi)_\Omega=0,\forall\varphi\in\mathrm{H}^1(\Omega)\}$, où $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ est défini en (7.11).*

En utilisant le fait que $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y)^t$ est un élement de $\mathbf{H}(\operatorname{rot};\,\Omega)$ si et seulement si le champ $\boldsymbol{w}$ de composantes $(v_y,-v_x)^t$ appartient à $\mathbf{H}(\operatorname{div};\,\Omega)$, on obtient le théorème et le corollaire suivants.

Théorème 7.0.5 *L'application $\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}$ définie sur $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^2$ s'étend par continuité en une application linéaire continue surjective de $\mathbf{H}(\operatorname{rot};\,\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, on a la formule de Green*

$$(\boldsymbol{v},\mathbf{rot}\,\varphi)_\Omega-(\operatorname{rot}\boldsymbol{v},\varphi)_\Omega=\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau},\varphi\rangle_{\partial\Omega}\,,\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}(\operatorname{rot};\,\Omega),\ \forall\varphi\in\mathrm{H}^1(\Omega). \tag{7.13}$$

Attention, dans [84], les auteurs imposent que la base $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau})$, et non $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$, soit directe. Ceci explique la différence de signe.

Corollaire 7.0.6 *On a* $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, (\varepsilon\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \forall\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\}$, *où* $\mathbf{V}_N(\mu;\,\Omega)$ *est défini en (7.11).*

7.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic*

Intéressons-nous tout d'abord au problème TM. Pour montrer que ce problème est bien posé, autrement dit pour prouver qu'il possède une unique solution dépendant continûment de la donnée $\boldsymbol{J}$, on construit une formulation équivalente et on travaille ensuite sur cette dernière. La méthode la plus simple, et la plus utilisée en pratique, consiste à définir un problème pour le champ scalaire E_z. Suivons cette approche.

7.1.1 Formulation scalaire pour E_z

Construisons pour E_z un problème variationnel équivalent au système d'équations (7.9).

Théorème 7.1.1 *Supposons* $\omega \neq 0$.
1) Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ *vérifie le problème (7.9) alors* E_z *est une solution de*

$$(\mathscr{P}_{E_z})_\omega \quad \left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } E_z \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\nabla E_z \cdot \nabla v - \omega^2 \varepsilon E_z v = \int_\Omega i\omega J_z v, \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right. \tag{7.14}$$

2) Si E_z *vérifie le problème (7.14) alors* $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = ((i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\, E_z, E_z)$ *est une solution de (7.9).*

Preuve. 1) Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie (7.9) alors, comme indiqué dans la Remarque 7.0.2, on a $E_z \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Au sens des distributions, on trouve

$$\mathrm{div}\,(\mu^{-1}\nabla E_z) = -\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\mathbf{rot}\, E_z) = -i\omega\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp = -\omega^2\varepsilon E_z - i\omega J_z.$$

Ceci montre que E_z vérifie (7.14).
2) Supposons E_z solution de (7.14). Alors on a, toujours au sens des distributions, $\mathrm{div}\,(\mu^{-1}\nabla E_z) + \omega^2\varepsilon E_z = -i\omega J_z$. Définissons $\boldsymbol{H}_\perp := (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\, E_z$. On a clairement $-i\omega\mu\boldsymbol{H}_\perp + \mathbf{rot}\, E_z = 0$. De plus, $\mu\boldsymbol{H}_\perp \cdot \boldsymbol{n} = i\omega\,\mathbf{rot}\, E_z \cdot \boldsymbol{n} = i\omega\,\nabla E_z \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ car $E_z \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Enfin, on remarque que

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp = (i\omega)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\mathbf{rot}\, E_z) = -(i\omega)^{-1}\mathrm{div}\,(\mu^{-1}\nabla E_z) = J_z - i\omega\varepsilon E_z.$$

Cela achève de prouver que si E_z est solution de (7.14) alors $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = ((i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\, E_z, E_z)$ vérifie le problème (7.9). ■

Grâce à ce théorème, nous pouvons énoncer le

Corollaire 7.1.2 *Supposons* $\omega \neq 0$. *Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.14) possède une unique solution.*

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $A_D^{1/\mu}(\omega) : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_D^{1/\mu}(\omega)u), \nabla v)_\Omega = (\mu^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega - \omega^2(\varepsilon u, v)_\Omega, \qquad \forall (u,v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Dans la notation $A_D^{1/\mu}(\omega)$, le « D » fait référence à la condition de Dirichlet homogène imposée dans l'espace. D'après le Corollaire 7.1.2, le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans le Chapitre 1, nous avons étudié

en détail les propriétés de $A_D^{1/\mu}(0)$, partie principale de $A_D^{1/\mu}(\omega)$. À géométrie fixée, nous pouvons utiliser les Théorèmes 1.3.3, 1.4.2 et 1.4.1 pour savoir si $A_D^{1/\mu}(0)$ est un isomorphisme. Lorsque c'est le cas, puisque pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $A_D^{1/\mu}(\omega)$ diffère de $A_D^{1/\mu}(0)$ d'une perturbation compacte, on déduit d'après le théorème de Fredholm analytique que le problème (7.9) est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. Lorsque (7.9) est bien posé, on peut discrétiser la formulation variationnelle (7.14) par une méthode de type éléments finis pour approcher E_z. On retrouve ensuite $\boldsymbol{H}_\perp$ à partir de E_z.

Supposons maintenant que l'on veuille calculer directement $\boldsymbol{H}_\perp$. Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, c'est plutôt inhabituel car il faut résoudre un problème vectoriel au lieu d'un problème scalaire, mais cela peut permettre d'avoir une meilleure précision sur $\boldsymbol{H}_\perp$. Nous souhaitons mettre en évidence une originalité du cadre fonctionnel liée à la présence des matériaux négatifs. Si l'on procède comme pour les diélectriques classiques, on peut aboutir à une formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ qui n'est pas équivalente au problème (7.9).

7.1.2 Formulation vectorielle pour $\boldsymbol{H}_\perp$

À l'instar de ce que nous avons fait pour E_z, nous cherchons à construire une formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ équivalente au problème (7.9).

Une première formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$

Présentons une première formulation pour $\boldsymbol{H}_\perp$ dans $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$.

Proposition 7.1.3 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie le problème (7.9) alors $\boldsymbol{H}_\perp$ est une solution de

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H}_\perp \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \omega^2\mu\boldsymbol{H}_\perp\cdot\boldsymbol{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1}J_z\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega). \end{array}\right. \tag{7.15}$$

2) Si $\boldsymbol{H}_\perp$ vérifie le problème (7.15) alors $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = (\boldsymbol{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J))$ est une solution de (7.9).

Preuve. 1) Supposons $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ solution de (7.9). Au sens des distributions, on a alors $i\omega E_z + \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp = \varepsilon^{-1}J_z$. En multipliant par $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ pour $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, en effectuant une intégration par parties et en utilisant $E_z \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on obtient (7.15).
2) Réciproquement, si $\boldsymbol{H}_\perp$ vérifie (7.15), définissons $E_z = i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J)$. Dans ce cas, clairement, l'équation

$$i\omega\varepsilon E_z + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp = J_z \tag{7.16}$$

est satisfaite. Au sens des distributions, à partir de (7.15), on trouve $\mathbf{rot}\,(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp) - \omega^2\mu\boldsymbol{H}_\perp = \mathbf{rot}\,(\varepsilon^{-1}J_z)$. Ceci conduit à

$$-\,i\omega\mu\boldsymbol{H}_\perp + \mathbf{rot}\,E_z = 0. \tag{7.17}$$

Montrons ensuite $E_z = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. En combinant (7.15) et (7.16), on obtient $(E_z, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = i\omega(\mu\boldsymbol{H}_\perp, \boldsymbol{v})_\Omega$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$. En utilisant (7.17) et la surjectivité de la trace tangentielle de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ (Théorème 7.0.5), on déduit $E_z = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Grâce à (7.17), on trouve $\mu\boldsymbol{H}_\perp\cdot\boldsymbol{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. ■

Malheureusement, il n'est pas évident d'étudier le problème (7.15) car l'injection de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. En particulier, on ne peut pas utiliser la théorie de Fredholm. Classiquement pour les équations de Maxwell, l'idée consiste à travailler dans l'espace $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$. Lorsque μ est positif, on sait d'après [150] que cette propriété de compacité est valable. Dans un premier temps, suivons cette démarche. De la Proposition 7.1.3, nous déduisons sans peine la

Proposition 7.1.4 *Supposons $\omega \neq 0$. Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie le problème (7.9) alors $\boldsymbol{H}_\perp$ est solution de*

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H}_\perp \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \omega^2\mu\boldsymbol{H}_\perp\cdot\boldsymbol{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1}J_z\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \end{array} \right. \tag{7.18}$$

Puisque nous désirons une formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$ équivalente au problème (7.9), nous avons besoin d'une réciproque à la Proposition 7.1.4. Nous allons voir que cette réciproque n'est pas toujours vraie, dans le sens où, à partir d'une solution du problème (7.18), on ne peut pas toujours construire une solution de (7.9). Pour mettre en évidence ce phénomène, définissons l'espace des fonctions à moyenne nulle

$$\mathrm{H}^1_\#(\Omega) := \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \mid \int_\Omega v = 0\}.$$

La seule constante dans $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est zéro. En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte, on montre que l'application $(u,v)\mapsto(\nabla u,\nabla v)_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Introduisons alors, avec le théorème de représentation de Riesz, l'opérateur borné $A^\mu_N : \mathrm{H}^1_\#(\Omega)\to\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A^\mu_N u),\nabla v)_\Omega = (\mu\nabla u,\nabla v)_\Omega, \qquad \forall (u,v)\in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)\times\mathrm{H}^1_\#(\Omega). \tag{7.19}$$

Dans la notation A^μ_N, le « N » fait référence à la condition de Neumann homogène imposée de façon faible. Lorsque μ est strictement positif, le théorème de Lax-Milgram indique que A^μ_N constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Lorsque, μ change de signe, ce n'est bien entendu pas toujours le cas. Supposons qu'il existe $\lambda_N \in \ker A^\mu_N$ avec $\lambda_N \neq 0$. Dans ce cas, on observe que $\nabla\lambda_N$ vérifie le problème (7.18) avec $J_z = 0$. Par contre, il n'existe pas d'élément $E_z \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que le couple $(E_z, \nabla\lambda_N)$ soit solution de (7.9) avec $J_z = 0$. Par conséquent, pour avoir une réciproque à la Proposition 7.1.4, il faut au moins supposer A^μ_N injectif.

Proposition 7.1.5 *Supposons $\omega\neq 0$. Supposons que $A^\mu_N : \mathrm{H}^1_\#(\Omega)\to\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ définisse un isomorphisme. Alors si $\boldsymbol{H}_\perp$ vérifie (7.18), le couple $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = (\boldsymbol{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J))$ vérifie le problème (7.9).*

Preuve. Supposons que $\boldsymbol{H}_\perp$ vérifie (7.18). Pour prouver que $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = (\boldsymbol{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J))$ constitue une solution de (7.9), il suffit de montrer que $\boldsymbol{H}_\perp$ satisfait (7.15) et d'utiliser la Proposition 7.1.3. Considérons $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Introduisons ψ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ vérifiant $(\mu\nabla\psi,\nabla\psi')_\Omega = (\mu\boldsymbol{v},\nabla\psi')_\Omega$ pour tout $\psi'\in\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. La fonction ψ est bien définie car on a supposé que A^μ_N est un isomorphisme. D'après le Corollaire 7.0.4, le champ $\boldsymbol{v}-\nabla\psi$ appartient à l'espace $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En injectant $\boldsymbol{v}-\nabla\psi$ dans (7.18), on obtient $(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{H}_\perp,\boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}J_z, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$. Ceci montre bien que $\boldsymbol{H}_\perp$ satisfait (7.15). ■

Nous pouvons énoncer le

Corollaire 7.1.6 *Supposons $\omega\neq 0$. Supposons que $A^\mu_N : \mathrm{H}^1_\#(\Omega)\to\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ définisse un isomorphisme. Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.18) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.18)

Pour prouver que le problème (7.18) est bien posé, nous allons utiliser la théorie de Fredholm. Pour ce faire, nous avons besoin de prouver un résultat d'injection compacte de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, qui n'est pas toujours vrai lorsque μ change de signe (cf. Proposition 8.5.1, Chapitre 8).

Théorème 7.1.7 *Supposons que l'opérateur $A^\mu_N : \mathrm{H}^1_\#(\Omega)\to\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ défini en (7.19) constitue un isomorphisme. Alors $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u},\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.*

Preuve. Considérons $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n := \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Puisque $\mu \boldsymbol{u}_n$ est un élément à divergence nulle satisfaisant $\mu \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, et puisque, par hypothèse, $\partial\Omega$ est connexe, il existe d'après le théorème 3.12 de [84], $\varphi_n \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\varphi_n = \mu \boldsymbol{u}_n$. Prouvons que nous pouvons extraire de $(\mathbf{rot}\,\varphi_n)$, ou de façon équivalente, de $(\nabla\varphi_n)$, une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Au sens des distributions, on a $\operatorname{rot} \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_n = f_n$. En utilisant la formule de Green (7.13), on déduit qu'on a, pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega = (\mu^{-1}\nabla\varphi_n, \nabla\varphi')_\Omega = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_n, \varphi')_\Omega$. Définissons l'opérateur borné $A_D^{1/\mu} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_D^{1/\mu}\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = (\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega, \qquad \forall(\varphi,\varphi') \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Nous prouverons dans la section suivante (cf. Théorème 7.2.1) que $A_D^{1/\mu} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est un isomorphisme si et seulement si $A_N^{\mu} : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est un isomorphisme. Puisque nous avons supposé que A_N^{μ} est un isomorphisme, nous déduisons que la suite $(A_D^{1/\mu}\varphi_n)$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. D'après le théorème de Rellich qui stipule que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on peut extraire de (φ_n) une sous-suite (toujours notée (φ_n)) telle que $(A_D^{1/\mu}\varphi_n)$ converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Introduisons $\varphi_{mn} := \varphi_m - \varphi_n$ et $f_{mn} := f_m - f_n$. On peut écrire

$$\begin{aligned}(\nabla(A_D^{1/\mu}\varphi_{mn}), \nabla(A_D^{1/\mu}\varphi_{mn})_\Omega &= (\mu^{-1}\nabla\varphi_{mn}, \nabla(A_D^{1/\mu}\varphi_{mn})_\Omega \\ &= (f_{mn}, A_D^{1/\mu}\varphi_{mn})_\Omega\end{aligned} \tag{7.20}$$

Puisque $(A_D^{1/\mu}\varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on déduit de la relation (7.20) que $(A_D^{1/\mu}\varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme, on déduit que la suite φ_n est de Cauchy dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ donc qu'elle converge. On peut donc extraire de $(\boldsymbol{u}_n)$ une sous-suite telle que $(\boldsymbol{u}_n) = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Ceci permet de conclure que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Pour montrer que $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, il suffit de prouver l'estimation

$$\|\boldsymbol{u}\|_\Omega \le C\,\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|_\Omega\,, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \tag{7.21}$$

Pour y parvenir, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(\boldsymbol{u}_n)$ d'éléments de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_n\|_\Omega = 0.$$

D'après le résultat d'injection compacte que nous venons de montrer, on peut extraire de $(\boldsymbol{u}_n)$ une sous-suite (toujours notée $(\boldsymbol{u}_n)$) qui converge vers un certain $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\boldsymbol{u}\|_\Omega = 1$. On vérifie alors qu'au sens des distributions, on a $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$ p.p. dans Ω. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, on déduit d'après le théorème 3.2 de [84] qu'il existe $\varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$. Puisque $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, nécessairement $\varphi \in \ker A_N^{\mu}$, $\varphi = 0$ et donc $\boldsymbol{u} = 0$. On aboutit ainsi à une contradiction. Ceci achève la preuve de ce théorème ■

Remarque 7.1.8 *Lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe, ou de façon équivalente en 2D, quand Ω n'est pas simplement connexe, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v})_\Omega$ ne définit plus un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En effet, dans ce cas, il reste dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ les gradients des fonctions φ vérifiant $\operatorname{div}(\mu\nabla\varphi) = 0$ et φ constant sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$. Cet espace vectoriel est de dimension égale au nombre de composantes connexes de la frontière moins un. Nous montrerons dans l'étude des équations de Maxwell en 3D comment procéder lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe.*

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\mathscr{A}_T(\omega)$: $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que, pour tout $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \times \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$,

$$(\mathrm{rot}\,(\mathscr{A}_T(\omega)\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_\Omega. \tag{7.22}$$

Théorème 7.1.9 *Supposons que l'opérateur $A_N^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ défini en (7.19) constitue un isomorphisme. Alors $\mathscr{A}_T(0)$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.*

Remarque 7.1.10 *Dans ce théorème, l'hypothèse effectuée sur ε est relativement faible. En effet, nous supposons seulement $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Ceci peut paraître surprenant quand on a à l'esprit que les opérateurs $A_D^{1/\varepsilon}$ et $A_N^{1/\varepsilon}$ définis respectivement par*

$$\begin{array}{rcll} (\nabla(A_D^{1/\varepsilon}u), \nabla v)_\Omega & = & (\varepsilon^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega); \\ (\nabla(A_N^{1/\varepsilon}u), \nabla v)_\Omega & = & (\varepsilon^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \times \mathrm{H}^1_\#(\Omega); \end{array}$$

ne vérifient pas cette propriété. Dans le Chapitre 1, nous avons en effet rencontré des configurations pour lesquelles $A_D^{1/\varepsilon}$ et $A_N^{1/\varepsilon}$ ne sont pas Fredholm. C'est en particulier le cas lorsque ε prend des valeurs opposées de part et d'autre d'une interface localement droite. L'opérateur $\mathscr{A}_T(0)$, lui, n'est sensible qu'aux valeurs du paramètre μ qui apparaît dans l'espace.

Preuve. Pour $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ la fonction vérifiant $-\Delta\varphi = \varepsilon\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$. Considérons ensuite $\psi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ satisfaisant $(\mu\nabla\psi, \nabla\psi')_\Omega = (\mu\,\mathbf{rot}\,\varphi, \nabla\psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Puisque par hypothèse $A_N^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est un isomorphisme, la fonction ψ est bien définie. Introduisons alors l'opérateur borné $\mathbb{T} : \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ fait correspondre $\mathbb{T}\boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\,\varphi - \nabla\psi$.

Pour tout $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \times \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{rot}\,(\mathscr{A}_T(0)(\mathbb{T}\boldsymbol{u})), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega & = & (\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,(\mathbb{T}\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ & = & (\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,(\mathbf{rot}\,\varphi - \nabla\psi), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ & = & (-\varepsilon^{-1}\Delta\varphi, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ & = & (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega. \end{array}$$

Ainsi, $\mathscr{A}_T(0) \circ \mathbb{T}$ est égal à l'identité de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Puisque $\mathscr{A}_T(0)$ est autoadjoint, ceci montre que $\mathscr{A}_T(0)$ définit un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ avec $\mathscr{A}_T(0)^{-1} = \mathbb{T}$. ■

Théorème 7.1.11 *Supposons que l'opérateur $A_N^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ défini en (7.19) soit un isomorphisme.*
Alors l'opérateur $\mathscr{A}_T(\omega)$ défini en (7.22) constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.
En conséquence, le problème (7.9) pour $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$.

Preuve. D'après le Théorème 7.1.7, l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathscr{A}_T(\omega)$ diffère de l'isomorphisme $\mathscr{A}_T(0)$ d'une perturbation compacte. Le théorème de Fredholm analytique permet alors de conclure que $\mathscr{A}_T(\omega)$ constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$. Avec le Corollaire 7.1.6, on déduit que le problème TM est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$. ■

7.1.3 Bilan de l'approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic*

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, nous pouvons résumer les résultats que nous avons obtenus par le diagramme suivant.

$A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

$\Updownarrow$

Le problème (7.9) pour le mode TM est bien posé.

$\Updownarrow$ si A_N^μ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$

$\mathscr{A}_T(\omega)$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.

Nous allons maintenant quantifier la force de l'hypothèse « A_N^μ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ ». Pour cela, nous étudierons le lien entre les opérateurs $A_N^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ et $A_D^{1/\mu}(\omega) : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Nous montrerons que si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme alors A_N^μ est Fredholm d'indice zéro.

7.2 Relation entre les opérateurs scalaires

Pour mémoire, rappelons que les opérateurs A_N^μ et $A_D^{1/\mu}(\omega)$ sont définis par

$$\begin{array}{lcll} (\nabla(A_N^\mu u), \nabla v)_\Omega & = & (\mu\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \times \mathrm{H}_\#^1(\Omega); \\ (\nabla(A_D^{1/\mu}(\omega) u), \nabla v)_\Omega & = & (\mu^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega - \omega^2(\varepsilon u, v)_\Omega, & \forall (u,v) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{array}$$

De plus, nous avons introduit $A_D^{1/\mu} = A_D^{1/\mu}(0)$.

Théorème 7.2.1 *L'opérateur $A_N^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ définit un isomorphisme si et seulement si $A_D^{1/\mu} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Preuve. I) Supposons que $A_N^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ soit un isomorphisme. Pour $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ la fonction vérifiant $(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\nabla u, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$. Puisque A_N^μ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$, la fonction $\varphi \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ est bien définie. En remarquant que $(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\,\mathbf{rot}\,\varphi, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega$, on obtient, au sens des distributions, $\mathrm{rot}\,(\mu(\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi)) = 0$. Puisque $\mu(\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi)\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe un unique $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mu(\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi) = \nabla\psi$ (cf. théorème 3.2 de [84]). Introduisons alors l'opérateur continu $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ qui à $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ fait correspondre $\mathtt{T}u = \psi$.
Pour tout $(u,v) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} (\nabla(A_D^{1/\mu}(\mathtt{T}u)), \nabla v)_\Omega & = & (\mu^{-1}\nabla(\mathtt{T}u), \nabla v)_\Omega \\ & = & (\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi, \nabla v)_\Omega \\ & = & (\nabla u, \nabla v)_\Omega. \end{array}$$

Ci-dessus, pour obtenir la dernière ligne, on intègre par parties avec la formule de Green (7.12) puis on utilise $\mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\varphi) = 0$ p.p. dans Ω et $v = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi, $A_D^{1/\mu} \circ \mathtt{T}$ est égal à l'identité de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est autoadjoint, on déduit que $A_D^{1/\mu}$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ avec $(A_D^{1/\mu})^{-1} = \mathtt{T}$.

ii) Supposons que $A_D^{1/\mu}$ soit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. On va procéder de façon très similaire à ce que nous venons de faire. Pour $u \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ la fonction vérifiant $(\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu^{-1}\nabla u, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, la fonction $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est bien définie. En remarquant que $(\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\,\mathbf{rot}\,\varphi, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega$, on obtient, au sens des distributions, $\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}(\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi)) = 0$. Par conséquent, il existe un unique $\psi \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ tel que $\mu^{-1}(\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi) = \nabla\psi$. Introduisons alors l'opérateur continu $\mathtt{T} : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ qui à $u \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ fait correspondre $\mathtt{T}u = \psi$.
Pour tout $(u, v) \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \times \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned}(\nabla(A_N^\mu(\mathtt{T}u)), \nabla v)_\Omega &= (\mu\nabla(\mathtt{T}u), \nabla v)_\Omega \\ &= (\nabla u - \mathbf{rot}\,\varphi, \nabla v)_\Omega \\ &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega.\end{aligned}$$

Ci-dessus, pour obtenir la dernière ligne, on intègre par parties avec (7.13) puis on utilise $\mathrm{rot}\,(\nabla v) = 0$ et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi, $A_D^{1/\mu} \circ \mathtt{T}$ est égal à l'identité de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. On déduit que A_N^μ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ avec $(A_N^\mu)^{-1} = \mathtt{T}$. ■

Nous souhaitons maintenant obtenir un résultat équivalent au Théorème 7.2.1 lorsque les opérateurs $A_D^{1/\mu}$ et A_N^μ sont Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro. Plaçons-nous dans une telle configuration. Introduisons $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ une base de $\ker A_D^{1/\mu}$ telle que $(\nabla\lambda_D^i, \nabla\lambda_D^j)_\Omega = \delta_{ij}$ et $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ une base de $\ker A_N^\mu$ telle que $(\nabla\lambda_N^i, \nabla\lambda_N^j)_\Omega = \delta_{ij}$. Définissons les espaces S_D et S_N vérifiant

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \ker A_D^{1/\mu} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}_D \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_\#^1(\Omega) = \ker A_N^\mu \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}_N. \tag{7.23}$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs

$$\begin{aligned} \tilde{A}_D^{1/\mu} &: \mathrm{S}_D \to \mathrm{S}_D \quad \text{tel que} \quad (\nabla(\tilde{A}_D^{1/\mu}\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = (\mu^{-1}\nabla\varphi,\, \nabla\varphi')_\Omega, \quad \forall\varphi, \varphi' \in \mathrm{S}_D; \\ \text{et} \quad \tilde{A}_N^\mu &: \mathrm{S}_N \to \mathrm{S}_N \quad \text{tel que} \quad (\nabla(\tilde{A}_N^\mu\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\nabla\varphi,\, \nabla\varphi')_\Omega, \quad \forall\varphi, \varphi' \in \mathrm{S}_N. \end{aligned}$$

Classiquement (cf. [116]), on a la

Proposition 7.2.2 *Les opérateurs $\tilde{A}_D^{1/\mu} : \mathrm{S}_D \to \mathrm{S}_D$ et $\tilde{A}_N^\mu : \mathrm{S}_N \to \mathrm{S}_N$ constituent des isomorphismes.*

Montrons à présent le

Théorème 7.2.3 *L'opérateur $A_N^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $A_D^{1/\mu} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro. De plus, lorsque A_N^μ et $A_D^{1/\mu}$ sont Fredholm d'indice zéro, on a $\dim\ker A_D^{1/\mu} = \dim\ker A_N^\mu$.*

Preuve. Supposons que A_N^μ soit Fredholm d'indice zéro. Si A_N^μ est injectif, alors A_N^μ est un isomorphisme et dans ce cas, le Théorème 7.2.1 indique que $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme. Intéressons-nous à la situation où A_N^μ présente un noyau $\mathrm{vect}(\lambda_N^1, \ldots, \lambda_N^{n_N})$ non réduit à zéro. Nous allons prouver que $A_D^{1/\mu}$ est de type Fredholm en construisant une paramétrix à droite pour $A_D^{1/\mu}$, c'est-à-dire un inverse à droite pour $A_D^{1/\mu}$ modulo un opérateur compact. Autrement dit, nous cherchons un opérateur borné $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et un opérateur compact $K : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tels que $A_D^{1/\mu} \circ \mathtt{T} + K$ soit égal à l'identité de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Nous généraliserons la démonstration du Théorème 7.2.1.

Définissons $\mathbf{\Gamma}_N^i := \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\lambda_N^i$, $i = 1 \ldots n_N$. Observons que $(\mu\mathbf{\Gamma}_N^i, \mathbf{rot}\,\lambda_N^j)_\Omega = \delta^{ij}$ avec $\delta^{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta^{ij} = 0$ si $i \neq j$. Pour $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{S}_N$ la fonction vérifiant

$$(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i), \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega, \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{S}_N, \tag{7.24}$$

où $\beta^i := (\mu\nabla u, \mathbf{rot}\,\lambda_N^i)_\Omega$. Puisque $\tilde{A}_N^\mu$ est un isomorphisme de S_N, la fonction $\varphi \in \mathrm{S}_N$ est bien définie. En remarquant que $(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\,\mathbf{rot}\,\varphi, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega$ et que $(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N}\beta^i\boldsymbol{\Gamma}_N^i), \mathbf{rot}\,\lambda_N^j)_\Omega = 0$ pour $j = 1\dots n_N$, on obtient $(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N}\beta^i\boldsymbol{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot}\,\varphi), \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega = 0$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Cela implique, $\mathrm{rot}\,(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N}\beta^i\boldsymbol{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot}\,\varphi)) = 0$, et $\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N}\beta^i\boldsymbol{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot}\,\varphi)\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.2 de [84], il existe un unique $\psi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N}\beta^i\boldsymbol{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot}\,\varphi) = \nabla\psi$. Introduisons alors l'opérateur continu $\mathtt{T} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ qui à $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ fait correspondre $\mathtt{T}u = \psi$ ainsi que l'opérateur $K : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(Ku), \nabla v)_\Omega = \sum_{i=1}^{n_N}(\mu\nabla u, \mathbf{rot}\,\lambda_N^i)_\Omega(\boldsymbol{\Gamma}_N^i, \nabla v)_\Omega, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned}(\nabla(A_D^{1/\mu}(\mathtt{T}u)), \nabla v)_\Omega &= (\mu^{-1}\nabla(\mathtt{T}u), \nabla v)_\Omega \\ &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega - (\nabla(Ku), \nabla v)_\Omega.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $A_D^{1/\mu}\circ\mathtt{T} + K = \mathrm{Id}$. Or K est de rang fini donc c'est un opérateur compact. Nous pouvons donc conclure que l'opérateur autoadjoint $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro.

En adaptant le raisonnement du point II) de la preuve du Théorème 7.2.1 comme ci-dessus, on montre que si $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro, alors A_N^μ est Fredholm d'indice zéro.

Il ne reste plus qu'à prouver que les dimensions des noyaux des opérateurs A_N^μ et $A_D^{1/\mu}$ sont égales lorsque A_N^μ et $A_D^{1/\mu}$ sont Fredholm d'indice zéro. Considérons $\lambda_D^i \in \ker A_D^{1/\mu}$. On a $(\mu^{-1}\,\mathbf{rot}\,\lambda_D^i, \mathbf{rot}\,v)_\Omega = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Ceci implique $\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\,\mathbf{rot}\,\lambda_D^i) = 0$. D'après le théorème 3.2 de [84], on sait qu'il existe un unique $\psi^i \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que $\mu^{-1}\,\mathbf{rot}\,\lambda_D^i = \nabla\psi^i$. En remarquant que $(\mu\nabla\psi^i, \nabla v)_\Omega = (\mathbf{rot}\,\lambda_D^i, \nabla v)_\Omega = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ (pour le voir, effectuer une intégration par parties et utiliser $\lambda_D^i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$), on déduit que $\psi^i \in \ker A_N^\mu$. Montrons que la famille $\{\psi^i\}_{i=1}^{n_D}$ est libre. Donnons-nous n_D réels α^i tels que $\sum_{i=1}^{n_D}\alpha^i\psi^i = 0$. Alors, on a $\mathbf{rot}\,(\sum_{i=1}^{n_D}\alpha^i\lambda_D^i) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{n_D}\alpha^i\lambda_D^i = 0$ car les λ_D^i sont dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Puisque la famille $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ est libre, on déduit $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_D} = 0$. Ceci montre que $\dim\ker A_N^\mu \geq \dim\ker A_D^{1/\mu}$. De même, on prouve $\dim\ker A_D^{1/\mu} \geq \dim\ker A_N^\mu$ pour parvenir à $\dim\ker A_D^{1/\mu} = \dim\ker A_N^\mu$. ■

On déduit le

Corollaire 7.2.4 *Supposons que l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega) : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $A_N^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. L'opérateur $A_D^{1/\mu} = A_D^{1/\mu}(0)$ diffère de $A_D^{1/\mu}(\omega)$ d'une perturbation compacte. Par conséquent, $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro. Le Théorème 7.2.3 indique alors que A_N^μ est Fredholm d'indice zéro. ■

Supposons le problème TM (7.9) bien posé. Dans ce cas, d'après le Corollaire 7.1.2, l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme. En vertu du Corollaire 7.2.4, il suit que A_N^μ est Fredholm d'indice zéro. Deux cas de figures se présentent alors. Si A_N^μ est injectif, le problème (7.18), posé dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, possède une unique solution. Si A_N^μ n'est pas injectif, alors (7.18) n'est pas injectif. Dans cette situation, il faut travailler dans un autre cadre fonctionnel que $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.

7.3 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{H}_\perp$

Dans cette section, nous supposons que l'opérateur A_N^μ est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. Réintroduisons $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ une base de $\ker A_N^\mu$ telle que

$(\nabla\lambda_N^i, \nabla\lambda_N^j)_\Omega = \delta_{ij}$. En (7.23), nous avons défini S_N tel que $\mathrm{H}^1_\#(\Omega) = \ker A_N^\mu \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}_N$. Considérons ensuite l'espace

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, (\mu\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0,\ \forall\varphi \in \mathrm{S}_N\}\,.$$

Puisque $\mathrm{S}_N \subset \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$, on a $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$.

Proposition 7.3.1 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ vérifie le problème (7.9) alors $\boldsymbol{H}_\perp$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H}_\perp \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \ \ \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \omega^2\mu\boldsymbol{H}_\perp\cdot\boldsymbol{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1}J_z\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \quad \forall\boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega). \end{array}\right. \tag{7.25}$$

2) Si $\boldsymbol{H}_\perp$ satisfait (7.25), le couple $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = (\boldsymbol{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J))$ vérifie le problème (7.9).

Preuve. La démonstration du point 1) ne pose pas de problème. Concentrons-nous sur le point 2). Supposons que $\boldsymbol{H}_\perp$ vérifie (7.25). Pour prouver que $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z) = (\boldsymbol{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp - J))$ constitue une solution de (7.9), de nouveau, il suffit de montrer que $\boldsymbol{H}_\perp$ satisfait (7.15) et d'utiliser la Proposition 7.1.3. Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Introduisons ψ l'unique élément de S_N vérifiant $(\mu\nabla\psi, \nabla\psi')_\Omega = (\mu\boldsymbol{v}, \nabla\psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in \mathrm{S}_N$. Le champ $\boldsymbol{v} - \nabla\psi$ est dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$. En injectant $\boldsymbol{v} - \nabla\psi$ dans (7.25), on obtient $(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_\perp, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{H}_\perp, \boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}J_z, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$. Ceci prouve que $\boldsymbol{H}_\perp$ satisfait (7.15). ■

Dans ce nouveau cadre fonctionnel, on a le résultat d'équivalence suivant, sans hypothèse additionnelle.

Corollaire 7.3.2 *Supposons $\omega \neq 0$. Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.25) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.25)

Avant d'aller plus loin, précisons la structure de l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$.

Lemme 7.3.3 *Pour $i = 1\ldots n_N$, il existe $\boldsymbol{\Lambda}_N^i \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que $(\mu\boldsymbol{\Lambda}_N^i, \nabla\lambda_N^j)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1\ldots n_N$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) = \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \oplus \mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda}_N^i)_{i=1}^{n_N}.$$

Remarque 7.3.4 *Dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, il reste les fonctions $\nabla\lambda_N^i$. Cependant, en raison de la présence dans l'espace variationnel des $\boldsymbol{\Lambda}_N^i$, les-dites fonctions ne seront pas dans le noyau de l'opérateur associé à (7.25).*

Preuve. Pour $i = 1\ldots n_N$, introduisons la forme linéaire ℓ^i sur $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ définie par $\ell^i(\boldsymbol{v}) = (\mu\boldsymbol{v}, \nabla\lambda_N^i)_\Omega$. Montrons que la famille $\ell^1, \ldots, \ell^{n_N}$ est libre. Donnons-nous n_N constantes $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n_N}$ telles que $\sum_{i=1}^{n_N}\alpha^i\ell^i = 0$. Dans ce cas, pour tout $\boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, on a $(\mu\boldsymbol{v}, \sum_{i=1}^{n_N}\alpha^i\nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$. Ceci implique $(\mu\boldsymbol{w}, \sum_{i=1}^{n_N}\alpha^i\nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$ pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Pour le voir, pour $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{S}_N$ la fonction telle que $(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\boldsymbol{w}, \nabla\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{S}_N$. On a $\boldsymbol{w} - \nabla\varphi \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$. Puisque $(\mu\nabla\varphi, \nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$, $i = 1\ldots n_N$, on obtient bien $(\mu\boldsymbol{w}, \sum_{i=1}^{n_N}\alpha^i\nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$.

En utilisant la densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on déduit $\sum_{i=1}^{n_N}\alpha^i\nabla\lambda_N^i = 0$. Puisque la famille $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ est une base de $\ker A_N^\mu$, on a $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{n_N} = 0$. Ceci achève de montrer que $\ell^1, \ldots, \ell^{n_N}$ est libre. On conclut ensuite grâce au Théorème 7.3.5. ■

À partir du lemme 4.12 de [104], on montre le théorème de base antéduale suivant.

Théorème 7.3.5 *Soit* V *un espace vectoriel normé. Pour toute famille libre d'éléments* $\ell^1, \dots, \ell^n \in \mathrm{V}^*$, *il existe* $x^1, \dots, x^n \in \mathrm{V}$ *tels que*

$$\ell^i(x^j) = \delta^{ij} \qquad \text{avec } \delta^{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta^{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Prouvons ensuite un résultat d'injection compacte de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 7.3.6 *Supposons* A_N^μ *Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. L'espace* $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ *s'injecte de façon compacte dans* $\mathbf{L}^2(\Omega)$. *De plus, l'application* $\boldsymbol{u} \mapsto \|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\|_\Omega + \sum_{i=1}^{n_N} |\alpha^i|$, *où* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ *et* $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n_N}) \in \mathbb{R}^{n_N}$ *sont les éléments tels que* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \boldsymbol{\Lambda}_N^i$, *définit une norme sur* $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, *équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot};\,\Omega)} := (\|\cdot\|_\Omega^2 + \|\mathrm{rot}\,\cdot\|_\Omega^2)^{1/2}$.

Preuve. Considérons $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 7.3.3, définissons $\boldsymbol{v}_n \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ et $(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^{n_N})$ les éléments tels que $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n + \sum_{i=1}^{n_N} \alpha_n^i \boldsymbol{\Lambda}_N^i$. Pour prouver le Théorème 7.3.6, il suffit de montrer qu'on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $f_n := \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Puisque $\mu\boldsymbol{v}_n$ est un élément à divergence nulle satisfaisant $\mu\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe d'après le théorème 3.12 de [84], $\varphi_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\varphi_n = \mu\boldsymbol{v}_n$. Comme dans la démonstration du Théorème 7.1.7, nous souhaitons maintenant prouver qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot}\,\varphi_n)$, ou de façon équivalente, de $(\nabla\varphi_n)$, une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Au sens des distributions, on a de nouveau $\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_n = f_n$. En utilisant la formule de Green (7.13), on déduit, pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n, \mathbf{rot}\,\varphi')_\Omega = (\mu^{-1}\nabla\varphi_n, \nabla\varphi')_\Omega = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_n, \varphi')_\Omega. \tag{7.26}$$

Puisque, par hypothèse, A_N^μ est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension $n_N > 1$, nous savons d'après le Théorème 7.2.3 que $A_D^{1/\mu}$ est également Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension n_N. En reprenant la preuve du Théorème 7.2.3, on montre qu'on peut construire un opérateur continu $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $(\mu^{-1}\nabla u, \nabla(\mathtt{T}v))_\Omega = (\nabla u, \nabla v)_\Omega - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i (\nabla u, \boldsymbol{\Gamma}_N^i)_\Omega$ pour tout $(u, v) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, avec $\beta^i = (\mu\nabla v, \mathbf{rot}\,\lambda_N^i)_\Omega$ et $\boldsymbol{\Gamma}_N^i = \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\lambda_N^i$. Puisque $\mathtt{T}$ est continu, $(\mathtt{T}\varphi_n)$ est bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire de (φ_n) une sous-suite, toujours notée (φ_n), telle que $(\mathtt{T}\varphi_n)$ converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i = 1 \dots n_N$, la suite (β_n^i) est bornée (ici $\beta_n^i = (\mu\nabla\varphi_n, \mathbf{rot}\,\lambda_N^i)_\Omega$), on peut de nouveau extraire de (φ_n) une sous-suite, toujours notée (φ_n), telle que (β_n^i) converge. Introduisons $\varphi_{mn} = \varphi_m - \varphi_n$, $\beta_{mn}^i = \beta_m - \beta_n$ et $f_{mn} = f_m - f_n$. En testant dans (7.26) par $\mathtt{T}\varphi_{mn}$, on obtient

$$\begin{aligned} |(f_{mn}, \varphi_{mn})_\Omega| &= |(\mu^{-1}\nabla\varphi_{mn}, \nabla(\mathtt{T}\varphi_{mn}))_\Omega| \\ &\geq (\nabla\varphi_{mn}, \nabla\varphi_{mn})_\Omega - |\textstyle\sum_{i=1}^{n_N} \beta_{mn}^i (\nabla\varphi_{mn}, \boldsymbol{\Lambda}_N^i)_\Omega|. \end{aligned}$$

Cette estimation prouve que la suite $(\nabla\varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc qu'elle converge. Ainsi, on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n) = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\varphi_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Ceci achève de montrer que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.
On démontre le résultat d'équivalence de normes de façon classique, comme dans la preuve du Théorème 7.1.7, en raisonnant par l'absurde . ■

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que, pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \times \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$,

$$(\mathrm{rot}\,(\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega. \tag{7.27}$$

Ci-dessus, nous avons muni $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ du produit scalaire de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Nous procédons ainsi car lorsque A_N^μ n'est pas injectif, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ ne constitue pas un produit scalaire sur $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$.

Théorème 7.3.7 *Supposons A_N^μ Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. L'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_T(0) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. L'idée de nouveau va consister à construire un opérateur continu $\tilde{\mathbb{T}} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ pour restaurer une certaine positivité, à une perturbation compacte près. Considérons $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$.
Définissons d'abord la fonction $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta\varphi = \varepsilon\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$. Introduisons ensuite $\psi \in \mathrm{S}_N$ satisfaisant $(\mu\nabla\psi, \nabla\psi')_\Omega = (\mu\,\mathbf{rot}\,\varphi, \nabla\psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in \mathrm{S}_N$. Puisque, d'après la Proposition 7.2.2, $\tilde{A}_N^\mu : \mathrm{S}_N \to \mathrm{S}_N$ constitue un isomorphisme, la fonction ψ est bien définie. Introduisons alors l'opérateur $\tilde{\mathbb{T}} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ fait correspondre $\tilde{\mathbb{T}}\boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\,\varphi - \nabla\psi$ ainsi que l'opérateur $\tilde{K} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que

$$(\mathrm{rot}\,(\tilde{K}\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\tilde{K}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall v \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega).$$

Pour tout $v \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} & (\mathrm{rot}\,(\tilde{\mathscr{A}}_T(0)(\tilde{\mathbb{T}}\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\tilde{\mathscr{A}}_T(0)(\tilde{\mathbb{T}}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_\Omega \\ = \;& (\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,(\tilde{\mathbb{T}}\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ = \;& (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ = \;& (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega - (\mathrm{rot}\,(\tilde{K}\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega - (\tilde{K}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\tilde{\mathscr{A}}_T(0) \circ \tilde{\mathbb{T}} + \tilde{K} = \mathrm{Id}$. Or d'après le Théorème 7.3.6, l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, $\tilde{K}$ définit un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$. Nous déduisons que $\tilde{\mathbb{T}}$ constitue une paramétrix à droite pour $\tilde{\mathscr{A}}_T(0)$. Ceci montre que l'opérateur autoadjoint $\tilde{\mathscr{A}}_T(0)$ est Fredholm d'indice zéro. ■

Corollaire 7.3.8 *Supposons que les paramètres ε, μ et ω soient tels que l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega) : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ du problème pour E_z définisse un isomorphisme. Alors, l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ du problème pour $\boldsymbol{H}_\perp$ est également un isomorphisme.*

Preuve. D'après le Théorème 7.3.6, nous savons que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)$ diffère de $\tilde{\mathscr{A}}_T(0)$ d'une perturbation compacte. Puisque $\tilde{\mathscr{A}}_T(0)$ est Fredholm d'indice zéro en vertu du Théorème 7.3.7, on déduit que $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)$ est Fredholm d'indice zéro. Si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme alors le problème TM est bien posé. Dans ce cas, le Corollaire (7.3.2) assure que $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)$ est injectif. En vertu de l'alternative de Fredholm, on déduit que $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)$ est un isomorphisme. ■

Remarque 7.3.9 *La moralité est la suivante. Lorsque $A_D^{1/\mu}(\omega)$ définit un isomorphisme, le problème (7.9) pour $(\boldsymbol{H}_\perp, E_z)$ est bien posé. On peut alors discrétiser $(\mathscr{P}_{E_z})_\omega$ pour calculer E_z puis ensuite retrouver $\boldsymbol{H}_\perp$. Si l'on souhaite approcher directement $\boldsymbol{H}_\perp$, il faut faire attention lorsque μ change de signe. En effet, quand $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme, $A_N^\mu = A_N^\mu(0)$ est Fredholm d'indice zéro mais non nécessairement injectif. Lorsque A_N^μ est injectif, c'est notamment le cas quand μ est positif, le problème (7.18) est bien posé et on peut le discrétiser pour approcher $\boldsymbol{H}_\perp$ puis retrouver E_z. Lorsque A_N^μ n'est injectif, il ne faut pas utiliser cette procédure car le problème (7.18) n'est pas bien posé. Dans cette situation, l'on doit changer de cadre fonctionnel et travailler dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ en discrétisant le problème (7.25).*

7.4 Résumé pour le problème *Transverse Electric*

Nous présentons dans cette section le résumé des résultats pour le problème TE. Les démonstrations sont très similaires à celles décrites lors de l'étude du problème TM. Nous ne les réécrirons pas.

7.4.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Electric*

Formulation scalaire pour H_z

Construisons pour H_z un problème variationnel équivalent au système d'équations (7.10).

Théorème 7.4.1 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$ vérifie le problème (7.10) alors H_z est une solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } H_z \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla H_z \cdot \nabla v - \omega^2 \mu H_z v = \int_\Omega \varepsilon^{-1} \boldsymbol{J}_\perp \cdot \mathbf{rot}\, v, \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega). \end{array} \right. \tag{7.28}$$

2) Si H_z vérifie le problème (7.28) alors $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{J}_\perp - \mathbf{rot}\, H_z), H_z)$ est une solution de (7.10).

Corollaire 7.4.2 *Supposons $\omega \neq 0$. Le problème (7.10) possède une unique solution si et seulement si (7.28) possède une unique solution.*

Une première formulation variationnelle pour $\boldsymbol{E}_\perp$

À l'instar de ce que nous avons fait dans le §7.1.2, introduisons l'opérateur borné $A^\varepsilon_D : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A^\varepsilon_D u), \nabla v)_\Omega = (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_\Omega, \qquad \forall (u, v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{7.29}$$

Proposition 7.4.3 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$ vérifie le problème (7.10) alors $\boldsymbol{E}_\perp$ est une solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{E}_\perp \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega) \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}_\perp \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} - \omega^2 \varepsilon \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{v} = -i\omega \int_\Omega \boldsymbol{J}_\perp \cdot \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega). \end{array} \right. \tag{7.30}$$

2) Supposons que A^ε_D soit un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Si $\boldsymbol{E}_\perp$ vérifie le problème (7.30) alors $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{J}_\perp - \mathbf{rot}\, H_z), H_z)$ est une solution de (7.10).

Corollaire 7.4.4 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons que l'opérateur $A^\varepsilon_D : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit un isomorphisme. Le problème (7.10) possède une unique solution si et seulement si (7.30) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.30).

Théorème 7.4.5 *Supposons que l'opérateur $A^\varepsilon_D : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$.*

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\mathscr{A}_D(\omega) : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ tel que, pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega) \times \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$,

$$(\mathrm{rot}\, (\mathscr{A}_D(\omega)\boldsymbol{u}), \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_\Omega = (\mu^{-1} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_\Omega - \omega^2 (\varepsilon \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega. \tag{7.31}$$

Théorème 7.4.6 *Supposons que l'opérateur $A^\varepsilon_D : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $\mathscr{A}_N(0)$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$.*

Théorème 7.4.7 *Supposons que l'opérateur $A^\varepsilon_D : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit un isomorphisme.*
Alors l'opérateur $\mathscr{A}_N(\omega)$ défini en (7.31) constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.
En conséquence, le problème (7.10) pour $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$, possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$.

7.4.2 Une nouvelle formulation variationnelle pour $\boldsymbol{E}_\perp$

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que l'opérateur A_D^ε est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie. Considérons $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ une base de $\ker A_N^\varepsilon$ telle que $(\nabla\lambda_D^i, \nabla\lambda_D^j)_\Omega = \delta_{ij}$. Introduisons R_D tel que $\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \ker A_D^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{R}_D$. Définissons ensuite l'espace

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, (\varepsilon\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0,\ \forall\varphi \in \mathrm{R}_D\} \supset \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega).$$

Proposition 7.4.8 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$ vérifie le problème (7.10) alors $\boldsymbol{E}_\perp$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{E}_\perp \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \ \textit{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_\perp \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}_\perp\cdot\boldsymbol{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1}J_z\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}, \quad \forall\boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega). \end{array}\right. \tag{7.32}$$

2) Si $\boldsymbol{E}_\perp$ vérifie (7.32), le couple $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{J}_\perp - \mathbf{rot}\,H_z), H_z)$ vérifie le problème (7.10).

Comme pour l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, nous pouvons préciser la structure de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$.

Lemme 7.4.9 *Pour $i = 1\ldots n_D$, il existe $\boldsymbol{\Lambda}_D^i \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ tel que $(\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}_D^i, \nabla\lambda_D^j)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1\ldots n_D$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) = \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \oplus \mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda}_D^i)_{i=1}^{n_D}.$$

On peut alors montrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 7.4.10 *L'espace $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $\boldsymbol{u} \mapsto \|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\|_\Omega + \sum_{i=1}^{n_D}|\alpha^i|$, où $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $(\alpha^1,\ldots,\alpha^{n_D}) \in \mathbb{R}^{n_D}$ sont les éléments tels que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n_D}\alpha^i\boldsymbol{\Lambda}_D^i$, définit une norme sur $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot};\,\Omega)}$.*

Théorème 7.4.11 *L'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_N(0) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro.*

Corollaire 7.4.12 *Supposons que les paramètres ε, μ et ω soient tels que l'opérateur $A_N^{1/\mu}(\omega) : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ du problème pour H_z définisse un isomorphisme. Alors, l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ du problème pour $\boldsymbol{E}_\perp$ constitue également un isomorphisme.*

7.5 Illustration sur un cas particulier

Considérons l'exemple de la cavité définie par $\Omega := \{(x,y) \in]-a;b[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-a;0[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;b[\times]0;1[$ avec $a > 0$ et $b > 0$. L'interface Σ est alors égale au segment $\{0\}\times]0;1[$. Sans perte de généralité, nous supposons $a \geq b$. On traite le cas $a < b$ en échangeant les rôles de Ω_1 et de Ω_2. Définissons $\varepsilon_i := \varepsilon|_{\Omega_i}$ et $\mu_i := \mu|_{\Omega_i}$, $i = 1,2$. Nous faisons l'hypothèse que ε_i et μ_i sont des fonctions constantes (non-nulles) sur Ω_i.

D'après les résultats du §2.2.2 du Chapitre 2, nous savons que les opérateurs $A_D^\varepsilon : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $A_N^\varepsilon : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ sont Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \neq -1$. Bien sûr, de même, les opérateurs $A_D^\mu : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $A_N^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ sont Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_\mu = \mu_2/\mu_1 \neq -1$. De plus, A_D^ε (resp. A_D^μ) définit un isomorphisme si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a),\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$ (resp. $\kappa_\mu \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a),\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$).

Pour fixer les idées considérons le cas $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Cette configuration

représente par exemple du vide dans Ω_1 et un métal sous la fréquence plasma dans Ω_2 (cf. explication associée à la Figure 7.1). Intéressons-nous au problème pour le champ $(\boldsymbol{E}_\perp, H_z)$.

Supposons $\kappa_\varepsilon \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a),\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$. Dans ce cas, l'opérateur $A_D^\varepsilon : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est un isomorphisme. D'après le Théorème 7.4.7, le problème TE (7.10) possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. Le Corollaire 7.4.4 indique que pour $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, le problème (7.30) pour H_z possède une unique solution. On peut alors discrétiser (7.30) pour approcher H_z puis retrouver $\boldsymbol{E}_\perp$. Mais il est également possible de discrétiser directement (7.30), posée dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, pour approcher $\boldsymbol{E}_\perp$.

Supposons $\kappa_\varepsilon \in \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a),\ n \in \mathbb{N}^*\}$. L'opérateur $A_D^\varepsilon : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension 1. Il en va donc de même pour $A_N^{1/\varepsilon} : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ d'après le Théorème 7.2.3. Pour $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, il est facile de voir que $A_N^{1/\varepsilon}(\omega)$ est un isomorphisme (car μ est positif sur tout le domaine). Dans ce cas, d'après le Corollaire 7.4.4, le problème TE (7.10) possède une unique solution. Pour $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on peut discrétiser (7.30) pour approcher H_z puis reconstruire $\boldsymbol{E}_\perp$. Par contre, le problème (7.30), dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, **n'est pas** bien posé. Pour approcher directement $\boldsymbol{E}_\perp$, il faut travailler dans $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ en discrétisant (7.32).

CHAPITRE HUIT

UN RÉSULTAT DE COMPACITÉ POUR MAXWELL 2D

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

[49] L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : Compact imbeddings in electromagnetism with interfaces between classical materials and metamaterials. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(5):2150–2169, 2011.

Sommaire

Introduction **193**
8.1 Notations **195**
8.2 Un résultat de décomposition des champs électriques **196**
8.3 Une étude de régularité **199**
8.3.1 Régularité au voisinage des arêtes internes 200
8.3.2 Régularité au voisinage des sommets extérieurs 200
8.3.3 Régularité au voisinage des sommets internes 207
8.3.4 Régularité globale 208
8.4 Injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ **208**
8.5 Un exemple d'injection non compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ **209**

Introduction

Nous poursuivons l'étude des équations de Maxwell en régime harmonique en temps dans un matériau composite. Un tel matériau est modélisé par une permittivité diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ. Dans tout ce mémoire, nous souhaitons plus particulièrement nous intéresser à des matériaux composites mélangeant matériaux classiques et matériaux négatifs (métaux sous la fréquence plasma ou métamatériaux négatifs [136, 142, 143, 44]). En raison du changement de signe des paramètres physiques entre le matériau classique et le matériau négatif, les techniques usuelles ne sont pas directement utilisables pour étudier les problèmes électromagnétiques correspondants.

Dans le Chapitre 7, nous avons présenté une première approche basée sur la T-coercivité pour étudier les équations de Maxwell dans un domaine borné Ω en 2D. Ici, nous souhaitons revenir sur la question de la compacité de l'injection de l'espace des champs électriques dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$, $d = 2, 3$ désignant la dimension de l'espace. Ce résultat de compacité constitue un ingrédient clé pour résoudre les deux grands problèmes en régime harmonique en temps que sont le problème avec source et le problème aux valeurs propres.

Lorsque le domaine d'intérêt est entouré par un conducteur parfait, on utilise l'espace fonctionnel $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ pour mesurer les champs électriques. Il est constitué des champs $\boldsymbol{v}$ qui appartiennent à $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ tels que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3$ (ou $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ en 2D), $\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{v}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unité à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. Notre objectif principal est d'étendre le théorème d'injection compacte de Weber dans le cas d'un matériau composite incluant des matériaux classiques et des métamatériaux. Dans son papier [150], Weber prouve que $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ quand ε est une fonction réelle, bornée inférieurement par une constante strictement positive, pour $d = 2, 3$.

Dans [24], les auteurs prouvent ce résultat pour $d = 3$, dans la configuration suivante. Le domaine Ω est partitionné en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2, avec une interface entre les sous-domaines Σ régulière, et ε présente un changement de signe au niveau de Σ. Dans ce papier, il est supposé que le contraste κ_ε, égal à $\varepsilon_{|\Omega_2}/\varepsilon_{|\Omega_1}$ lorsque ε est constant de part et d'autre de Σ, n'appartient pas à un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}_-$ contenant la valeur -1. La démonstration est basée sur des arguments variationnels analogues à ceux utilisés dans le Chapitre 7. Dans ce chapitre, nous allons procéder différemment en étudiant la régularité *a priori* des éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. En ce sens, nous suivrons ce qui a été fait dans la proposition 3.7 de [2] (voir également [65, section 3] ou [117, partie 3.8]). Nous allons prouver que l'espace des champs électriques $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ s'injecte de façon continue dans des espaces de type $\mathrm{H}^s(\Omega)^d$, avec $s > 0$. Nous pourrons alors obtenir le résultat de compacité désiré en utilisant le résultat d'injection compacte de $\mathrm{H}^s(\Omega)^d$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$. Nous nous servirons largement des résultats de [72] que nous avons redéveloppés dans le Chapitre 3.

Nous nous concentrerons sur le cas 2D. Néanmoins, la démarche que nous proposons, consistant à ramener l'étude de régularité des champs à une étude de régularité pour un problème scalaire, devrait pouvoir être étendue au cas 3D. L'analyse que nous développons ici se présente à la fois comme un complément à celle du Chapitre 7 et comme un travail préliminaire à une étude future que nous n'effectuerons pas dans ce mémoire. En effet, les résultats de régularité que nous allons obtenir présentent un intérêt en soi pour la justification de la convergence des méthodes numériques. D'autre part, nous allons prouver que le résultat d'injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ est valide dans des cas de figure qui ne sont pas couverts par l'étude du Chapitre 7 lorsque le contraste en ε est situé dans l'intervalle critique quand Σ présente un coin. Ce dernier point se révélera fondamental pour définir un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de Maxwell dans l'intervalle critique. D'après ce que nous avons vu dans le Chapitre 5, il faudra sans doute ajouter à l'espace classique des champs d'énergie finie, les gradients des singularités propagatives. Notons que ces fonctions n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$...

Pour simplifier les preuves, nous supposerons que le domaine Ω possède une frontière $\partial\Omega$ connexe et que ε est constant par morceaux. Si ce n'était pas le cas, les résultats de régularité des éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ resteraient valides, sous des hypothèses raisonnables, en supposant par exemple ε régulier par morceaux avec $|\varepsilon|$ borné supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives. Lorsque la frontière présente plusieurs composantes connexes, il apparaît dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ un espace de dimension finie d'éléments à rotationnel et divergence nulle (cf. Chapitre 9). Mais cette espace ne modifie pas la propriété d'injection compacte.

Nous commençons par introduire les notations dans la Section 8.1. Nous considérons le cas d'un domaine Ω à frontière polygonale, partitionné en sous-domaines polygonaux. Dans la section suivante, nous prouvons un résultat de décomposition continu des éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, qui permet d'isoler la partie singulière, égale au gradient d'un champ scalaire. Puis, dans la Section 8.3, nous étudions la régularité de cette partie singulière, ce qui conduit au résultat d'injection compacte (§8.4). Nous concluons en fournissant un contre-exemple d'injection compacte dans le cas d'une cavité symétrique composée de deux matériaux dont les permittivités sont opposées.

8.1 Notations

Considérons Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, un ensemble ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Nous ferons l'hypothèse que la frontière $\partial\Omega$ est connexe et polygonale. La normale unitaire sortante à $\partial\Omega$ est notée $\boldsymbol{n}$, tandis que $\boldsymbol{\tau}$ désigne le vecteur unitaire tel que $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ constitue une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

Nous supposons Ω partitionné en N sous-domaines à frontière polygonale Ω_j :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Omega_j} \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Nous appelons $\mathcal{P}$ la partition. L'interface entre les sous-domaines $\Sigma := \cup_{i\neq j}(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)$ est constituée d'arêtes droites. Sans perte de généralité, nous faisons l'hypothèse que les Ω_j sont convexes (nous pouvons toujours les rediviser s'il y a besoin). Pour éviter d'inutiles complications techniques, nous supposons que les N polygones de la partition $\mathcal{P}$ peuvent être numérotés de sorte que $\overline{\Omega_j}$ et $\overline{\Omega_{j+1}}$ partagent au moins une arête, pour $j = 1 \dots N-1$. Nous notons $\partial\Omega_j^k$, $k = 1 \dots n_j$, les arêtes de Ω_j et $\boldsymbol{n}_j^k$ le vecteur unitaire sortant associé à $\partial\Omega_j^k$.
Introduisons $\mathcal{A} := \{\partial\Omega_j^k, j = 1 \dots N, k = 1 \dots n_j\}$ l'ensemble des arêtes de la partition. Définissons ensuite $\mathcal{A}_{ext} := \{A \in \mathcal{A} \,|\, A \subset \partial\Omega\}$ l'ensemble des arêtes extérieures et $\mathcal{A}_{int} := \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_{ext}$ l'ensemble des arêtes internes. De façon similaire, notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets de la partition, $\mathcal{S}_{ext} := \{S \in \mathcal{S} \,|\, S \in \partial\Omega\}$ l'ensemble des sommets extérieurs et $\mathcal{S}_{int} := \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}_{ext}$ l'ensemble des sommets intérieurs.

Dans la suite, les paramètres physiques ε et μ seront à *valeurs complexes*. De plus, nous supposons $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ constant sur chaque sous-domaine Ω_j, avec $\varepsilon_j := \varepsilon|_{\Omega_j} \neq 0$. En particulier, ε peut être à valeurs réelles et changer de signe entre deux sous-domaines voisins. Pour $a < b$, définissons la bande fermée du plan complexe $\mathcal{B}(a; b) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, a \leq \Re e\, \lambda \leq b\}$.
Rappelons que dans le chapitre précédent, nous avons introduit, en utilisant la dérivée au sens des distributions, l'opérateur rot agissant sur $\mathbf{L}^2(\Omega) := \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ et l'opérateur **rot** défini sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Pour $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)^t \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \in \mathcal{D}'(\Omega); \qquad \mathbf{rot}\, v = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega).$$

De façon générale, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, nous notons $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$, et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées. Définissons les espaces fonctionnels

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\}; \\ \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u}) = 0,\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Nous munissons $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ de la norme $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)} := \left(\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u})\|_\Omega^2\right)^{1/2}$. En suivant Grisvard [87, 88], pour toute arête $\partial\Omega_j^k$, introduisons $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(\partial\Omega_j^k)$ l'espace des éléments de $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega_j^k)$ dont le prolongement par 0 à $\partial\Omega_j$ appartient à $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega_j)$.

Pour $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ (respectivement $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$), nous utilisons la notation $u_j := u|_{\Omega_j}$ (resp. $\boldsymbol{u}_j := \boldsymbol{u}|_{\Omega_j}$). Pour étudier la régularité des champs scalaires, définissons l'espace

$$\mathrm{PH}^s(\Omega,\mathcal{P}) := \left\{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, u_j \in \mathrm{H}^s(\Omega_j),\ j = 1 \dots N\right\} \text{ pour } s > 0.$$

Sur $\mathrm{PH}^s(\Omega,\mathcal{P})$, nous introduisons la norme brisée $\|u\|_{\mathrm{PH}^s(\Omega)} := \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{\mathrm{H}^s(\Omega_j)}^2\right)^{1/2}$. Nous rappelons que pour $s < 1/2$, on a $\|u\|_{\mathrm{PH}^s(\Omega)} \simeq \|u\|_{\mathrm{H}^s(\Omega)}$. Introduisons également

$$\mathrm{P}\mathbf{H}^s(\Omega,\mathcal{P}) := \mathrm{PH}^s(\Omega,\mathcal{P}) \times \mathrm{PH}^s(\Omega,\mathcal{P}).$$

Nous pouvons alors définir l'espace des éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ réguliers par morceaux

$$\mathbf{H}_N(\varepsilon;\Omega) := \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \cap \mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega,\mathcal{P}).$$

Pour un 2-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, nous notons

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{et} \quad \partial_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x\, \partial^{\alpha_2} y}.$$

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, pour $m \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, nous définissons l'espace de Kondrat'ev

$$\mathrm{V}_{\gamma}^{m}(\mathcal{O}) := \left\{ v \in \mathrm{L}^2_{loc}(\mathcal{O}) \,|\, r^{|\alpha|-m+\gamma} \partial_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}),\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\, |\alpha| \leq m \right\}$$

où r est la distance à un point donné de $\overline{\mathcal{O}}$. Nous munissons l'espace $\mathrm{V}_{\gamma}^{m}(\mathcal{O})$ de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{V}_{\gamma}^{m}(\mathcal{O})} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left\| r^{|\alpha|-m+\gamma} \partial_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} v \right\|_{\mathcal{O}}^2 \right)^{1/2}.$$

La fermeture de $\mathscr{C}_0^{\infty}(\mathcal{O})$ dans $\mathrm{V}_{\gamma}^{m}(\mathcal{O})$ est notée $\mathring{\mathrm{V}}_{\gamma}^{m}(\mathcal{O})$.

8.2 Un résultat de décomposition des champs électriques

Démontrons un résultat de décomposition continue des champs qui appartiennent à $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Ce genre de résultats remonte aux travaux de Birman-Solomyak [13, 12, 14, 15]. Nous donnons ici une preuve qui suit les lignes des démonstrations des théorèmes 3.4 et 3.5 de [65]. Par hypothèse, la partition $\mathcal{P}$ de Ω est numérotée de sorte que $\overline{\Omega_j}$ et $\overline{\Omega_{j+1}}$ partagent au moins une arête, pour $j = 1 \ldots N-1$. Nous appelons $A_1, \ldots, A_{N-1}$ ces arêtes. Commençons par prouver un résultat intermédiaire.

Proposition 8.2.1 *Considérons $\boldsymbol{u}$ un élément de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Il existe $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbf{H}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ vérifiant $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_2, 1)_{\Omega_j} = 0$ pour $j = 1 \ldots N$, tels que*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2.$$

De plus, on a l'estimation de continuité

$$\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_2\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)} \leq C\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)} \tag{8.1}$$

où la constante C est indépendante de $\boldsymbol{u}$.

Preuve. Pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, nous définissons $m_j(\boldsymbol{w}) := (\operatorname{rot} \boldsymbol{w}, 1)_{\Omega_j}$, pour $j = 1 \ldots N$.
Pour prouver le résultat cette proposition, construisons explicitement une famille $(\boldsymbol{f}_j)_{j=1\ldots N-1}$ d'éléments de $\mathbf{H}_N(\varepsilon;\Omega)$ telle que la fonction

$$\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N-1} c_i\, \boldsymbol{f}_i, \qquad \text{avec } c_i = \sum_{k=1}^{i} m_k(\boldsymbol{u}),\ i = 1 \ldots N-1, \tag{8.2}$$

vérifie automatiquement les conditions $m_j(\boldsymbol{u}_2) = 0$, $j = 1 \ldots N$.
Pour $j = 1 \ldots N-1$, introduisons $\boldsymbol{n}_j$ la normale unitaire sortante à A_j, dirigée de Ω_j vers Ω_{j+1}, et $\boldsymbol{\tau}_j$ tel que $(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{n}_j)$ soit une base orthonormée directe. Considérons M_j un point intérieur donné de A_j, et définissons r_j la distance à M_j. Introduisons ensuite $\boldsymbol{f}_j := C_j \zeta_j(r_j) \boldsymbol{\tau}_j$, où $\zeta_j \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, est égale à 1 dans un voisinage de 0, à support tel que $\operatorname{supp} \boldsymbol{f}_j \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\operatorname{supp} \boldsymbol{f}_j \cap \mathcal{A}) \subset A_j$. La constante C_j est choisie de sorte que $(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}_j, 1)_{\Omega_j} = \int_{A_j} \boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = 1$. Remarquons que par construction, on a

$\boldsymbol{f}_j|_{\Omega_j} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{f}_j|_{\Omega_{j+1}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ et $\varepsilon \boldsymbol{f}_j|_{\Omega_j} \cdot \boldsymbol{n}_j - \varepsilon \boldsymbol{f}_j|_{\Omega_{j+1}} \cdot \boldsymbol{n}_j = 0$. Puisque $\boldsymbol{f}_j$ est régulière sur Ω_j et Ω_{j+1} (et à support dans $\overline{\Omega_j} \cup \overline{\Omega_{j+1}}$), nous déduisons que $\boldsymbol{f}_j$ appartient à $\mathbf{H}_N(\Omega, \varepsilon)$.
Maintenant, introduisons $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \, \boldsymbol{f}_i \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ comme en (8.2). Vérifions que $m_j(\boldsymbol{u}_2) = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Tout d'abord, pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i \leq N-1$, observons que

$$m_j(\boldsymbol{f}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Cette remarque permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
m_1(\boldsymbol{u}_2) &= m_1(\boldsymbol{u}) - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \, m_1(\boldsymbol{f}_i) = m_1(\boldsymbol{u}) - c_1 = 0; \\
m_j(\boldsymbol{u}_2) &= m_j(\boldsymbol{u}) - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \, m_j(\boldsymbol{f}_i) = m_j(\boldsymbol{u}) - c_j + c_{j-1} = 0, \qquad \text{pour } j = 2 \dots N-1; \\
m_N(\boldsymbol{u}_2) &= m_N(\boldsymbol{u}) + c_{N-1} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{car} \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Définissons alors $\boldsymbol{u}_1 := \sum_{i=1}^{N-1} c_i \, \boldsymbol{f}_i \in \mathbf{H}_N(\Omega, \varepsilon)$. Pour $i = 1 \dots N-1$, nous avons

$$|c_i| \leq \sum_{k=1}^{i} |m_k(\boldsymbol{u})| \leq \sum_{k=1}^{i} \sqrt{|\Omega_k|} \, \|\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}\|_{\Omega_k} \leq \sum_{k=1}^{i} \sqrt{|\Omega_k|} \, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)}\,.$$

Nous déduisons $\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_1 \, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)}$ puis

$$\|\boldsymbol{u}_2\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)} \leq C_2 \, \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)}\,.$$

Ainsi, nous obtenons bien (8.1). ■

Cette première étape effectuée, nous pouvons énoncer et démontrer le résultat de décomposition qui nous intéressait initialement.

Théorème 8.2.2 *Considérons $\boldsymbol{u}$ un élément de $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$. Il existe $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{H}_N(\Omega, \varepsilon)$ et $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ vérifiant* $\mathrm{div}\,(\varepsilon \nabla \varphi) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, *tels que*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \nabla \varphi.$$

De plus, on a l'estimation de continuité

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\nabla \varphi\|_{\Omega} + \|\mathrm{div}\,(\varepsilon \nabla \varphi)\|_{\Omega} \leq C \, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)}$$

où la constante C est indépendante de u.

Preuve. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$. En vertu de la Proposition 8.2.1, nous savons qu'il existe $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbf{H}_N(\Omega, \varepsilon)$ et $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ tels que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, avec $(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_2, 1)_{\Omega_j} = 0$, pour $j = 1 \dots N$. De plus, on a l'estimation

$$\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_2\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)} \leq C_1 \, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)}\,.$$

Commençons par étudier $\boldsymbol{u}_2$. La relation de compatibilité $(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_2, 1)_{\Omega_j} = 0$, pour $j = 1 \dots N$, assure qu'il existe un ϕ_j dans $\mathrm{H}^1(\Omega_j)$, défini à une constante près, tel que

$$\left| \begin{array}{lcll} -\Delta \phi_j = \mathrm{rot}\, \mathbf{rot}\, \phi_j & = & \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_2 & \text{dans } \Omega_j \\ \dfrac{\partial \phi_j}{\partial \boldsymbol{n}_j} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_j. \end{array} \right. \tag{8.3}$$

Puisque le domaine Ω_j est convexe, nous savons que ϕ_j constitue un élément de $\mathrm{H}^2(\Omega_j)$ (cf. [88, théorème 2.4.3]). Introduisons ensuite la fonction $\boldsymbol{v}$ telle que $\boldsymbol{v}|_{\Omega_j} := \mathbf{rot}\,\phi_j$ pour $j = 1\dots N$. Elle appartient à $\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega,\mathcal{P})$ et l'on a l'estimation $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_2\,\|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_2\|_\Omega$. Par ailleurs, pour $j = 1\dots N$ et $k = 1\dots n_j$, remarquons que

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_j^k = \frac{\partial\phi_j}{\partial\boldsymbol{n}_j^k} = 0 \tag{8.4}$$

où $\boldsymbol{\tau}_j^k$ est tel que $(\boldsymbol{\tau}_j^k, \boldsymbol{n}_j^k)$ est une base orthonormée directe. Par conséquent, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}$ est à rotationnel nul. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe un potentiel $\varphi_1 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (cf. [84, théorème 2.9]) tel que

$$\boldsymbol{w} = \nabla\varphi_1.$$

Pour le moment, nous avons décomposé $\boldsymbol{u}$ de la façon suivante

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v} + \nabla\varphi_1$$

où $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbf{H}_N(\Omega,\varepsilon)$, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{P}\mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\varphi_1 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Cependant, mis à part lorsque ε est constant sur Ω, il n'y a pas de raison que $\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{v})$ appartienne à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. En utilisant le théorème 1.5.2.8 de [87] ou le théorème 1 de [11], on peut relever la trace normale de $\boldsymbol{v}_j$ sur $\partial\Omega_j$. Pour $j = 1\dots N$, il existe r_j appartenant à $\mathrm{H}^2(\Omega_j)\cap\mathrm{H}_0^1(\Omega_j)$ telle que

$$\frac{\partial r_j}{\partial\boldsymbol{n}_j^k}|_{\partial\Omega_j^k} = (\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{n}_j^k)|_{\partial\Omega_j^k}, \qquad \text{pour } k = 1\dots n_j.$$

Définissons alors r telle que $r|_{\Omega_j} = r_j$ pour $j = 1\dots N$. La fonction r appartient à $\mathrm{P}\mathrm{H}^2(\Omega,\mathcal{P})\cap\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et l'on a l'estimation

$$\|r\|_{\mathrm{P}\mathrm{H}^2(\Omega)} \leq C_3\,\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)}\,.$$

Remarquons que pour pouvoir effectuer ces relèvements, il faut que $(\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{n}_j^k)|_{\partial\Omega_j^k}$ appartienne à $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(\partial\Omega_j^k)$. Mais c'est bien le cas car

$$\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{n}_j^k = \frac{\partial\phi_j}{\partial\boldsymbol{\tau}_j^k} \qquad \text{et car} \qquad \frac{\partial\phi_j}{\partial\boldsymbol{n}_j^{k'}} = 0 \text{ pour } k' = 1\dots n_j.$$

Définissons ensuite $\boldsymbol{u}_3 := \boldsymbol{v} - \nabla r$. Ce champ est tel que

$$\begin{array}{rl}
i) & \boldsymbol{u}_3 \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\
ii) & \boldsymbol{u}_3|_{\Omega_j} \in \mathbf{H}^1(\Omega_j) \\
iii) & \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_3 = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega) \\
iv) & \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} - \nabla r\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} \underset{\text{cf.}(8.4)}{=} -\nabla r\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} \underset{r\in\mathrm{H}_0^1(\Omega)}{=} 0.
\end{array}$$

Maintenant, puisque $(\varepsilon_j\boldsymbol{u}_3|_{\Omega_j}\cdot\boldsymbol{n}_j^k)|_{\partial\Omega_j^k} = 0$ pour $k = 1\dots n_j$ et $j = 1\dots N$, nous pouvons conclure que $\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u}_3)$ constitue un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Ces arguments prouvent que $\boldsymbol{u}_3$ est un élément de $\mathbf{H}_N(\Omega,\varepsilon) = \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)\cap\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega,\mathcal{P})$.

Définissons alors $\varphi := \varphi_1 + r \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_0 := \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$. Par construction, nous avons

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \nabla\varphi$$

et $\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}) - \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}_0)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. D'autre part, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} &\leq \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\nabla r\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + (1+C_3)\,\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} + C_2\,(1+C_3)\,\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_2\|_{\Omega} \\
&\leq C_1\,(1+C_2\,(1+C_3))\,\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)}\,, \\
\\
\|\nabla\varphi\|_{\Omega} &\leq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0\|_{\Omega} \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\Omega} \\
&\leq (1+C_4)\,\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)}\,, \\
\\
\|\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi)\|_{\Omega} &\leq \|\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u})\|_{\Omega} + \|\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}_0)\|_{\Omega} \\
&\leq \|\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u})\|_{\Omega} + C_5\,\|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq (1+C_4\,C_5)\,\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

où $C_4 := C_1\,(1+C_2\,(1+C_3))$ et $C_5 := \max\limits_j\,|\varepsilon_j|$. Ainsi, la décomposition est bien continue. ■

8.3 Une étude de régularité

Rappelons que Ω est un ouvert connexe borné à frontière polygonale connexe de $\mathbb{R}^2$. Dans cette section, nous allons montrer que sous certaines hypothèses que nous décrirons plus loin, le potentiel scalaire $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ qui apparaît dans la décomposition du Théorème 8.2.2 est en fait « plus régulier que H^1 ». Plus précisément, nous allons prouver qu'il existe $\sigma_0 > 1$, qui dépend seulement de Ω, de la partition et de ε, tel que $\varphi \in \cap_{s<\sigma_0}\mathrm{H}^s(\Omega)$.

Introduisons l'opérateur non borné $F : \mathscr{D}(F) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $Fu := \operatorname{div}(\varepsilon\nabla u)$ avec

$$\mathscr{D}(F) := \left\{u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,|\,\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\}. \tag{8.5}$$

Nous souhaitons étudier la régularité des éléments de $\mathscr{D}(F)$. Pour cela, donnons-nous $u \in \mathscr{D}(F)$ quelconque. Parfois, nous utiliserons la notation $f := Fu = \operatorname{div}(\varepsilon\nabla u) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Débutons par quelques résultats bien connus. Classiquement [109, chapitre 2, volume 1], [88, théorème 2.1.3], [7], on a le résultat de régularité intérieure suivant.

Théorème 8.3.1 *Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{S} = \overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Alors u appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$, avec l'estimation*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})} \leq C\,\left(\|\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u)\|_{\Omega} + \|\nabla u\|_{\Omega}\right)$$

où la constante C est indépendante de u.

D'autre part, le théorème 2.1.4 de [88] fournit le résultat suivant de régularité au voisinage des arêtes extérieures.

Théorème 8.3.2 *Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{S} = \overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{A}_{int} = \emptyset$. Alors u appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$, avec l'estimation*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})} \leq C\,\left(\|\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u)\|_{\Omega} + \|\nabla u\|_{\Omega}\right)$$

où la constante C est indépendante de u.

La partie difficile consiste bien entendu à étudier la régularité au voisinage de l'interface entre les différents matériaux du composite.

8.3.1 Régularité au voisinage des arêtes internes

Considérons M un point intérieur de $A \in \mathcal{A}_{int}$. Supposons que Ω_1 et Ω_2 soient deux sous-domaines de $\mathcal{P}$ tels que $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = A$. Considérons d suffisamment petit de sorte que $\overline{B(M,d)} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\overline{B(M,d)} \cap \mathcal{A}) \subset A$ où $B(M,d)$ note la boule de centre M et de rayon d. Bien sûr, le saut de valeur de ε en A empêche *a priori* u d'appartenir à $\mathrm{H}^2(B(M,d))$. Cependant, le Théorème 3.1.4 du Chapitre 3 (voir également [72, théorème 2.1]) va nous permettre de montrer que $u_j \in \mathrm{H}^2(B(M,d) \cap \Omega_j)$, $j = 1, 2$.

Prenons le temps d'écrire le processus de localisation. Notons (r, θ) les coordonnées polaires centrées en M. La coordonnée angulaire θ est choisie de façon arbitraire. Introduisons $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+, [0;1])$, égale à 1 sur $[0;d]$, à support contenu dans $[0;d_M]$. Ici, $d_M > d$ est suffisamment petit de sorte que $\overline{B(M,d_M)} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\overline{B(M,d_M)} \cap \mathcal{A}) \subset A$. Définissons la fonction de troncature radiale $\chi_M : (r,\theta) \mapsto \chi(r)$ et les bandes infinies $\mathcal{I} := \mathbb{R} \times I$, $\mathcal{I}_j := \mathbb{R} \times I_j$, $j = 1, 2$, avec respectivement $I :=]-d_M; d_M[$, $I_1 :=]-d_M; 0[$ et $I_2 :=]0; d_M[$. Sans perte de généralité, nous supposons $A \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, $(B(M,d_M) \cap \Omega_j) \subset \mathcal{I}_j$, $j = 1, 2$.

Notons $\tilde{f}$ le prolongement de $f = Fu = \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u)$ par 0 à $\mathcal{I}$. La fonction $\chi_M u$ appartient à $\mathrm{H}_0^1(B(M,d_M))$ si bien que son prolongement w par 0 à $\mathcal{I}$ constitue un élément de $\mathrm{H}^1(\mathcal{I})$. Définissons ensuite

$$p := \varepsilon\left(w\Delta\chi_M + 2\nabla w \cdot \nabla\chi_M\right) + \tilde{f}\chi_M \in \mathrm{L}^2(\mathcal{I}). \tag{8.6}$$

D'après sa définition, w vérifie le problème de transmission suivant dans la bande infinie $\mathcal{I}$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Trouver } w \in \mathrm{H}^1(\mathcal{I}) & \text{tel que} \\ \varepsilon_j \Delta w_j = p_j & \text{dans } \mathcal{I}_j,\ j = 1,2 \\ w_j = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_j \cap \partial\mathcal{I},\ j = 1,2 \\ w_1 - w_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2 \\ \varepsilon_1 \partial_y w_1 - \varepsilon_2 \partial_y w_2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}_1 \cap \partial\mathcal{I}_2. \end{array}\right.$$

En vertu du Théorème 3.1.4 du Chapitre 3, lorsque $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$, nous déduisons que w_1 et w_2 appartiennent respectivement à $\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_1)$ et $\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_2)$ avec l'estimation

$$\|w_1\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_1)} + \|w_2\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_2)} \leq C\,\|p\|_{\mathcal{I}}\,.$$

En utilisant l'expression (8.6) de p et en se rappelant que $\chi_M = 1$ sur $B(M,d)$, on obtient

$$\|u_1\|_{\mathrm{H}^2(B(M,d)\cap\Omega_1)} + \|u_2\|_{\mathrm{H}^2(B(M,d)\cap\Omega_2)} \leq C\,\left(\|\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u)\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega\right).$$

Résumons ce résultat avec le

Théorème 8.3.3 *Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{A}) \subset A = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$. Si $\varepsilon_i + \varepsilon_j \neq 0$, alors u_i appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O} \cap \Omega_i)$, u_j appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O} \cap \Omega_j)$, et on a l'estimation*

$$\|u_i\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O}\cap\Omega_i)} + \|u_j\|_{H^2(\mathcal{O}\cap\Omega_j)} \leq C\,\left(\|\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u)\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega\right)$$

où la constante C est indépendante de u.

8.3.2 Régularité au voisinage des sommets extérieurs

Préliminaires

Pour procéder à l'étude au voisinage des sommets extérieurs, nous suivrons l'approche du Chapitre 3 (voir également [72]), elle-même basée sur le papier fondateur de Kondrat'ev [100].

Comme pour l'étude au voisinage des arêtes internes, commençons par introduire quelques notations

géométriques. Pour $S \in \mathcal{S}_{ext}$, notons (r, θ) les coordonnées polaires associées à S. La composante angulaire θ est choisie de sorte que, pour $d > 0$ assez petit, on ait

$$\overline{B(S,d)} \cap \overline{\Omega} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid (r,\theta) \in [0;d] \times [0;\theta_{max}]\}\,.$$

Rappelons que $B(S,d)$ désigne la boule ouverte centrée en S et de rayon d. On a toujours $\theta_{max} < 2\pi$.

Introduisons ensuite $d_S > 0$ suffisamment petit pour avoir $\overline{B(S,d_S)} \cap \mathcal{S} = \{S\}$. Introduisons également $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0;1])$ égale à 1 sur $[0; d_S/2]$ et à support contenu dans $[0; d_S]$. Alors, la fonction de troncature radiale $\chi_S : (r,\theta) \mapsto \chi(r)$ est telle que supp $\chi_S \cap \mathcal{S} = \{S\}$, où supp χ_S désigne le support de χ_S.

Définissons $\tilde{\Omega} := \Omega \cap B(S, d_S)$. Nous renumérotons les J_S sous-domaines qui possèdent S comme sommet extérieur, de 1 à J_S. De plus, si nous définissons $\tilde{\Omega}_j := \Omega_j \cap B(S, d_S)$, $j = 1 \dots J_S$, la nouvelle numérotation est telle que $\overline{\tilde{\Omega}}_j$ et $\overline{\tilde{\Omega}}_{j+1}$ partagent au moins une arête, pour $j = 1 \dots (J_S - 1)$, dont l'angle θ croît avec j. Pour $j = 1 \dots J_S$, $\delta\sigma_j$ désigne l'ouverture de $\tilde{\Omega}_j$ (avec $\delta\sigma_j \leq \pi$ car $\tilde{\Omega}_j$ est convexe). Nous imposons $\sigma_0 := 0$ ainsi que $\sigma_j := \sigma_{j-1} + \delta\sigma_j$, $j = 1 \dots J_S$. Par définition, on a $\sum_{j=1\dots J_S} \delta\sigma_j = \theta_{max}$. Enfin, nous introduisons les intervalles $G_j :=]\sigma_{j-1}; \sigma_j[$, $j = 1 \dots J_S$, $G :=]0; \sigma_{J_S}[$, et les secteurs angulaires non bornés

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0,\, \theta \in G\}\,, \\ \Gamma_j &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0,\, \theta \in G_j\}\,,\ j = 1 \dots J_S. \end{aligned}$$

Pour $v \in \mathrm{L}^2(\tilde{\Omega})$ (resp. $v \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$), nous notons $v_j := v|_{\tilde{\Omega}_j}$ (resp. $v_j := v|_{\Gamma_j}$), $j = 1 \dots J_S$.

Nous introduisons $\Lambda_{\varepsilon,S}$, l'ensemble des exposants de singularité associé au sommet S, qui est par définition l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un élément non-nul $(\phi_{\lambda,j})_{j=1}^{J_S} \in \prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{H}^2(G_j)$ vérifiant les équations ci-dessous :

$$\left|\begin{array}{ll} (\partial_\theta^2 + \lambda^2)\,\phi_{\lambda,j} = 0 & \text{dans } G_j,\ j = 1 \dots J_S \\ \phi_{\lambda,1}(0) = \phi_{\lambda,J_S}(\sigma_{J_S}) = 0 & \\ \phi_{\lambda,j}(\sigma_j) = \phi_{\lambda,j+1}(\sigma_j) & j = 1 \dots (J_S - 1) \\ \varepsilon_j \partial_\theta \phi_{\lambda,j}(\sigma_j) = \varepsilon_{j+1} \partial_\theta \phi_{\lambda,j+1}(\sigma_j) & j = 1 \dots (J_S - 1). \end{array}\right.$$

Nous localisons ensuite l'étude de régularité en utilisant χ_S. Notons $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 à Γ. La fonction $\chi_S u$ appartient à $\mathrm{H}_0^1(\tilde{\Omega})$ si bien que son prolongement w par 0 à Γ constitue un élément de $\mathrm{H}^1(\Gamma)$. Introduisons

$$p := \varepsilon\,(w\Delta\chi_S + 2\nabla w \cdot \nabla\chi_S) + \tilde{f}\chi_S\,, \tag{8.7}$$

fonction de $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ à support compact. D'après sa définition, w vérifie le problème de transmission suivant

$$(\mathscr{P}_{\text{secteur}}) \left|\begin{array}{ll} \text{Trouver } w \in \mathrm{H}^1(\Gamma) \ \text{ tel que} & \\ \varepsilon_j \Delta w_j = p_j & \text{dans } \Gamma_j,\ j = 1 \dots J_S \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_1 \cap \partial\Gamma \\ w_{J_S} = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_{J_S} \cap \partial\Gamma \\ w_j - w_{j+1} = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_{j+1},\ j = 1 \dots (J_S - 1) \\ \varepsilon_j \partial_\theta w_j - \varepsilon_{j+1} \partial_\theta w_{j+1} = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_{j+1},\ j = 1 \dots (J_S - 1). \end{array}\right.$$

Transformée de Mellin

Pour la définition de la transformée de Mellin, rappelons un lemme classique (voir [68, annexe AA], [119, §2, chapitre 2]) qui n'est autre qu'une reformulation du Lemme 3.2.2 du Chapitre 3.

Lemme 8.3.4 *Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$.*
Si $v \in \mathrm{V}^s_\gamma(\Gamma)$, alors on peut définir sa transformée de Mellin

$$\hat{v}(\lambda, \cdot) := \mathcal{M}v(\lambda, \cdot) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda} v(r, \cdot) \frac{dr}{r}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\, \lambda = s - \gamma - 1$. De plus, pour $\xi := s - \gamma - 1$, la fonction $\eta \mapsto \hat{v}(\xi + i\eta, \cdot)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{H}^s(G))$.

Dans le problème qui nous intéresse, la fonction w est dans $\mathrm{H}^1(\Gamma)$, à support compact. Par conséquent, elle appartient aussi à $\mathrm{V}^1_\gamma(\Gamma)$, pour tout $\gamma > 0$. On peut donc définir sa transformée de Mellin $\hat{w}(\lambda, \cdot)$ sur la droite $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda = -\gamma\}$, pour tout $\gamma > 0$. Ainsi, $\lambda \mapsto \hat{w}(\lambda, \cdot)$ est bien définie sur tout le demi-plan complexe $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda < 0\}$.
Dans la suite, nous aurons besoin de travailler avec la fonction $h := r^2 p$, où p est définie en (8.7). Puisque $p \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ est à support compact, h appartient à $\mathrm{V}^0_{-2+\gamma}(\Gamma)$, pour tout $\gamma \geq 0$. Sa transformée de Mellin $\theta \mapsto \hat{h}(\lambda, \theta)$ est bien définie sur tout le demi-plan complexe $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re e\, \lambda < 1\}$.

En multipliant par r^2 les équations volumiques dans $(\mathscr{P}_{\text{secteur}})$ et en effectuant la transformée de Mellin pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\, \lambda < 0$, on trouve que $\theta \mapsto \hat{w}(\lambda, \theta)$ est solution de

$$(\hat{\mathscr{P}}_{\text{secteur}}) \left| \begin{array}{ll} \varepsilon_j \left(\partial_\theta^2 + \lambda^2\right) \hat{w}_j(\lambda, \theta) = \hat{h}_j(\lambda, \theta) & \text{dans } G_j,\ j = 1 \dots J_S \\ \hat{w}_1(\lambda, 0) = \hat{w}_{J_S}(\lambda, \sigma_{J_S}) = 0 & \\ \hat{w}_j(\lambda, \sigma_j) = \hat{w}_{j+1}(\lambda, \sigma_j) & j = 1 \dots (J_S - 1) \\ \varepsilon_j \partial_\theta \hat{w}_j(\lambda, \sigma_j) = \varepsilon_{j+1} \partial_\theta \hat{w}_{j+1}(\lambda, \sigma_j) & j = 1 \dots (J_S - 1). \end{array} \right.$$

Introduisons alors le symbole de Mellin associé à $(\hat{\mathscr{P}}_{\text{secteur}})$

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}(\lambda) : & \mathscr{D}(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{L}^2(G_j) \\ & v & \longmapsto & \left(\varepsilon_j \left(d_\theta^2 + \lambda^2\right) v_j\right)_{j=1}^{J_S} \end{array}$$

où $\mathscr{D}(\mathscr{L}) := \left\{ v \in \mathrm{H}^1_0(G) \,|\, v_j \in \mathrm{H}^2(G_j), \varepsilon_j v_j'(\sigma_j) = \varepsilon_{j+1} v_{j+1}'(\sigma_j),\ j = 1 \dots (J_S - 1) \right\}$. Étudions les propriétés de $\mathscr{L}$.

Lemme 8.3.5 *Soit $\lambda \in \mathcal{B}(-1; 1)$. Alors, $\mathscr{L}(\lambda)$ est une application bijective de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ dans $\prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{L}^2(G_j)$ si, et seulement si, on a $\lambda \notin \Lambda_{\varepsilon, S}$.*

Preuve. Si λ appartient à $\Lambda_{\varepsilon, S}$, alors $\mathscr{L}(\lambda)$ n'est pas injectif. Dans ce cas, $\mathscr{L}(\lambda)$ n'est pas bijectif. Supposons donc que λ ne soit pas un élément de $\Lambda_{\varepsilon, S}$. Dans ce cas, $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif. Prouvons qu'alors $\mathscr{L}(\lambda)$ est surjectif. Considérons $q = (q_j)_{j=1}^{J_S} \in \prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{L}^2(G_j)$. Construisons $v \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ tel que $\mathscr{L}(\lambda) v = q$.
Pour cela, intéressons-nous d'abord au problème posé dans G_j

$$(\mathscr{P}_j^a) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v_j^a \in \mathrm{H}^1_0(G_j) \ \text{ tel que :} \\ \varepsilon_j \left(d_\theta^2 + \lambda^2\right) v_j^a = q_j \quad \text{dans } \mathrm{L}^2(G_j), \end{array} \right.$$

$j = 1 \dots J_S$. Pour j donné, le problème $(\mathscr{P}_j^a)$ relève de l'alternative de Fredholm. Mais l'opérateur $T_j := -d_\theta^2$ de $\mathrm{L}^2(G_j)$, de domaine $\mathrm{H}^1_0(G_j) \cap \mathrm{H}^2(G_j)$, est auto-adjoint à résolvante compacte. Son

spectre est égal à $\{k^2\pi^2/(\sigma_j-\sigma_{j-1})^2,\ k\in\mathbb{N}^*\}$. La première, autrement dit, la plus petite, valeur propre de T_j, $\pi^2/(\sigma_j-\sigma_{j-1})^2$, est donc plus petite que 1 car $\sigma_j-\sigma_{j-1}\le\pi$. Ainsi, pour $\lambda\in\mathcal{B}(-1;1)$, λ^2 n'appartient pas au spectre de T_j. Ceci montre que le problème $(\mathscr{P}_j^a)$, pour $j=1\dots J_S$, est injectif. L'alternative de Fredholm assure alors que pour tout $\lambda\in\mathcal{B}(-1;1)$, le problème $(\mathscr{P}_j^a)$ possède une et une seule solution v_j^a, $j=1\dots J_S$. Par ailleurs, en vertu des résultats de régularité elliptiques, on a $v_j^a\in\mathrm{H}^2(G_j)\subset\mathscr{C}^1(\overline{G_j})$, $j=1\dots J_S$.
Considérons ensuite le problème

$$(\mathscr{P}^b)\left|\begin{array}{ll}\text{Trouver } (v_j^b)_{j=1}^{J_S}\in\displaystyle\prod_{j=1}^{J_S}\mathrm{H}^1(G_j) \ \text{ tel que :} & \\ \varepsilon_j\,(d_\theta^2+\lambda^2)\,v_j^b=0 & \text{dans } G_j,\ j=1\dots J_S\\ v_1^b(0)=v_{J_S}^b(\sigma_{J_S})=0 & \\ v_j^b(\sigma_j)=v_{j+1}^b(\sigma_j) & j=1\dots(J_S-1)\\ \varepsilon_j d_\theta v_j^b(\sigma_j)-\varepsilon_{j+1}d_\theta v_{j+1}^b(\sigma_j)=-\alpha_j & j=1\dots(J_S-1)\end{array}\right.$$

où le second membre α_j est choisi égal à $\varepsilon_j d_\theta v_j^a(\sigma_j)-\varepsilon_{j+1}d_\theta v_{j+1}^a(\sigma_j)$, $j=1\dots(J_S-1)$.
Si $(v_j^b)_{j=1}^{J_S}$ vérifie $(\mathscr{P}^b)$, alors les équations volumiques impliquent $v_j^b(\theta)=A_j\,e^{i\,\lambda\theta}+B_j\,e^{-i\,\lambda\theta}$ (resp. $v_j^b(\theta)=A_j\,\theta+B_j$) pour $\lambda\neq0$ (resp. $\lambda=0$). En écrivant les conditions de transmission (au nombre de $2(J_S-1)$), et les conditions de Dirichlet homogènes en 0 et en σ_{J_S}, on construit un système algébrique de $2J_S$ équations linéaires, avec $2J_S$ inconnues A_j, B_j, $j=1\dots J_S$. Puisque $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif, il suit que $(\mathscr{P}^b)$ possède une unique solution.
Pour conclure, définissons v telle que $v|_{G_j}=v_j^a+v_j^b$, $j=1\dots J_S$. Cette fonction appartient à $\mathscr{D}(\mathscr{L})$. De plus, $\mathscr{L}(\lambda)v=q$. Ceci montre que l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ est surjectif. ■

Énonçons ensuite un résultat sur la norme de $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$.

Lemme 8.3.6 *Supposons $\varepsilon_j+\varepsilon_{j+1}\neq0$, $j=1\dots(J_S-1)$. Considérons deux nombres réels α, β avec $\alpha<\beta$. Il existe $\eta_0>0$ et $C>0$ indépendantes de λ telles que,*

$$\sum_{j=1}^{J_S}\|d_\theta^2v_j\|_{G_j}+|\lambda|\,\|d_\theta v\|_G+|\lambda|^2\,\|v\|_G\le C\,\|\mathscr{L}(\lambda)v\|_G,$$

pour tout $v\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$ et tout $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que $|\Im m\,\lambda|>\eta_0$ et $\alpha<\Re e\,\lambda<\beta$.

Preuve. Nous allons démontrer ce résultat par la jolie technique d'« addition de variable » en suivant la preuve du lemme 3.6 de [72]. Définissons les deux rectangles $\mathscr{R}_1:=\{(s,\theta)\in\mathbb{R}^2\,|\,1/2<s<2 \text{ et } 0<\theta<\theta_{max}\}$ et $\mathscr{R}_2:=\{(s,\theta)\in\mathbb{R}^2\,|\,1/4<s<4 \text{ et } 0<\theta<\theta_{max}\}$. Observons que $\mathscr{R}_1\subset\mathscr{R}_2$. Considérons ζ une fonction de troncature régulière qui dépend uniquement de s telle que $\zeta=1$ sur $\mathscr{R}_1$ et supp $\zeta\subset\mathscr{R}_2$. Pour $v\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$, définissons $w:(s,\theta)\mapsto\zeta(s)e^{\lambda s}v(\theta)$. Le Théorème 8.3.3 fournit l'estimation

$$\sum_{j=1}^{J_S}\|w_j\|_{\mathrm{H}^2(\mathscr{R}_1\cap\Gamma_j)}\le C\,(\sum_{j=1}^{J_S}\|\varepsilon_j\Delta w_j\|_{\mathscr{R}_2\cap\Gamma_j}+\|\nabla w\|_{\mathscr{R}_2}). \tag{8.8}$$

Travaillons d'abord sur le terme de droite de (8.8). En remarquant que

$$\begin{aligned}\nabla w(s,\theta) &= \Big((d_s\zeta(s)+\lambda\zeta(s))e^{\lambda s}v(\theta)\ ,\ \zeta(s)e^{\lambda s}d_\theta v(\theta)\Big)^t;\\ \Delta(\zeta(s)e^{\lambda s}v(\theta))(s,\theta) &= \zeta(s)(d_\theta^2+\lambda^2)e^{\lambda s}v(\theta)+2\lambda d_s\zeta(s)e^{\lambda s}v(\theta)+d_s^2\zeta(s)e^{\lambda s}v(\theta);\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\sum_{j=1}^{J_S}\|\varepsilon_j\Delta w_j\|_{\mathscr{R}_2\cap\Gamma_j}+\|\nabla w\|_{\mathscr{R}_2}\le C\,(\|\mathscr{L}(\lambda)v\|_G+\|d_\theta v\|_G+|\lambda|\,\|v\|_G). \tag{8.9}$$

Pour étudier le membre de gauche de (8.8), observons que

$$d_s(e^{\lambda s}v(\theta)) = \lambda e^{\lambda s}v(\theta); \qquad d_\theta(e^{\lambda s}v(\theta)) = e^{\lambda s}d_\theta v(\theta);$$
$$d_s^2(e^{\lambda s}v(\theta)) = \lambda^2 e^{\lambda s}v(\theta); \qquad d_\theta^2(e^{\lambda s}v(\theta)) = e^{\lambda s}d_\theta^2 v(\theta); \qquad d_{s,\theta}^2(e^{\lambda s}v(\theta)) = \lambda e^{\lambda s}d_\theta v(\theta).$$

Nous obtenons donc

$$\sum_{j=1}^{J_S} \|w_j\|_{\mathrm{H}^2(\mathscr{R}_1\cap\Gamma_j)} \geq C\,(\sum_{j=1}^{J_S} \|d_\theta^2 v_j\|_{G_j} + |\lambda|\,\|d_\theta v\|_G + |\lambda|^2\,\|v\|_G). \tag{8.10}$$

En injectant (8.9) et (8.10) dans (8.8), on trouve $\sum_{j=1}^{J_S} \|d_\theta^2 v\|_{G_j} + |\lambda|\,\|d_\theta v\|_G + |\lambda|^2\,\|v\|_G \leq C\,(\|\mathscr{L}(\lambda)v\|_G + \|d_\theta v\|_G + |\lambda|\,\|v\|_G)$. Ceci est équivalent à

$$\sum_{j=1}^{J_S} \|d_\theta^2 v\|_{G_j} + (|\lambda| - C)\,\|d_\theta v\|_G + |\lambda|\,(|\lambda| - C)\,\|v\|_G \leq C\,\|\mathscr{L}(\lambda)v\|_G.$$

En prenant $\eta_0 = 2C$, nous sommes conduits au résultat du lemme. ■

Avec le théorème de Fredholm analytique, on déduit le

Corollaire 8.3.7 *Supposons $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\ldots(J_S - 1)$. Alors il existe deux nombres réels α_S, β_S avec $0 < \alpha_S < 1$, $0 < \beta_S < 1$ tels que $(\mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S) \cap \Lambda_{\varepsilon,\,S}) \subset \mathbb{R}i$. De plus, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S) \cap \Lambda_{\varepsilon,\,S}$ est fini.*

En utilisant l'identité de Parseval (cf. Chapitre 3, Lemme 3.2.2), nous pouvons énoncer le résultat d'isomorphisme entre espaces de Sobolev à poids

Théorème 8.3.8 *Supposons $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\ldots(J_S - 1)$. Considérons $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\{\lambda \in \mathbb{C}\,|\,\Re e\,\lambda = 1 - \gamma\} \cap \Lambda_{\varepsilon,\,S} = \emptyset$. Alors, pour tout $P \in \mathrm{V}^0_\gamma(\Gamma)$, il existe une et une seule solution $W \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{\gamma-1}(\Gamma)$ au problème de transmission*

$$(\mathscr{P}^\gamma_{\text{secteur}}) \left|\begin{array}{ll} \textit{Trouver } W \in \mathrm{V}^1_{\gamma-1}(\Gamma) \textit{ tel que :} & \\ \varepsilon_j \Delta W_j = P_j & \textit{dans } \Gamma_j,\ j = 1\ldots J_S \\ W_1 = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_1 \cap \partial\Gamma \\ W_{J_S} = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_{J_S} \cap \partial\Gamma \\ W_j - W_{j+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_{j+1},\ j = 1\ldots(J_S - 1) \\ \varepsilon_j \partial_\theta W_j - \varepsilon_{j+1}\partial_\theta W_{j+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_{j+1},\ j = 1\ldots(J_S - 1). \end{array}\right.$$

Cette solution a pour expression

$$W : (r,\theta) \mapsto W(r,\theta) = \mathcal{M}^{-1}\left(\mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{H}\right)(r,\theta) = \frac{1}{2i\pi} \uparrow \int_{\Re e\,\lambda = 1-\gamma} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{H}(\lambda,\theta)d\lambda$$

avec $H := r^2 P$.
De plus, on a $W_j \in \mathrm{V}^2_\gamma(\Gamma_j)$, $j = 1\ldots J_S$, avec l'estimation de continuité

$$\|W\|_{\mathrm{V}^1_{\gamma-1}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{J_S} \|W_j\|_{\mathrm{V}^2_\gamma(\Gamma_j)} \leq C\,\|P\|_{\mathrm{V}^0_\gamma(\Gamma)}\,.$$

Nous avons remarqué que le second membre p qui apparaît dans $(\mathscr{P}_{\text{secteur}})$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Gamma)$. Puisque p est à support compact, nous déduisons que $p \in \mathrm{V}^0_\gamma(\Gamma)$ pour tout $\gamma \geq 0$.

Définition 8.3.9 *Supposons $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\ldots(J_S - 1)$. Considérons $\gamma \geq 0$ tel que $\{\lambda \in \mathbb{C}\,|\,\Re e\,\lambda = 1 - \gamma\} \cap \Lambda_{\varepsilon,\,S} = \emptyset$. Notons $w^{1-\gamma}$ la solution du problème $(\mathscr{P}^\gamma_{\text{secteur}})$ avec pour second membre p.*

D'après les résultats précédents, nous savons que $w^{1-\gamma}$ a pour expression

$$w^{1-\gamma} : (r,\theta) \mapsto w^{1-\gamma}(r,\theta) = \mathcal{M}^{-1}\left(\mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}\right)(r,\theta) = \frac{1}{2i\pi} \uparrow \int_{\Re e\,\lambda = 1-\gamma} r^{\lambda}\mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\theta)d\lambda\,.$$

De plus, $w^{1-\gamma}$ appartient à $\mathring{\mathrm{V}}^1_{\gamma-1}(\Gamma)$ et $w_j^{1-\gamma} \in \mathrm{V}^2_{\gamma}(\Gamma_j)$, $j = 1\dots J_S$.

Lorsque $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\dots(J_S-1)$, la fonction w^{β_S}, où β_S apparaît dans le Corollaire 8.3.7 est bien définie. De plus, elle est plus régulière que H^1 car on a $w^{\beta_S} \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta_S}(\Gamma)$, avec $w_j^{\beta_S} \in \mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Gamma_j)$, $j = 1\dots J_S$.
La seconde étape dans notre cheminement va consister à prouver que w est égale à w^{β_S}. Avec ce résultat, nous aurons la régularité supplémentaire pour $S \in \mathcal{S}_{ext}$. Dans la suite, nous supposerons toujours $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\dots(J_S-1)$.

Lemme 8.3.10 *Considérons $\lambda \in \mathcal{B}(-1;\,0) \setminus \Lambda_{\varepsilon,S}$. Alors $\hat{w}(\lambda,\cdot)$ appartient à $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ et*

$$\hat{w}(\lambda,\cdot) = \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)\,.$$

Preuve. Pour λ tel que $\Re e\,\lambda \leq 0$, la fonction $\hat{w}(\lambda,\cdot)$ est bien définie et elle appartient à $\mathrm{H}^1(G)$ en vertu du Lemme 8.3.4. Mais, comme $\hat{w}(\lambda,\cdot) \in \mathrm{H}^1(G)$ constitue une solution de $(\hat{\mathscr{P}}_{\text{secteur}})$, c'est également un élément de $\mathscr{D}(\mathscr{L})$. Le Lemme 8.3.5 prouve alors qu'on a $\hat{w}(\lambda,\cdot) = \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)$. ■

Avec le Théorème 8.3.8, ceci montre que

$$w = w^{-\alpha_S} = \frac{1}{2i\pi} \uparrow \int_{\Re e\,\lambda = -\alpha_S} r^{\lambda}\mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)d\lambda\,.$$

Lemme 8.3.11 *L'application $\lambda \mapsto \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)$, à valeurs dans $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, définit un prolongement méromorphe de $\hat{w}(\lambda,\cdot)$ sur $int(\mathcal{B}(-\alpha;\,1))$, pour tout $\alpha > 0$.*

Preuve. En utilisant le théorème de Fredholm analytique, on prouve que l'application $\lambda \mapsto \mathscr{L}(\lambda)^{-1}$, à valeurs dans l'ensemble des applications continues de $\mathrm{L}^2(G)$ dans $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, est méromorphe sur $\mathbb{C}$. D'autre part, $\lambda \mapsto \hat{h}(\lambda,\cdot)$, à valeurs dans $\mathrm{L}^2(G)$, est holomorphe sur $int(\mathcal{B}(-\alpha;\,1))$ pour tout $\alpha > 0$. Ces deux arguments conduisent au résultat du lemme. ■

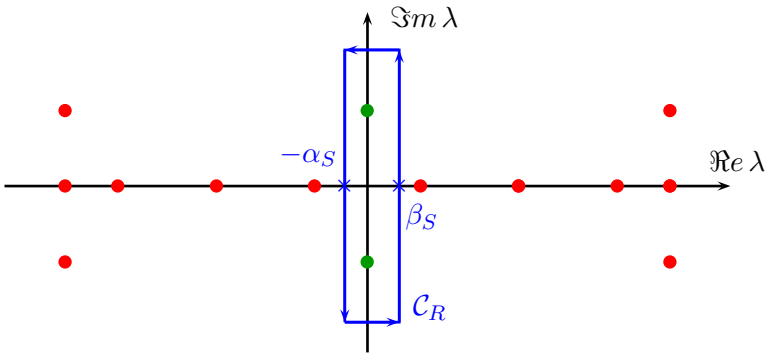


FIGURE 8.1 – Représentation du contour d'intégration $\mathcal{C}_R$.

Considérons, dans le plan complexe, le contour d'intégration (voir Figure 8.1)

$$\mathcal{C}_R := [\beta_S - iR;\beta_S + iR] \cup [\beta_S + iR;-\alpha_S + iR] \cup [-\alpha_S + iR;-\alpha_S - iR] \cup [-\alpha_S - iR;\beta_S - iR]$$

avec $R > 0$. Puisque $\lambda \mapsto r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)$ est méromorphe dans la bande $\mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S)$, le théorème de Cauchy indique que

$$\begin{aligned} w^{\beta_S} - w &= \frac{1}{2i\pi}\uparrow\int_{\Re e\,\lambda=\beta_S} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)d\lambda - \frac{1}{2i\pi}\uparrow\int_{\Re e\,\lambda=-\alpha_S} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)d\lambda \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathcal{C}_R} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)d\lambda \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_{\varepsilon,\,S}\cap\mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S)} \operatorname*{Res}_{\lambda}\, r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)\,. \end{aligned}$$

Considérons $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,\,S} \cap \mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S)$. On peut montrer (voir le lemme 5.1.4, les théorèmes 5.4.1 et 6.1.4 de [102]), que le résidu $\operatorname*{Res}_{\lambda}\, r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot)$ est égal à une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $r^\lambda \sum_{k=0}^{s}(\ln r)^k \varphi_k(\theta)/k!$, avec $\varphi_k \in \mathrm{H}_0^1(G)$. Mais d'après le Corollaire 8.3.7, nous savons que $(\Lambda_{\varepsilon,\,S} \cap \mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S)) \subset \mathbb{R}i$. Puisque w^{β_S} et w appartiennent toutes les deux localement à H^1 dans un voisinage de l'origine, nécessairement on a

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\varepsilon,\,S}\cap\mathcal{B}(-\alpha_S;\,\beta_S)} \operatorname*{Res}_{\lambda}\, r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda,\cdot) = 0.$$

Ainsi, nous obtenons $w = w^{\beta_S}$. Ceci implique $w \in \mathrm{V}^1_{-\beta_S}(\Gamma)$, $w_j \in \mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Gamma_j)$, $j = 1\ldots J_S$, avec l'estimation de continuité du Théorème 8.3.8

$$\|w\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta_S}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{J_S}\|w_j\|_{\mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Gamma_j)} \le C_1\,\|p\|_{\mathrm{V}^0_{1-\beta_S}(\Gamma)}$$

où la constante C_1 dépend uniquement de β_S.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de régularité au voisinage des sommets extérieurs. Rappelons que p, défini en (8.7), élément de $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ à support compact, appartient à $\mathrm{V}^0_{1-\beta_S}(\Gamma)$ (car $\beta_S < 1$). Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|p\|_{\mathrm{V}^0_{1-\beta_S}(\Gamma)} &= \left\|(x^2+y^2)^{(1-\beta_S)/2}\,p\right\|_\Gamma \\ &\le \left\|(x^2+y^2)^{(1-\beta_S)/2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma\cap\Omega)}\|p\|_\Gamma \\ &\le d_S^{1-\beta_S}\,\|p\|_\Gamma \quad\le\quad C_2\,(\|f\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega)\,. \end{aligned}$$

Ceci conduit à

$$\|w\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta_S}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{J_S}\|w_j\|_{\mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Gamma_j)} \le C_1\,C_2\,(\|f\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega)\,,$$

ce qui constitue le résultat de régularité que nous cherchions pour les sommets extérieurs.

Théorème 8.3.12 *Supposons $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\ldots(J_S-1)$. Alors, pour $\beta_S \in\,]0;1[$ défini dans le Corollaire 8.3.7, on a*

$$\|u\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta_S}(\Omega\cap B(S,\frac{d_S}{2}))} + \sum_{j=1}^{J_S}\|u_j\|_{\mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Omega_j\cap B(S,\frac{d_S}{2}))} \le C\,(\|\mathrm{div}\,(\varepsilon\nabla u)\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega)$$

où la constante C est indépendante de u.

8.3.3 Régularité au voisinage des sommets internes

Considérons un sommet interne $S \in \mathcal{S}_{int}$. L'étude de régularité autour de ce sommet est très similaire à celle que nous avons effectuée dans la sous-section précédente, la différence principale résidant dans le fait qu'il faut remplacer la condition de Dirichlet homogène en 0 et en $\sigma_{J_S} = 2\pi$ par deux conditions de transmission.
Ci-dessous, nous conservons les mêmes notations. Cette fois, nous définissons l'ensemble exposants de singularité $\Lambda_{\varepsilon,S}$ associé au sommet S comme l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un élément non nul $(\phi_{\lambda,j})_{j=1}^{J_S} \in \prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{H}^2(G_j)$ vérifiant :

$$\left|\begin{array}{ll} (\partial_\theta^2 + \lambda^2)\,\phi_{\lambda,j} = 0 & \text{dans } G_j,\ j = 1\dots J_S \\ \phi_{\lambda,1}(0) = \phi_{\lambda,J_S}(2\pi) & \\ \varepsilon_1 \partial_\theta \phi_{\lambda,1}(0) = \varepsilon_{J_S} \partial_\theta \phi_{\lambda,J_S}(2\pi) & \\ \phi_{\lambda,j}(\sigma_j) = \phi_{\lambda,j+1}(\sigma_j) & j = 1\dots(J_S-1) \\ \varepsilon_j \partial_\theta \phi_{\lambda,j}(\sigma_j) = \varepsilon_{j+1} \partial_\theta \phi_{\lambda,j+1}(\sigma_j) & j = 1\dots(J_S-1). \end{array}\right.$$

Nous sommes alors amenés à considérer le symbole de Mellin

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}(\lambda): & \mathscr{D}(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{j=1}^{J_S} \mathrm{L}^2(G_j) \\ & v & \longmapsto & (\varepsilon_j\,(d_\theta^2 + \lambda^2)\,v_j)_{j=1}^{J_S} \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\mathscr{L}) \quad := \quad & \{v \in \mathrm{H}^1(G) \,|\, v_j \in \mathrm{H}^2(G_j), v_{J_S}(2\pi) = v_1(0),\ \varepsilon_{J_S} v'_{J_S}(2\pi) = \varepsilon_1 v'_1(0), \\ & \qquad \varepsilon_j v'_j(\sigma_j) = \varepsilon_{j+1} v'_{j+1}(\sigma_j),\ j = 1\dots(J_S-1)\}. \end{aligned}$$

On peut prouver des résultats similaires aux Lemmes 8.3.5 et 8.3.6, ainsi qu'au Corollaire 8.3.7, pour l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ ci-dessus. En suivant la démarche détaillée lors de l'étude pour les sommets extérieurs, on montre que

$$w^{\beta_S} - w \quad = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,S} \cap \mathcal{B}(-\alpha_S;\beta_S)} \operatorname*{Res}_{\lambda}\, r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1} \hat{h}(\lambda,\cdot)\,.$$

En procédant comme auparavant, en raison de l'absence de condition de Dirichlet homogène, nous pouvons seulement conclure

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,S} \cap \mathcal{B}(-\alpha_S;\beta_S)} \operatorname*{Res}_{\lambda}\, r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1} \hat{h}(\lambda,\cdot) = z_S\,,$$

où z_S est une constante. Cependant, cette constante ne causera pas de problème car nous sommes principalement intéressés par la régularité de ∇u.

Résumons le résultat que nous venons d'obtenir par le

Théorème 8.3.13 *Supposons $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, $j = 1\dots(J_S-1)$. Alors, il existe une constante z_S telle qu'on ait, avec $\beta_S \in]0;1[$ défini dans le Corollaire 8.3.7,*

$$\|u + z_S\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta_S}(\Omega \cap B(S,\frac{d_S}{2}))} + \sum_{j=1}^{J_S} \|u_j + z_S\|_{\mathrm{V}^2_{1-\beta_S}(\Omega_j \cap B(S,\frac{d_S}{2}))} \leq C\ (\|\mathrm{div}\,(\varepsilon\nabla u)\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega)$$

avec C indépendante de u.

8.3.4 Régularité globale

Revenons au problème de régularité globale. Rappelons que pour tout $S \in \mathcal{S}$, $\mathcal{V}_S := \Omega \cap B(S, d_S)$ constitue un voisinage de S tel que $\overline{\mathcal{V}_S} \cap \mathcal{S} = \{S\}$. Considérons ensuite un ouvert $\mathcal{V}_0 \subset \Omega$ tel que $\overline{\mathcal{V}_0} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $\Omega = \mathcal{V}_0 \cup (\cup_{S\in\mathcal{S}} \mathcal{V}_S)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, introduisons l'espace

$$\mathrm{K}^m_\gamma(\Omega) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) \,|\, v \in \mathrm{H}^m(\mathcal{V}_0) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m, \forall S \in \mathcal{S}, r_S^{|\alpha|-m+\gamma} \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{V}_S)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{K}^m_\gamma(\Omega)} := (\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\mathcal{V}_0)} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|r_S^{|\alpha|-m+\gamma} \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v\|^2_{\mathcal{V}_S})^{1/2},$$

où (r_S, θ_S) désignent les coordonnées polaires associées au sommet S.

Par ailleurs, pour $j = 1 \ldots N$, $m \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, définissons l'espace

$$\mathrm{K}^m_\gamma(\Omega_j) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_j) \,|\, v \in \mathrm{H}^m(\mathcal{V}_0 \cap \Omega_j) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m, \forall S \in \mathcal{S}, r_S^{|\alpha|-m+\gamma} \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{V}_S \cap \Omega_j)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{K}^m_\gamma(\Omega_j)} := (\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\mathcal{V}_0 \cap \Omega_j)} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|r_S^{|\alpha|-m+\gamma} \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} v\|^2_{\mathcal{V}_S \cap \Omega_j})^{1/2}.$$

En utilisant une partition de l'unité, et à l'aide des Théorèmes 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3, 8.3.12 et 8.3.13, nous pouvons conclure au résultat de régularité globale suivant.

Théorème 8.3.14 *Supposons que pour tout couple de sous-domaines (Ω_i, Ω_j) de Ω partageant une arête, on ait $\varepsilon_i + \varepsilon_j \neq 0$. Introduisant, $\beta := \min_{S\in\mathcal{S}} \beta_S$, on a l'estimation*

$$\|\nabla u\|_{\mathrm{K}^0_{-\beta}(\Omega)^2} + \sum_{j=1}^N \|\nabla u\|_{\mathrm{K}^1_{1-\beta}(\Omega_j)^2} \leq C\, (\|\mathrm{div}\,(\varepsilon \nabla u)\|_\Omega + \|\nabla u\|_\Omega),$$

où la constante C est indépendante de u.

8.4 Injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Nous disposons maintenant de tous les outils pour prouver que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Théorème 8.4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné connexe à frontière polygonale connexe, partitionné en N sous-domaines polygonaux disjoints Ω_j. Supposons que pour tout couple de sous-domaines (Ω_i, Ω_j) de Ω partageant une arête, on ait $\varepsilon_i + \varepsilon_j \neq 0$.*
Alors, l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Preuve. Considérons $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$. Le Théorème 8.2.2 assure qu'on peut associer à $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites $(\boldsymbol{u}_{0\,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{H}_N(\Omega, \varepsilon)^{\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}(F)^{\mathbb{N}}$, telles que

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_{0\,n} + \nabla \varphi_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, ce même théorème indique que $(\boldsymbol{u}_{0\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega, \mathcal{P})$, tandis que $(\mathrm{div}\,(\varepsilon \nabla \varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nabla \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées respectivement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Or nous savons que $\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega, \mathcal{P})$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour le voir, on peut remarquer que $\mathrm{P}\mathbf{H}^1(\Omega, \mathcal{P}) \subset \cap_{s<1/2} \mathbf{H}^s(\Omega)$, et que $\mathbf{H}^s(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour tout $s > 0$, lorsque Ω est borné.
Il suffit donc d'étudier la suite $(\nabla \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\beta := \min_{S\in\mathcal{S}} \beta_S$, où les nombres réels β_S sont définis dans le Corollaire 8.3.7. Le Théorème 8.3.14 prouve que les suites $(\nabla \varphi_n|_{\Omega_j})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathrm{K}^1_{1-\beta}(\Omega_j)^2$, pour $j = 1 \ldots N$. Puisque $\beta > 0$, on a $1 - \beta < 1$, et donc $\mathrm{K}^1_{1-\beta}(\Omega_j)^2$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega_j)$ (cf. [102, lemme 6.2.1]), pour $j = 1 \ldots N$. Ceci achève la preuve. ■

◇ Exemple du coin intérieur. Pour la géométrie de la Figure 8.2 pour laquelle l'interface présente un angle droit, le Théorème 8.4.1 indique que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte dès lors que le contraste $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ est différent de -1. C'est mieux que le résultat du Théorème 7.4.5 du Chapitre 7 qui nécessite l'hypothèse $\kappa_\varepsilon \notin [-3;-1/3]$. Le résultat de compacité du Théorème 8.4.1 constituera un ingrédient important lorsqu'on souhaitera déterminer un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de Maxwell pour un contraste en ε situé dans l'intervalle critique. Ce nouveau cadre, que nous ne développerons pas dans ce mémoire, devra pouvoir prendre en compte les gradients des singularités propagatives introduites dans le Chapitre 5.

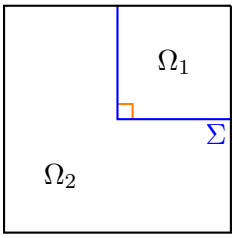


Figure 8.2 – Une configuration pour laquelle le Théorème 8.4.1 est plus efficace que le Théorème 7.4.5.

Remarque 8.4.2 *Il devrait être possible d'affaiblir les hypothèses du Théorème 8.4.1 pour pouvoir traiter le cas d'un ε régulier sur chaque élément de la partition $\mathcal{P}$ et le cas de sous-domaines Ω_i, $i = 1\ldots N$, à frontière polygonale curviligne. Nous n'étudierons pas ces questions ici et nous renvoyons le lecteur à [87, 69] pour les idées permettant de telles extensions.*

8.5 Un exemple d'injection non compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Pour conclure ce chapitre, présentons un exemple d'injection non compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\Omega_1 := \,]-1;0[\,\times\,]0;1[$, $\Omega_2 := \,]0;1[\,\times\,]0;1[$ et $\Omega := \,]-1;1[\,\times\,]0;1[$. Ainsi, Ω est symétrique par rapport à l'axe (Oy). D'après le Théorème 8.4.1, l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte lorsque $\varepsilon_1+\varepsilon_2 \neq 0$. Par contre, ce n'est pas le cas lorsque $\varepsilon_1+\varepsilon_2 = 0$ comme l'indique la

Proposition 8.5.1 *Supposons $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Alors l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte.*

Preuve. Pour démontrer ce résultat, nous nous inspirons de la preuve de la proposition 2.7 de [2]. Définissons l'arête $A := \overline{\Omega_2} \cap \overline{\Omega_1}$. Rappelons que $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(A)$ désigne le sous-espace de $\mathrm{H}^{1/2}(A)$ constitué des éléments dont le prolongement par 0 à $\mathbb{R}$ appartient à $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbb{R})$. Introduisons $(g^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(A)$, faiblement convergente vers 0 dans $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(A)$, qui ne possède pas de sous-suite fortement convergente dans $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(A)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons les solutions des problèmes

$$\left|\begin{array}{lcl} \text{Trouver } \varphi_1^k \in \mathrm{H}^1(\Omega_1) \text{ tel que} & & \\ \Delta\varphi_1^k & = & 0 \\ \varphi_1^k|_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_1} & = & 0 \\ \varphi_1^k|_A & = & g^k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{lcl} \text{Trouver } \varphi_2^k \in \mathrm{H}^1(\Omega_2) \text{ tel que} & & \\ \Delta\varphi_2^k & = & 0 \\ \varphi_2^k|_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_2} & = & 0 \\ \varphi_2^k|_A & = & g^k \end{array}\right. .$$

En utilisant la symétrie du problème, on montre facilement que

$$\varphi_1^k(x,y) = \varphi_2^k(-x,y), \qquad \text{p.p.t. } (x,y) \in \Omega_1.$$

De plus, puisque le contraste est égal à -1, l'élément φ^k de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $\varphi^k|_{\Omega_1} := \varphi^k_1$ et $\varphi^k|_{\Omega_2} := \varphi^k_2$ vérifie $\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^k) = 0$.
Par construction, la suite $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et converge faiblement vers 0 dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ car l'application $g^k \mapsto \varphi^k$ est continue de $\widetilde{\mathrm{H}}^{1/2}(A)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Mais il n'existe pas de sous-suite de $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers 0 dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (raisonner par l'absurde en utilisant la continuité de l'application trace sur A).

Définissons ensuite $\boldsymbol{u}^k := \nabla\varphi^k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^k = 0$ et $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}^k) = 0$. La suite $(\boldsymbol{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et converge faiblement vers 0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'autre part, on ne peut pas extraire de $(\boldsymbol{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge fortement (vers 0) dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour montrer ce dernier résultat, on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une sous-suite $(\tilde{\boldsymbol{u}}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\boldsymbol{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Alors la sous-suite correspondante $(\tilde{\varphi}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement (vers 0) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, d'où l'absurdité. ■

CHAPITRE NEUF

ÉQUATIONS DE MAXWELL EN 3D

Les résultats de ce chapitre feront probablement l'objet de la publication :

[20] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : T-coercivity for the Maxwell transmission problem between a dielectric and a negative material. *En cours*, 27 pages, 2012.

Sommaire

Introduction **211**
9.1 Mise en place du problème **213**
9.2 Formulations équivalentes **214**
9.2.1 Problème pour le champ électrique 214
9.2.2 Problème pour le champ magnétique 216
9.3 Éclairage : T-coercivité dans $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ **217**
9.3.1 Étude pour le champ électrique avec une permittivité $\varepsilon = 1$ 217
9.3.2 Étude pour le champ magnétique avec une perméabilité $\mu = 1$ 218
9.4 Résultats de compacité **219**
9.4.1 Injection compacte de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 219
9.4.2 Injection compacte de $\mathbf{X}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 220
9.5 Caractère bien posé des problèmes initiaux **221**
9.6 Illustrations **223**
9.6.1 Domaine symétrique 223
9.6.2 Arête prismatique 224
9.6.3 Coin de Fichera 225
9.6.4 Cavité non symétrique 225
9.7 Extension : problèmes scalaires non injectifs **226**
9.7.1 Problèmes scalaires non injectifs : formulations équivalentes 228
9.7.2 Problèmes scalaires non injectifs : résultats de compacité 229
9.7.3 Problèmes scalaires non injectifs : retour aux problèmes initiaux 229
9.8 Extension : géométries non triviales **231**
9.8.1 Géométries non triviales : résultats de compacité 234
9.8.2 Géométries non triviales : retour aux problèmes initiaux 235

Introduction

Nous continuons l'étude des équations de Maxwell en régime harmonique en temps dans un matériau composite plongé dans un conducteur parfait. Le matériau composite est modélisé par une permittivité diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ qui varient en espace. Nous souhaitons plus particulièrement nous intéresser à des matériaux composites

mélangeant matériaux positifs et matériaux négatifs. Il est bien connu que les métaux, sous la fréquence plasma, présentent une permittivité à partie réelle négative (cf. Chapitre 4). Or de nombreux métaux possèdent une fréquence plasma située dans l'ultraviolet si bien que dans le visible, la partie réelle de ε est négative. La perméabilité μ reste par contre positive indépendamment de la fréquence. Récemment, les physiciens sont parvenus à concevoir des matériaux à perméabilité négative pour certaines plages de fréquences et même des matériaux doublement négatifs, c'est-à-dire, des matériaux qui, après homogénéisation, se comportent comme si ε et μ étaient toutes les deux négatives. Indiquons que ce sont ces derniers « métamatériaux » qui permettent d'obtenir le spectaculaire effet d'indice de réfraction négatif. L'association de matériaux classiques avec des matériaux négatifs ouvre la voie à des applications très prometteuses telles que les guides d'ondes plasmoniques, les lentilles parfaites [148, 113, 134], les pièges à photon, les cavités sous-longueur d'ondes [76] ... De nouveau, indiquons que les expérimentations dans ces domaines sont longues et coûteuses à mettre en place, notamment en raison de l'échelle nanométrique des structures. C'est pourquoi, l'on cherche à les remplacer par des simulations numériques. Or d'un point de vue mathématique, le changement de signe des coefficients physiques présente des difficultés relativement inhabituelles tant d'un point de vue théorique que numérique [131, 137, 80]. De façon générale, les questions auxquelles nous devons répondre sont les suivantes. Peut-on étendre les théories classiques pour traiter les configurations dans lesquelles ε et/ou μ changent de signe ? Si ce n'est pas possible, peut-on déterminer un nouveau cadre fonctionnel dans lequel on retrouve un problème bien posé et des propriétés de stabilité ? Dans la suite, nous allons considérer des permittivités et perméabilités à valeurs réelles. Réexpliquons pourquoi. Pour les applications, l'on cherche à travailler avec des matériaux aussi peu dissipatifs que possible et le comportement d'un matériau légèrement absorbant est très lié au comportement du matériau sans dissipation. Par conséquent, il est important de bien comprendre les propriétés du problème idéal non dissipatif. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 4 pour ces questions de modélisation.

Pour les configurations 2D telles que les guides 3D invariants dans une direction, les équations de Maxwell se ramènent à des problèmes scalaires mettant en jeu les opérateurs $-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla\cdot)$ avec condition de Dirichlet ou de Neumann, σ étant égal à ε^{-1} ou μ^{-1}. Nous avons étudié en détail ces problèmes scalaires dans les Parties I et II (voir également [23, 155, 25, 129]). Ces problèmes sont bien posés au sens de Fredholm si le contraste (rapport des valeurs de σ de part et d'autre de l'interface entre les matériaux) est situé en dehors d'un intervalle critique contenant toujours la valeur -1. Cet intervalle se réduit à $\{-1\}$ si et seulement si l'interface est régulière (voir également [66] pour une approche reposant sur les équations intégrales). Pour un contraste égal à -1, les problèmes sont sévèrement mal posés dans H^1. L'influence des coins, observée dans [145, 149], a été clarifiée dans [72, 26, 138] ainsi que dans le Chapitre 5. Lorsque l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif présente un coin, selon la valeur du contraste, les problèmes scalaires peuvent être mal posés (non Fredholm) dans H^1 en raison de l'apparition de deux « singularités propagatives » au niveau du coin. Nous pouvons définir un nouveau cadre fonctionnel en ajoutant l'une de ces singularités dans l'espace. Le caractère bien posé du problème est alors obtenu en imposant une condition de radiation, justifiée par un principe d'absorption limite, au niveau du coin.

Pour les problèmes scalaires, la théorie commence à être assez claire. À présent, notre objectif consiste à étendre ces résultats pour étudier les équations de Maxwell. Nous souhaitons en particulier développer une technique variationnelle pour obtenir le caractère bien posé de ces équations. Les techniques variationnelles sont intéressantes car elles permettent de considérer des configurations relativement générales pour lesquelles l'interface et les coefficients ε, ε^{-1}, μ, μ^{-1} sont lipschitziens. Il est compliqué d'adapter l'approche géométrique présentée dans le Chapitre 1 pour traiter les problèmes vectoriels en raison de la nature des espaces utilisés pour les équations de Maxwell. C'est pourquoi nous procéderons différemment. Nous recourrons de nouveau à la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité mais sous une forme plus abstraite. Nous allons prouver que l'on peut

construire des opérateurs de T-coercivité qui permettent de restaurer une certaine positivité dès lors que les problèmes scalaires 3D associés sont bien posés. Lorsque les contrastes en ε et en μ sont situés dans les intervalles critiques, l'étude reste à mener pour obtenir un problème bien posé dans un cadre fonctionnel *ad hoc*.

Présentons maintenant le plan de ce chapitre. Nous commençons par définir le problème et introduire les notations dans la Section 9.1. Dans la Section 9.2, nous donnons des formulations équivalentes des équations de Maxwell dans les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ pour le champ électrique et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ pour le le champ magnétique. Dans ces espaces, nous imposons la condition de divergence nulle. La Section 9.3 contient l'idée principale de ce chapitre. Nous montrons comment construire des opérateurs de T-coercivité pour les équations de Maxwell lorsque les problèmes scalaires 3D associés sont bien posés. Dans un souci pédagogique, nous présentons d'abord le procédé pour les configurations canoniques $\varepsilon = 1$ pour le champ électrique et $\mu = 1$ pour le champ magnétique. Ensuite, nous utilisons ces résultats et une astuce de [41] pour prouver que les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ s'injectent de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega) := \mathrm{L}^2(\Omega)^3$, prolongeant ainsi les résultats de [24]. De nouveau, soulignons que ces résultats n'existent pas dans la littérature lorsque ε et μ changent de signe. Dans la Section 9.5, nous énonçons et prouvons le résultat principal de ce travail : les problèmes de transmission pour les équations de Maxwell pour le champ électrique et le champ magnétique sont bien posés dès lors que les problèmes scalaires associés possèdent une unique solution. Nous illustrons ce résultat sur une série de géométries canoniques. Enfin, nous présentons quelques généralisations. Dans la Section 9.7, nous nous intéressons à des configurations pour lesquelles les problèmes scalaires sont bien posés au sens de Fredholm mais avec un noyau non réduit à zéro. Dans la Section 9.8, nous considérons le cas d'un domaine non simplement connexe à frontière non connexe[1]. Cette dernière étude permet de traiter les domaines non simplement connexes à frontière connexe ainsi que les domaines simplement connexes à frontière non connexe.

9.1 Mise en place du problème

Considérons Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, *i.e.* un ouvert borné connexe à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Dans l'introduction du Chapitre 7, nous avons vu que les équations de Maxwell en régime périodique en temps s'écrivent

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - i\omega\mu\boldsymbol{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} + i\omega\varepsilon\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J} \quad \text{dans } \Omega. \tag{9.1}$$

Ci-dessus, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ désignent respectivement les champs électrique et magnétique. Le terme source $\boldsymbol{J}$ est la densité de courant. Nous faisons l'hypothèse que le milieu Ω, composé d'un ou plusieurs matériaux, est plongé dans un conducteur parfait si bien qu'on a les conditions aux limites suivantes

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{9.2}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur. Nous supposons que la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ, à valeurs réelles, appartiennent à $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $\mu^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Introduisons quelques espaces usuels dans l'étude des équations de Maxwell :

$$\begin{array}{lcll}
\mathbf{L}^2(\Omega) & := & \mathrm{L}^2(\Omega)^3; & \\
\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) & := & \left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\,|\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\right\}; & \\
\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega\}; & \\
\mathbf{V}_N(\xi;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u})=0,\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega\}, & \text{pour } \xi\in\mathrm{L}^\infty(\Omega); \\
\mathbf{V}_T(\xi;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u})=0,\ \xi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega\}, & \text{pour } \xi\in\mathrm{L}^\infty(\Omega).
\end{array}$$

1. La Figure 9.2 à la fin de ce chapitre présente un exemple de domaine non simplement connexe à frontière non connexe.

Nous munirons les espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)$, $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)$, $\mathbf{V}_N(\xi;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\xi;\,\Omega)$ du produit scalaire

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{rot}} = (\cdot,\cdot)_\Omega + (\mathbf{rot}\,\cdot,\mathbf{rot}\,\cdot)_\Omega.$$

La densité de courant $\boldsymbol{J}$ est choisie dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ avec $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0$. Nous notons indistinctement $(\cdot,\cdot)_\Omega$ (resp. $\|\cdot\|_\Omega$) les produits scalaires (resp. normes) de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Si $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ vérifient les équations (9.1)-(9.2), $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont respectivement solutions des problèmes

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } \boldsymbol{E}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que :} & & & \\ \mathbf{rot}\,\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E} & = & i\omega\boldsymbol{J} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{9.3}$$

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } \boldsymbol{H}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que :} & & & \\ \mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \omega^2\mu\boldsymbol{H} & = & \mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J} & \text{dans } \Omega \\ \mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varepsilon^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J})\times\boldsymbol{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{9.4}$$

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous souhaitons déterminer des critères sur ε et μ pour assurer que les problèmes (9.3) et (9.4) sont bien posés au sens de Fredholm (noyau et conoyau de même dimension finie). Classiquement pour l'étude des équations de Maxwell, notre stratégie va consister, dans un premier temps en tout cas, à travailler dans l'espace $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ pour le champ électrique et dans l'espace $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ pour le champ magnétique. En effet, par exemple, si $\boldsymbol{E}$ vérifie (9.3) et si $\omega\neq 0$, alors $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0$, et donc $\boldsymbol{E}$ appartient à l'espace $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Pour montrer que le problème pour le champ électrique est bien posé au sens de Fredholm, nous aurons alors besoin de prouver que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte et que l'opérateur $\mathbf{rot}\,\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\cdot : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)\to\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)^*$ définit un isomorphisme (ou au moins un opérateur Fredholm d'indice zéro). De même, pour montrer que le problème en champ magnétique (9.4) est bien posé au sens de Fredholm, il faut prouver que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte et que l'opérateur $\mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\cdot : \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)\to\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)^*$ constitue un isomorphisme (ou au moins un opérateur Fredholm d'indice zéro).

9.2 Formulations équivalentes

Commençons par donner des formulations équivalentes pour le problème (9.1)-(9.2) dans les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.

9.2.1 Problème pour le champ électrique

Considérons a^ε la forme bilinéaire telle que $a^\varepsilon(\varphi,\varphi') = (\varepsilon\nabla\varphi,\nabla\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi,\varphi'\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $A^\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega)\to\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi,\varphi'\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $(\nabla(A^\varepsilon\varphi),\nabla\varphi')_\Omega = a^\varepsilon(\varphi,\varphi')$. Sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, nous définissons la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \|\nabla\cdot\|_\Omega$. Maintenant, introduisons une hypothèse portant sur le problème scalaire pour le champ électrique. Ici, $C>0$ est une constante.

$$(\mathscr{H}_\varepsilon)\quad\left|\begin{array}{ll} \text{Il existe un isomorphisme } \mathtt{T}^\varepsilon \text{ de } \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que} & \\ |a^\varepsilon(\varphi,\mathtt{T}^\varepsilon\varphi)| \geq C\,\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}, & \forall\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array}\right.$$

Lemme 9.2.1 *L'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ est vérifiée si et seulement si $A^\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega)\to\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dans ce cas, pour tout $f\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution au problème*

$$\left|\begin{array}{lcl} \textit{Trouver } \varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega) \textit{ tel que :} & & \\ -\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) & = & f. \end{array}\right. \tag{9.5}$$

On a alors l'estimation de continuité $\|\varphi\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\ \|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}$, *où* $C > 0$ *est une constante indépendante de* f.

Remarque 9.2.2 *Nous avons vu dans le Chapitre 1 comment construire les opérateurs* $\mathtt{T}^\varepsilon$ *selon les configurations. Il faut avoir en tête que* $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ *est une hypothèse portant uniquement sur les valeurs de* ε *et sur la géométrie du domaine.*

Preuve. Le résultat de ce lemme important est fourni par le Théorème 2.1.4 du Chapitre 2. Nous en redonnons la preuve, très simple, sur ce cas particulier.
Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée. Puisque $\mathtt{T}^\varepsilon$ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, φ vérifie (9.5) si et seulement si φ est une solution du problème « trouver $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $a^\varepsilon(\varphi, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi') = \langle f, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi'\rangle_\Omega$, pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ » où $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ désigne le crochet de dualité $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure que le problème (9.5) est bien posé car $(\varphi, \varphi') \mapsto a^\varepsilon(\varphi, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi')$ est coercive sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ par hypothèse. Cette approche montre que A^ε constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
Réciproquement, si A^ε définit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, en prenant $\mathtt{T}^\varepsilon = A^\varepsilon$, on trouve, pour $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $|a^\varepsilon(\varphi, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi)| = \|A^\varepsilon\varphi\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \geq C\ \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$. ■

Théorème 9.2.3 *Supposons* $\omega \neq 0$.
1) Si $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ *vérifie (9.1)-(9.2) alors* $\boldsymbol{E}$ *est une solution du problème*

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}', \qquad \forall \boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega). \end{array}\right. \tag{9.6}$$

2) Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ *vérifiée. Si* $\boldsymbol{E}$ *satisfait (9.6) alors* $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ *est une solution de (9.1)-(9.2).*

Preuve. 1) Si $\boldsymbol{E}$ vérifie (9.1)-(9.2), alors $\boldsymbol{E}$ est une solution de (9.3). D'autre part, puisque $\omega \neq 0$, on a $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0$. Ceci montre que $\boldsymbol{E}$ satisfait (9.6).

2) Maintenant, prouvons que si $\boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ vérifie (9.6) alors $\boldsymbol{E}$ est une solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{E} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega) \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}', \qquad \forall \boldsymbol{E}' \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega). \end{array}\right. \tag{9.7}$$

Pour tout $\boldsymbol{E}'$ dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, le Lemme 9.2.1 indique qu'on peut construire $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}')$. L'élément $\boldsymbol{E}' - \nabla\varphi$ appartient à $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. En remarquant que $(\varepsilon\boldsymbol{E}, \nabla\varphi)_\Omega = 0$ et $(\boldsymbol{J}, \nabla\varphi)_\Omega = 0$ (rappelons que $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0$), on obtient

$$\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}'.$$

Mais (9.3) et (9.7) sont équivalents. Par conséquent, si $\boldsymbol{E}$ satisfait (9.6) alors $\boldsymbol{E}$ est solution de (9.3). Il ne reste plus qu'à observer que dans ce cas, $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie (9.1)-(9.2). ■

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $\mathscr{A}_N(\omega) : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ tel que

$$(\mathscr{A}_N(\omega)\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}')_\Omega - \omega^2(\varepsilon\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega). \tag{9.8}$$

9.2.2 Problème pour le champ magnétique

Pour l'étude du champ magnétique, introduisons l'espace des fonctions à moyenne nulle

$$\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \mid \int_\Omega \varphi = 0 \right\}.$$

La seule constante appartenant à $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ est zéro. En utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte et puisque, par hypothèse, Ω est connexe, on montre en raisonnant par l'absurde le

Lemme 9.2.4 *L'application $(\varphi, \varphi') \mapsto (\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. La norme associée est notée $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)}$.*

Considérons a^μ la forme bilinéaire telle que $a^\mu(\varphi, \varphi') = (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $A^\mu : \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \to \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$, $(\nabla(A^\mu\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = a^\mu(\varphi, \varphi')$. Comme pour l'étude du champ électrique, introduisons une hypothèse associée au problème scalaire 3D pour le champ magnétique. De nouveau, $C > 0$ est une constante.

$$(\mathscr{H}_\mu) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe un isomorphisme } \mathtt{T}^\mu \text{ de } \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \text{ tel que} \\ |a^\mu(\varphi, \mathtt{T}^\mu)_\Omega| \geq C \, \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega). \end{array} \right.$$

Lemme 9.2.5 *L'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ est vérifiée si et seulement si A^μ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. Dans ce cas, pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega f = 0$, il existe une unique solution au problème*

$$\left| \begin{array}{lcl} \textit{Trouver } \varphi \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \textit{ tel que :} & & \\ -\mathrm{div}\,(\mu\nabla\varphi) & = & f \textit{ dans } \Omega \\ \mu\,\partial_{\boldsymbol{n}}\varphi & = & 0 \textit{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{9.9}$$

On a alors l'estimation de continuité $\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_\Omega$, où $C > 0$ est une constante indépendante de f.

Remarque 9.2.6 *Soulignons que $(\mathscr{H}_\mu)$ constitue une hypothèse portant seulement sur les valeurs de μ et sur la géométrie du domaine.*

Preuve. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée. Dans ce cas, $\mathtt{T}^\mu$ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. Puisque f satisfait la relation de compatibilité $\int_\Omega f = 0$, la fonction φ est solution de (9.9) si et seulement si elle vérifie le problème « trouver $\varphi \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ tel que $a^\mu(\varphi, \mathtt{T}^\mu\varphi') = (f, \mathtt{T}^\mu\varphi')_\Omega$, pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ ». Mais le Lemme 9.2.4 assure que $(\varphi, \varphi') \mapsto a^\mu(\varphi, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi')$ est coercive sur $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. On peut alors conclure que le problème (9.9) est bien posé avec le théorème de Lax-Milgram. On déduit que A^μ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$.
Réciproquement, si A^μ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$, en prenant $\mathtt{T}^\mu = A^\mu$, on trouve, pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$, $|a^\mu(\varphi, \mathtt{T}^\mu\varphi)| = \|A^\mu\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)} \geq C \, \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)}$. ■

En adaptant la preuve du Théorème 9.2.3, on obtient le

Théorème 9.2.7 *Supposons $\omega \neq 0$.*
1) Si $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ vérifie (9.1)-(9.2) alors $\boldsymbol{H}$ est une solution du problème

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} \cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}' - \omega^2\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}' = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}', \qquad \forall \boldsymbol{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \end{array} \right. \tag{9.10}$$

2) Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée. Si $\boldsymbol{H}$ satisfait (9.10) alors $(i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}), \boldsymbol{H})$ est une solution de (9.1)-(9.2).

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $\mathscr{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que

$$(\mathscr{A}_T(\omega)\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \tag{9.11}$$

9.3 Éclairage : T-coercivité dans $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$

Dans un souci pédagogique, présentons la technique de la T-coercivité pour les équations de Maxwell 3D sur les cas académiques : $\varepsilon = 1$ pour le champ électrique et $\mu = 1$ pour le champ magnétique. Cette étude sera utile pour deux raisons. D'une part, les résultats obtenus serviront à prouver les résultats d'injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'autre part, cela donnera un aperçu de la méthode à employer pour étudier les opérateurs $\mathscr{A}_N(0)$ et $\mathscr{A}_T(0)$.

Avant de débuter, rappelons ici les propriétés connues pour les espaces $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ (cf. [150, 2]).
– L'injection de $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. De plus, lorsque $\partial\Omega$ est connexe, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.
– L'injection de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. De plus, lorsque Ω est simplement connexe, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

9.3.1 Étude pour le champ électrique avec une permittivité $\varepsilon = 1$

Intéressons-nous d'abord au problème pour le champ électrique.

Lemme 9.3.1 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée. Alors, il existe un isomorphisme $\mathbb{T} : \mathbf{V}_N(1;\,\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que*

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_\Omega = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega). \tag{9.12}$$

Preuve. ⋆ `Définition de` $\mathbb{T}$. Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$.
i) Définissons φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' = \int_\Omega \mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée.
ii) Observons ensuite que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.17 de [2] (voir aussi le théorème 3.6 de [84]), puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe un unique potentiel $\mathbb{T}\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v} = \mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$. Ce procédé définit un opérateur continu $\mathbb{T} : \mathbf{V}_N(1;\,\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$.
⋆ `Propriété de positivité.` Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$, on calcule alors

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_\Omega = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi))_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega,$$

car $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Notons que nous avons également $(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$.
⋆ $\mathbb{T}$ `est un isomorphisme de` $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$. Reprenons l'opérateur champ électrique $\mathscr{A}_N(\omega) : \mathbf{V}_N(1;\,\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ défini en (9.8). L'identité précédente permet d'écrire

$$(\mathscr{A}_N(0)(\mathbb{T}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega).$$

Puisque $\partial\Omega$ est connexe, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ constitue un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$. Par conséquent, l'opérateur $\mathscr{A}_N(0)\circ\mathbb{T}$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$. Puisque $\mathscr{A}_N(0)$ est autoadjoint, nous déduisons que $\mathscr{A}_N(0)$ et $\mathbb{T}$ définissent des isomorphismes. ■

Nous déduisons la

Proposition 9.3.2 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée et $\varepsilon = 1$. Alors, le problème pour le champ électrique (9.6) possède une unique solution qui dépend continûment de la donnée $\boldsymbol{J}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.*

Preuve. D'après le Lemme 9.3.1, l'opérateur $\mathscr{A}_N(0)$, avec $\varepsilon = 1$, définit un isomorphisme lorsque l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ est vérifiée. Puisque $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathscr{A}_N(\omega)$ diffère de $\mathscr{A}_N(0)$ d'une perturbation compacte pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Le théorème de Fredholm analytique permet alors de conclure. ■

Remarque 9.3.3 *Tout ce que venons de faire dans ce paragraphe fonctionne également en remplaçant l'hypothèse « $\varepsilon = 1$ » par l'hypothèse « $\varepsilon \geq C > 0$ ». Pour traiter le cas d'un coefficient ε présentant un changement de signe, nous aurons besoin de supposer l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée pour pouvoir construire un opérateur $\mathbb{T}$ qui soit bien à valeurs dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et pour montrer que $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.*

9.3.2 Étude pour le champ magnétique avec une perméabilité $\mu = 1$

Étudions maintenant le problème pour le champ magnétique.

Lemme 9.3.4 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée. Alors, il existe un isomorphisme $\mathbb{T}$ de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que*

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega). \tag{9.13}$$

Preuve. La preuve est très similaire à celle du Lemme 9.3.1, les différences portant uniquement sur les conditions aux limites.
⋆ `Définition de` $\mathbb{T}$. Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$.
i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varepsilon \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' = \int_\Omega \varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée.
ii) Ensuite, remarquons que $\varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle. D'après le théorème 3.12 de [2], puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe un unique potentiel $\mathbb{T}\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v} = \varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$. Ceci définit un opérateur $\mathbb{T}$ continu de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$.
⋆ `Propriété de positivité.` Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$, on trouve

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi))_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega,$$

car $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. On a également $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$.
⋆ $\mathbb{T}$ `est un isomorphisme de` $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. Reprenons l'opérateur champ magnétique $\mathscr{A}_T(\omega)$: $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega) \to \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ défini en (9.11). Nous pouvons écrire

$$(\mathscr{A}_T(0)(\mathbb{T}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega). \tag{9.14}$$

Puisque Ω est simplement connexe, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. L'égalité (9.14) prouve donc que $\mathscr{A}_T(0) \circ \mathbb{T}$ est un isomorphisme. Puisque $\mathscr{A}_T(0)$ est autoadjoint, nous pouvons affirmer que $\mathscr{A}_T(0)$ et $\mathbb{T}$ constituent des isomorphismes de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. ■

En procédant comme pour la Proposition 9.3.2, on prouve la

Proposition 9.3.5 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée et $\mu = 1$. Alors, le problème pour le champ magnétique (9.10) possède une unique solution qui dépend continûment de la donnée $\boldsymbol{J}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.*

Remarque 9.3.6 *Comme dans la Remarque 9.3.3, indiquons que l'analyse que nous avons développée dans ce paragraphe est également valide en remplaçant l'hypothèse « $\mu = 1$ » par l'hypothèse « $\mu \geq C > 0$ ». Lorsque μ change de signe, il faut supposer l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée pour pouvoir construire un opérateur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ et pour prouver le résultat d'injection compacte de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.*

9.4 Résultats de compacité

Définissons les espaces, pour $\xi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_N(\xi;\,\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\};\\ \mathbf{X}_T(\xi;\,\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \xi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.\end{aligned}$$

Nous les munissons de la norme $\boldsymbol{u} \mapsto (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u})\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2)^{1/2}$. Dans ce paragraphe, nous prouvons que $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{X}_T(\mu;\,\Omega)$ s'injectent de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lorsque $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$ sont vérifiées, étendant ainsi les théorèmes classiques de [150, 117]. Ceci constitue un résultat un peu plus général que celui dont nous avons besoin pour notre étude, à savoir l'injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

9.4.1 Injection compacte de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Commençons par étudier l'espace des champs électriques.

Théorème 9.4.1 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée. Alors l'injection de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Définissons $f_n := \mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u}_n)$ et $\boldsymbol{F}_n := \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_n$. Les suites (f_n) et $(\boldsymbol{F}_n)$ sont respectivement bornées dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'après le Lemme 9.2.1, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mathrm{div}\,(\varepsilon\nabla\varphi_n) = \mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u}_n)$. La fonction $\varepsilon(\boldsymbol{u}_n - \nabla\varphi_n)$, élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, est à divergence nulle. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe (voir [2], théorème 3.12) un potentiel $\boldsymbol{w}_n$ appartenant à $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \varepsilon(\boldsymbol{u}_n - \nabla\varphi_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{u}_n = \nabla\varphi_n + \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n$. Montrons qu'on peut extraire de $(\nabla\varphi_n)$ et $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Le Lemme 9.2.1 assure que (φ_n) reste bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Puisque $\mathtt{T}^\varepsilon$ est continu de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, la suite $(\mathtt{T}^\varepsilon\varphi_n)$ est également bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Mais $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, on peut extraire de (φ_n) une sous-suite (toujours notée (φ_n)) telle que $(\mathtt{T}^\varepsilon\varphi_n)$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Introduisons $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$ et $f_{nm} = f_n - f_m$. Par linéarité, on a $-(\varepsilon\nabla\varphi_{nm}, \nabla\varphi')_\Omega = (f_{nm}, \varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. En choisissant $\varphi' = \mathtt{T}^\varepsilon\varphi_{nm}$, on obtient

$$C\ \|\varphi_{nm}\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}^2 \leq |(\varepsilon\nabla\varphi_{nm}, \nabla(\mathtt{T}^\varepsilon\varphi_{nm}))_\Omega| = |(f_{nm}, \mathtt{T}^\varepsilon\varphi_{nm})_\Omega|\,.$$

Ceci montre que la suite $(\nabla\varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc qu'elle converge.

Maintenant, travaillons sur la suite $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$. Nous savons que $\boldsymbol{w} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega$ définit une norme sur $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. Par conséquent, la suite $(\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ et nous pouvons en extraire

une sous-suite, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En vertu du Lemme 9.3.4, il existe un isomorphisme $\mathbb{T}$ de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que

$$\left|(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{w})_\Omega\right| = \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega^2\,, \qquad \forall \boldsymbol{w}\in\mathbf{V}_T(1;\,\Omega).$$

Comme $\mathbb{T}$ est continu, la suite $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. Ainsi, nous pouvons extraire de $(\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, telle que $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm}=\boldsymbol{w}_n-\boldsymbol{w}_m$ et $\boldsymbol{F}_{nm}=\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}_m$. Puisque $\mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n=\boldsymbol{F}_n$ dans Ω et $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)\times\boldsymbol{n}=0$ sur $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_\Omega=(\boldsymbol{F}_{nm},\boldsymbol{w}')_\Omega$ pour tout $\boldsymbol{w}'\in\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. En testant avec $\boldsymbol{w}'=\mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm}$, on trouve :

$$\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}\|_\Omega^2 = |(\boldsymbol{F}_{nm},\mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_\Omega|\,.$$

Par conséquent, la suite $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Elle converge donc. ■

Corollaire 9.4.2 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée. Alors il existe une constante C telle que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 \le C\;\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2\,, \qquad \forall \boldsymbol{u}\in\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega). \tag{9.15}$$

Ainsi, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u}\mapsto(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

Preuve. Pour prouver ce corollaire, il suffit de montrer l'estimation (9.15). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(\boldsymbol{u}_n)$ d'éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_n\|_\Omega=0.$$

D'après le Théorème 9.4.1 d'injection compacte, nous pouvons extraire de $(\boldsymbol{u}_n)$ une sous-suite (toujours notée $(\boldsymbol{u}_n)$) qui converge vers $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\boldsymbol{u}\|_\Omega=1$. On vérifie aisément que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ p.p. dans Ω. De plus, $\boldsymbol{u}_n$ appartient à $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)$ pour tout n et donc, $\boldsymbol{u}$ est un élément de $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)$. Puisque $\partial\Omega$ est simplement connexe, on déduit (cf. [45], théorème 8) qu'il existe un potentiel scalaire $\varphi\in\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{u}=\nabla\varphi$ dans Ω. Enfin, on remarque que $\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{u})=0$ et donc $\mathrm{div}\,(\varepsilon\nabla\varphi)=0$. Le Lemme 9.2.1 implique $\varphi=0$ et donc $\boldsymbol{u}=0$. Ceci conduit à une absurdité car on doit avoir $\|\boldsymbol{u}\|_\Omega=1$. ■

9.4.2 Injection compacte de $\mathbf{X}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Travaillons à présent sur l'espace des champs magnétiques.

Théorème 9.4.3 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée. Alors, l'injection de $\mathbf{X}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée d'éléments de $\mathbf{X}_T(\mu;\,\Omega)$. Définissons $f_n:=\mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{u}_n)$ et $\boldsymbol{F}_n:=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ tandis que $(\boldsymbol{F}_n)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, puisque $\int_\Omega \mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{u}_n)=\int_{\partial\Omega}\mu\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{n}=0$, le Lemme 9.2.5 permet de construire $\varphi_n\in\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que $\mathrm{div}\,(\mu\nabla\varphi_n)=\mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{u}_n)$. Remarquons ensuite que $\mu(\boldsymbol{u}_n-\nabla\varphi_n)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\boldsymbol{u}_n-\nabla\varphi_n)\cdot\boldsymbol{n}=0$ sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est simplement connexe, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un potentiel $\boldsymbol{w}_n\in\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n=\mu(\boldsymbol{u}_n-\nabla\varphi_n)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $\boldsymbol{u}_n=\nabla\varphi_n+\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n$.

On montre ensuite comme dans la preuve du Théorème 9.4.1, en utilisant l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$, qu'on peut extraire de $(\nabla\varphi_n)$ et $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

Comme précédemment, ce théorème permet d'obtenir le

Corollaire 9.4.4 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée. Alors, il existe une constante C telle que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 \leq C\ \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2\,, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \tag{9.16}$$

Ainsi, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

9.5 Caractère bien posé des problèmes initiaux

Nous étendons les résultats des Lemmes 9.3.1 et 9.3.4 pour pouvoir traiter le problème en champ électrique (resp. champ magnétique) lorsque ε (resp. μ) change de signe. Nous précisons ainsi la Remarque 9.3.3 (resp. Remarque 9.3.6).

Lemme 9.5.1 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons les hypothèses $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiées. Alors :*

- *Il existe un isomorphisme $\mathbb{T}^\varepsilon$ de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ tel que*

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{v})_\Omega = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega). \tag{9.17}$$

- *Il existe un isomorphisme $\mathbb{T}^\mu$ de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que*

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^\mu\boldsymbol{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^\mu\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \tag{9.18}$$

Preuve. Les premières étapes de construction des opérateurs $\mathbb{T}^\varepsilon$ et $\mathbb{T}^\mu$ vont être les mêmes que celles des Lemmes 9.3.1 et 9.3.4. Nous les rappelons néanmoins dans un souci de clarté. Bien sûr, pour obtenir des champs appartenant à $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ (au lieu de $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$), il va falloir rajouter une étape.

⋆ `Définition de` $\mathbb{T}^\varepsilon$. Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$.

i) Introduisons φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' = \int_\Omega \mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée.

ii) Remarquons ensuite que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel $\boldsymbol{\psi}$ appartenant à $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$.

iii) Considérons ζ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varepsilon\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta' = \int_\Omega \varepsilon\,\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla\zeta', \qquad \forall\zeta' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie puisque nous avons supposé $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée.

iv) Définissons enfin l'opérateur $\mathbb{T}^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ tel que $\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\psi} - \nabla\zeta$ pour $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$.

⋆ `Définition de` $\mathbb{T}^\mu$. Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.

i) Introduisons φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' = \int_\Omega \varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie puisque nous avons supposé $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée.
ii) Ensuite, observons que $\varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$ est dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, à divergence nulle. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, en vertu du théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \nabla\varphi)$.
iii) Considérons ζ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta' = \int_\Omega \mu\,\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla\zeta', \qquad \forall\zeta' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie car $(\mathscr{H}_\mu)$ est vérifiée.
iv) Définissons enfin l'opérateur $\mathbb{T}^\mu : \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ tel que $\mathbb{T}^\mu\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\psi} - \nabla\zeta$ pour $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$.

Un calcul simple conduit alors à (9.17) et (9.18). En procédant comme dans les Lemmes 9.3.1 et 9.3.4, en utilisant les Corollaires 9.4.2 et 9.4.4 qui prouvent que $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega$ constitue un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et sur $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, on montre *a posteriori* que $\mathbb{T}^\varepsilon$ et $\mathbb{T}^\mu$ définissent respectivement des isomorphismes de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. ■

Nous disposons à présent de tous les outils pour démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 9.5.2 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Effectuons les hypothèses $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$:*

$$(\mathscr{H}_\varepsilon) \quad \left|\begin{array}{l} \textit{Il existe un isomorphisme } \mathcal{T}^\varepsilon \textit{ de } \mathrm{H}^1_0(\Omega) \textit{ tel que} \\ |(\varepsilon\nabla\varphi,\nabla(\mathcal{T}^\varepsilon\varphi))_\Omega| \geq C\,\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}, \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array}\right.$$

$$(\mathscr{H}_\mu) \quad \left|\begin{array}{l} \textit{Il existe un isomorphisme } \mathcal{T}^\mu \textit{ de } \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \textit{ tel que} \\ |(\mu\nabla\varphi,\nabla(\mathcal{T}^\mu\varphi))_\Omega| \geq C\,\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1_\#(\Omega)}, \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega). \end{array}\right.$$

Alors on a les résultats suivants.

- *Il existe une unique solution au problème pour le champ électrique*

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = \; i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}', \qquad \forall\boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega), \end{array}\right. \tag{9.19}$$

qui dépend continûment de la donnée $\boldsymbol{J}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

- *Il existe une unique solution au problème pour le champ magnétique*

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}' - \omega^2\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}' = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}', \qquad \forall\boldsymbol{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega), \end{array}\right.$$

qui dépend continûment de la donnée $\boldsymbol{J}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$.

- *Les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$.*

Preuve. Commençons par le premier point. Le Lemme 9.5.1 assure qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{T}^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ tel que $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{v})_\Omega$ soit coercive sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \times \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Maintenant, puisque $\mathbb{T}^\varepsilon$ est un isomorphisme, le champ $\boldsymbol{E}$ vérifie (9.19) si et seulement si $\boldsymbol{E}$ satisfait le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,(\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{E}') - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot(\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{E}') = \; i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot(\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{E}'), \qquad \forall\boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega). \end{array}\right.$$

Or d'après le Théorème 9.4.1, l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, l'alternative de Fredholm est vérifiée pour ce problème. Le second point se montre de la même façon tandis que le troisième s'obtient à partir des Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7. ■

9.6 Illustrations

Nous appliquons le Théorème 9.5.2 dans quelques configurations simples. Nous nous intéressons à des situations pour lesquelles le milieu est constitué de deux matériaux différents. Pour modéliser ce problème, nous supposons Ω divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Notons $\Sigma := \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$. Introduisons ε_1 et μ_1 (resp. ε_2 et μ_2) deux éléments de $\mathrm{L}^\infty(\Omega_1)$ (resp. $\mathrm{L}^\infty(\Omega_2)$). Définissons les fonctions ε et μ telles que $\varepsilon|_{\Omega_k} = \varepsilon_k$ et $\mu|_{\Omega_k} = \mu_k$ pour $k = 1, 2$. Nous supposons Ω_1 occupé par un matériau positif usuel et Ω_2 rempli d'un matériau possiblement négatif (pour ε et/ou μ). Pour cela, nous effectuons les hypothèses suivantes :

- il existe une constante C telle que $\varepsilon_1 \geq C > 0$ et $\mu_1 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_1 ;
- il existe une constante C telle que $\varepsilon_2 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_2 ou $\varepsilon_2 \leq -C < 0$ p.p. dans Ω_2 ;
- il existe une constante C telle que $\mu_2 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_2 ou $\mu_2 \leq -C < 0$ p.p. dans Ω_2.

Sous ces hypothèses, on a $\varepsilon^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $\mu^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Définissons alors

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1, \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2|, \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2|, \qquad \text{pour } \sigma = \varepsilon, \mu.$$

De façon générale, si v est une fonction mesurable sur Ω, nous utilisons la notation $v_k := v|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$.

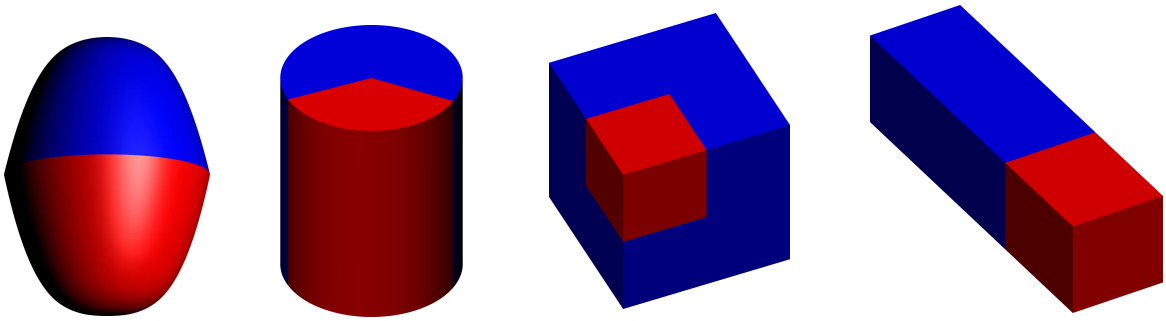


FIGURE 9.1 – Géométries canoniques : domaine symétrique, arête prismatique, coin de Fichera et cavité non symétrique.

9.6.1 Domaine symétrique

Soit Ω un domaine symétrique, au sens où Ω_1 est l'image de Ω_2 par une symétrie. Sans perte de généralité, nous supposons que l'interface Σ est incluse dans le plan $z = 0$ (voir la Figure 9.1, à gauche, pour un exemple). Considérons les opérateurs R_1 et R_2 respectivement définis par $(R_1\varphi_1)(x, y, z) = \varphi_1(x, y, -z)$ et $(R_2\varphi_2)(x, y, z) = \varphi_2(x, y, -z)$ pour $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Définissons les opérateurs $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ tels que :

$$\mathtt{T}_1\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\varphi_2 + 2R_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} ; \quad \mathtt{T}_2\varphi = \begin{cases} \varphi_1 - 2R_2\varphi_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\varphi_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} . \tag{9.20}$$

En remarquant que $\mathtt{T}_1 \circ \mathtt{T}_1 = \mathtt{T}_2 \circ \mathtt{T}_2 = \mathrm{Id}$, on déduit que $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ constituent des isomorphismes de $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Les restrictions $\mathtt{T}_1^\varepsilon$ et $\mathtt{T}_2^\varepsilon$ de $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ à $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ sont des isomorphismes de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
Introduisons la forme linéaire $\gamma : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(\varphi) = \int_\Omega \varphi / \int_\Omega 1$. Définissons alors les opérateurs $\mathtt{T}_1^\mu$ et $\mathtt{T}_2^\mu$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$, $\mathtt{T}_1^\mu\varphi = \mathtt{T}_1\varphi - \gamma(\mathtt{T}_1\varphi)$ et $\mathtt{T}_2^\mu\varphi = \mathtt{T}_2\varphi - \gamma(\mathtt{T}_2\varphi)$. Remarquons que $\mathtt{T}_1^\mu$ et $\mathtt{T}_2^\mu$ sont bien à valeurs dans $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathtt{T}_1^\mu(\mathtt{T}_1^\mu\varphi) &= \mathtt{T}_1^\mu(\mathtt{T}_1\varphi - \gamma(\mathtt{T}_1\varphi)) &&= \mathtt{T}_1(\mathtt{T}_1\varphi - \gamma(\mathtt{T}_1\varphi)) - \gamma(\mathtt{T}_1(\mathtt{T}_1\varphi - \gamma(\mathtt{T}_1\varphi))) \\ &&&= \varphi - \mathtt{T}_1(\gamma(\mathtt{T}_1\varphi)) - \gamma(\varphi - \mathtt{T}_1(\gamma(\mathtt{T}_1\varphi))) \\ &&&= \varphi - \mathtt{T}_1(\gamma(\mathtt{T}_1\varphi)) + \gamma(\mathtt{T}_1(\gamma(\mathtt{T}_1\varphi))) \;=\; \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathtt{T}_1^\mu \circ \mathtt{T}_1^\mu = \mathrm{Id}$. De même, on montre que $\mathtt{T}_2^\mu \circ \mathtt{T}_2^\mu = \mathrm{Id}$. Ceci prouve que $\mathtt{T}_1^\mu$ et $\mathtt{T}_2^\mu$ sont des isomorphismes de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$.

Proposition 9.6.1 *(Domaine symétrique)*
Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > 1$.
Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > 1$.
Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Preuve. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le Théorème 9.5.2. Pour vérifier les hypothèses $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$, on travaille avec $\mathtt{T}^\varepsilon$ et $\mathtt{T}^\mu$ comme dans les tableaux suivants.

Pour	$\varepsilon \geq C > 0$	$\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+ > 1$	$\varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+ > 1$
Prendre $\mathtt{T}^\varepsilon$ égal à	Id	$\mathtt{T}_1^\varepsilon$	$\mathtt{T}_2^\varepsilon$

Pour	$\mu \geq C > 0$	$\mu_1^-/\mu_2^+ > 1$	$\mu_2^-/\mu_1^+ > 1$
Prendre $\mathtt{T}^\mu$ égal à	Id	$\mathtt{T}_1^\mu$	$\mathtt{T}_2^\mu$

■

Lorsque ε et μ sont constantes de part et d'autre de l'interface, l'énoncé de la Proposition 9.6.1 se simplifie.

Proposition 9.6.2 *(Domaine symétrique : coefficients constants par morceaux)*
Supposons que ε_1, ε_2, μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons de plus $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\{-1\}$ et $\kappa_\mu := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\{-1\}$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6.2 Arête prismatique

Considérons la géométrie de la Figure 9.1, milieu-gauche. Introduisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) centrées sur l'arête et telles que les coordonnées cartésiennes vérifient $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Notons $H > 0$ la hauteur du cylindre, $R > 0$ son rayon. Pour $0 < \alpha < 2\pi$, définissons

$$\Omega_1 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ 0 < \theta < \alpha,\ 0 < z < H\}\ ;$$
$$\Omega_2 := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \,|\, 0 < r < R,\ \alpha < \theta < 2\pi,\ 0 < z < H\}\ .$$

Introduisons les deux opérateurs R_1 et R_2 tels que $(R_1\varphi_1)(r,\theta,z) = \varphi_1(r, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\theta - 2\pi), z)$ et $(R_2\varphi_2)(r,\theta,z) = \varphi_2(r, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\theta + 2\pi, z)$ pour $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.
En procédant comme pour le domaine symétrique, on obtient la

Proposition 9.6.3 *(Arête prismatique)*
Définissons $I_\alpha := \max(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}, \frac{2\pi-\alpha}{\alpha})$.
Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > I_\alpha$.
Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > I_\alpha$.
Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Proposition 9.6.4 *(Arête prismatique : coefficients constants par morceaux)*
Supposons que ε_1, ε_2, μ_1 et μ_2 soient des constantes. Définissons $I_\alpha := \max(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}, \frac{2\pi-\alpha}{\alpha})$. Supposons $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^*\backslash[-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ et $\kappa_\mu := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^*\backslash[-I_\alpha; -1/I_\alpha]$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6.3 Coin de Fichera

Considérons la géométrie de la Figure 9.1, milieu-droite. Plus précisément, définissons $\Omega :=]-1;1[^3$, avec $\Omega_1 :=]0;1[^3$, et $\Omega_2 := \Omega \backslash \overline{\Omega_1}$.

Introduisons les opérateurs R_1, R_2, tels que, pour $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$,

$$(R_1\varphi_1)(x,y,z) = \begin{cases} \varphi_1(-x,y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^1 :=]-1;0[\times]0;1[^2 \\ \varphi_1(x,-y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^2 :=]0;1[\times]-1;0[\times]0;1[\\ \varphi_1(x,y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^3 :=]0;1[^2\times]-1;0[\\ \varphi_1(-x,-y,z) & \text{dans} \quad \Omega_2^4 :=]-1;0[^2\times]0;1[\\ \varphi_1(-x,y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^5 :=]-1;0[\times]0;1[\times]-1;0[\\ \varphi_1(x,-y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^6 :=]0;1[\times]-1;0[^2 \\ \varphi_1(-x,-y,-z) & \text{dans} \quad \Omega_2^7 :=]-1;0[^3 \end{cases} ;$$

$$\begin{aligned}(R_2\varphi_2)(x,y,z) = \; & \varphi_2^1(-x,y,z) + \varphi_2^2(x,-y,z) + \varphi_2^3(x,y,-z) \\ & -\varphi_2^4(-x,-y,z) - \varphi_2^5(-x,y,-z) - \varphi_2^6(x,-y,-z) \\ & +\varphi_2^7(-x,-y,-z).\end{aligned}$$

Ci-dessus, pour $\ell = 1\dots7$, φ_2^ℓ désigne la restriction de φ_2 à Ω_2^ℓ.
De nouveau, en procédant comme pour le cas du domaine symétrique, on obtient la

Proposition 9.6.5 *(*COIN DE FICHERA*)*
Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > 7$.
Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > 7$.
Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Proposition 9.6.6 *(*COIN DE FICHERA : COEFFICIENTS CONSTANTS PAR MORCEAUX*)*
Supposons que ε_1, ε_2, μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^*\backslash[-7;-1/7]$ et $\kappa_\mu := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^*\backslash[-7;-1/7]$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6.4 Cavité non symétrique

Considérons la cavité non symétrique de la Figure 9.1. Plus précisément, définissons $\Omega := \{(x,y,z) \in]-a;b[\times]0;1[\times]0;1[\}$, $\Omega_1 :=]-a;0[\times]0;1[\times]0;1[$ et $\Omega_2 :=]0;b[\times]0;1[\times]0;1[$ avec $a > 0$ et $b > 0$. L'interface Σ est alors égale à $\{0\}\times]0;1[\times]0;1[$. Supposons que ε_1, ε_2, μ_1 et μ_2 soient des constantes. Nous définissons $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_2/\varepsilon_1$ et $\kappa_\mu := \mu_2/\mu_1$.

Rappelons que dans le §9.2.1, nous avons défini l'opérateur A^ε tel que, pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $(\nabla(A^\varepsilon\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = (\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega$ tandis que dans le §9.2.2, nous avons introduit l'opérateur A^μ tel que, pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$, $(\nabla(A^\mu\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega$. Pour cette géométrie particulière, nous savons (voir le Chapitre 1) que l'opérateur A^ε (resp. A^μ) est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_\varepsilon \neq -1$ (resp. $\kappa_\mu \neq -1$). Pour appliquer le Théorème 9.5.2, nous avons besoin que A^ε et A^μ soient des isomorphismes. Par conséquent, nous allons étudier la question de l'injectivité de A^ε et A^μ. Commençons par A^ε. Considérons φ un élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $A^\varepsilon\varphi = 0$. Le couple (φ_1, φ_2) vérifie les équations

$$\begin{array}{lllllll} \Delta\varphi_1 & = & 0 & \text{dans } \Omega_1; & \varphi_1 - \varphi_2 & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma; \\ \Delta\varphi_2 & = & 0 & \text{dans } \Omega_2; & \varepsilon_1\partial_x\varphi_1 - \varepsilon_2\partial_x\varphi_2 & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{array}$$

En décomposant φ_1 et φ_2 en série de Fourier (la famille $\{(y,z) \mapsto \sin(m\pi y)\sin(n\pi z)\}_{m,n=1}^{\infty}$ constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(]0;1[\times]0;1[)$), nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y,z) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_1^{mn} \sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi(x+a))\sin(m\pi y)\sin(n\pi z) \\ \text{et}\quad \varphi_2(x,y,z) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2^{mn} \sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi(x-b))\sin(m\pi y)\sin(n\pi z), \end{aligned}$$

où φ_1^{mn} et φ_2^{mn} sont des constantes. De plus, les conditions de transmission impliquent,

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \left| \begin{array}{ll} \varphi_1^{mn}\sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a) & = -\varphi_2^{mn}\sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b) \\ \varphi_1^{mn}\varepsilon_1\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a) & = \varphi_2^{mn}\varepsilon_2\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b) \end{array} \right. . \tag{9.21}$$

Pour chaque $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il existe une solution non triviale au système (9.21) (en $(\varphi_1^{mn}, \varphi_2^{mn})$) si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_2 \sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a)\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b) + \varepsilon_1 \sinh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b)\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a) \\ \Leftrightarrow\quad \kappa_\varepsilon &= -\frac{\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b)}{\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, A^ε constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ si et seulement si κ_ε n'est pas un élément de

$$\mathscr{K}_\varepsilon := \{-\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b)/\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a),\ (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}. \tag{9.22}$$

En procédant de la même façon, en remplaçant les « sin » par des « cos » et les « sinh » par des « cosh » pour satisfaire la condition de Neumann, on montre que A^μ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ si et seulement si κ_μ n'appartient pas à

$$\mathscr{K}_\mu := \{-\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi a)/\tanh(\sqrt{m^2+n^2}\pi b),\ (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}. \tag{9.23}$$

Remarque 9.6.7 *La fonction $g : z \mapsto -\tanh(z\pi b)/\tanh(z\pi a)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante si $a > b$ et strictement croissante si $a < b$. De plus, on a $\lim_{z\to+\infty} g(z) = -1$.*

Remarque 9.6.8 *Pour cette géométrie 3D particulière, on retrouve le résultat du Théorème 7.2.1 du Chapitre 7 pour les géométries 2D : le problème avec condition de Dirichlet pour le contraste κ_ε est bien posé si et seulement si le problème avec condition de Neumann est bien posé pour $\kappa_\mu = \kappa_\varepsilon^{-1}$.*

Nous déduisons la

Proposition 9.6.9 *(CAVITÉ NON SYMÉTRIQUE : COEFFICIENTS CONSTANTS PAR MORCEAUX) Supposons que ε_1, ε_2, μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\mathscr{K}_\varepsilon$ et $\kappa_\mu = \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\mathscr{K}_\mu$, avec $\mathscr{K}_\varepsilon$ et $\mathscr{K}_\mu$ définis respectivement en (9.22) et (9.23). Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.*

9.7 Extension : problèmes scalaires non injectifs

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit les formes bilinéaires a^ε et a^μ telles que

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\varphi,\varphi') &= (\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega, \qquad \forall \varphi,\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \\ a^\mu(\varphi,\varphi') &= (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega, \qquad \forall \varphi,\varphi' \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega). \end{aligned}$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, nous avons défini les opérateurs

$$\begin{array}{llll} & A^\varepsilon : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega) & \text{tel que} & (\nabla(A^\varepsilon\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = a^\varepsilon(\varphi,\varphi'), \quad \forall \varphi,\varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \\ \text{et} & A^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega) & \text{tel que} & (\nabla(A^\mu\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = a^\mu(\varphi,\varphi'), \quad \forall \varphi,\varphi' \in \mathrm{H}_\#^1(\Omega). \end{array}$$

Le Théorème 9.5.2 indique que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) sont bien posées au sens de Fredholm lorsque A^ε et A^μ définissent des isomorphismes. Dans cette section, nous souhaitons nous intéresser à des configurations pour lesquelles A^ε et A^μ sont des opérateurs Fredholm d'indice zéro *non injectifs*. Dans l'exemple de la cavité non symétrique décrit dans le §9.6.4, ceci correspond à considérer la situation où $\kappa_\varepsilon \in \mathscr{K}_\varepsilon \backslash \{-1\}$ et $\kappa_\mu \in \mathscr{K}_\mu \backslash \{-1\}$. Par souci de concision, nous nous concentrerons sur des cas pour lesquels A^ε et A^μ possèdent tous les deux un noyau non réduit à zéro. Lorsqu'un seul des opérateurs n'est pas injectif, la méthode à utiliser pour étudier les équations de Maxwell se déduit facilement de la démarche que nous allons présenter.

Supposons donc que la géométrie et les paramètres physiques ε, μ soient tels que $A^\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $A^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ constituent des opérateurs Fredholm d'indice zéro non injectifs. Introduisons $\{\lambda^\varepsilon_i\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$ une base de $\ker A^\varepsilon$ telle que $(\nabla\lambda^\varepsilon_i, \nabla\lambda^\varepsilon_j)_\Omega = \delta_{ij}$ et $\{\lambda^\mu_i\}_{i=1}^{N^\mu}$ une base de $\ker A^\mu$ telle que $(\nabla\lambda^\mu_i, \nabla\lambda^\mu_j)_\Omega = \delta_{ij}$. Définissons les espaces S^ε et S^μ tels que

$$\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \ker A^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}^\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^1_\#(\Omega) = \ker A^\mu \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}^\mu.$$

Considérons les formes bilinéaires $\tilde{a}^\varepsilon$ et $\tilde{a}^\mu$ telles que

$$\begin{array}{rcll} \tilde{a}^\varepsilon(\varphi, \varphi') & = & (\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega, & \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{S}^\varepsilon, \\ \tilde{a}^\mu(\varphi, \varphi') & = & (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega, & \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{S}^\mu. \end{array}$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons les opérateurs

$$\begin{array}{rllll} & \tilde{A}^\varepsilon : \mathrm{S}^\varepsilon \to \mathrm{S}^\varepsilon & \text{tel que} & (\nabla(\tilde{A}^\varepsilon\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = \tilde{a}^\varepsilon(\varphi, \varphi'), & \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{S}^\varepsilon, \\ \text{et} & \tilde{A}^\mu : \mathrm{S}^\mu \to \mathrm{S}^\mu & \text{tel que} & (\nabla(\tilde{A}^\mu\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = \tilde{a}^\mu(\varphi, \varphi'), & \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{S}^\mu. \end{array}$$

Classiquement (voir [116]), on a la

Proposition 9.7.1 *Les opérateurs $\tilde{A}^\varepsilon : \mathrm{S}^\varepsilon \to \mathrm{S}^\varepsilon$ et $\tilde{A}^\mu : \mathrm{S}^\mu \to \mathrm{S}^\mu$ définissent des isomorphismes.*

À présent, remarquons que pour $i = 1 \dots N^\varepsilon$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\nabla\lambda^\varepsilon_i$ satisfait le problème homogène pour le champ électrique (9.6) posé dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ *mais pas* le problème homogène (9.3) posé dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,; \Omega)$. De même, pour $i = 1 \dots N^\mu$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\nabla\lambda^\mu_i$ vérifie le problème homogène pour le champ magnétique (9.10) posé dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ *mais pas* le problème homogène (9.4) posé dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,; \Omega)$. Par conséquent, les Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7 ne sont manifestement plus valides lorsque $\tilde{A}^\varepsilon$ et $\tilde{A}^\mu$ possèdent un noyau non réduit à zéro.

Cette observation importante nous encourage à écrire des formulations des équations de Maxwell dans des espaces différents de $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. De façon peut-être contre intuitive, pour éliminer les noyaux $\mathrm{vect}(\nabla\lambda^\varepsilon_1, \dots, \nabla\lambda^\varepsilon_{N^\varepsilon})$ et $\mathrm{vect}(\nabla\lambda^\mu_1, \dots, \nabla\lambda^\mu_{N^\mu})$ des formulations posées respectivement dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, nous allons enrichir les espaces variationnels. La démarche inverse, consistant à travailler dans des espaces plus restreints, dans lesquels on aurait éliminer $\mathrm{vect}(\nabla\lambda^\varepsilon_1, \dots, \nabla\lambda^\varepsilon_{N^\varepsilon})$ et $\mathrm{vect}(\nabla\lambda^\mu_1, \dots, \nabla\lambda^\mu_{N^\mu})$, semble poser problème pour prouver un résultat d'équivalence avec les équations de Maxwell initiales. Introduisons

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,; \Omega) \,|\, (\varepsilon\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \ \forall \varphi \in \mathrm{S}^\varepsilon\}\,; \\ \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,; \Omega) \,|\, (\mu\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \ \forall \varphi \in \mathrm{S}^\mu\}\,. \end{array}$$

Notons qu'on a $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$. Précisons le lien entre ces espaces avec les lemmes suivants.

Lemme 9.7.2 *Pour $i = 1 \dots N^\varepsilon$, il existe $\boldsymbol{\Lambda}^\varepsilon_i \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ tel que $(\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}^\varepsilon_i, \nabla\lambda^\varepsilon_j)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1 \dots N^\varepsilon$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) = \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \oplus \mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda}^\varepsilon_i)_{i=1}^{N^\varepsilon}.$$

Preuve. Pour $j = 1 \dots N^\varepsilon$, introduisons la forme linéaire ℓ_j sur $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ définie par $\ell_j(\boldsymbol{v}) = (\varepsilon\boldsymbol{v}, \nabla\lambda_j^\varepsilon)_\Omega$. Montrons que la famille $\ell_1, \dots, \ell_{N^\varepsilon}$ est libre. Donnons-nous N^ε constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{N^\varepsilon}$ telles que $\sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \overline{\alpha_j}\ell_j = 0$. Dans ce cas, pour tout $\boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$, on a $(\varepsilon\boldsymbol{v}, \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \alpha_j \nabla\lambda_j^\varepsilon)_\Omega = 0$. Ceci implique $(\varepsilon\boldsymbol{w}, \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \alpha_j \nabla\lambda_j^\varepsilon)_\Omega = 0$ pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$. Pour le voir, pour $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, introduisons $\varphi \in \mathrm{S}^\varepsilon$ la fonction telle que $(\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\varepsilon\boldsymbol{w}, \nabla\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{S}^\varepsilon$. On a $\boldsymbol{w} - \nabla\varphi \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Puisque $(\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\lambda_j^\varepsilon)_\Omega = 0$, $j = 1 \dots N^\varepsilon$, on obtient bien $(\varepsilon\boldsymbol{w}, \sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \alpha_j \nabla\lambda_j^\varepsilon)_\Omega = 0$.

En utilisant la densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on déduit $\sum_{j=1}^{N^\varepsilon} \overline{\alpha_j}\nabla\lambda_j^\varepsilon = 0$. Puisque la famille $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_{N^\varepsilon}^\varepsilon$ constitue une base de $\ker A^\varepsilon$, on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_{N^\varepsilon} = 0$. Ceci achève de montrer que $\ell_1, \dots, \ell_{N^\varepsilon}$ est libre. En utilisant le Théorème 7.3.5 de base antéduale du Chapitre 7, on obtient le résultat du lemme. ■

En procédant de la même façon, on prouve le

Lemme 9.7.3 *Pour $i = 1 \dots N^\mu$, il existe $\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$ tel que $(\mu\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu, \nabla\lambda_j^\mu)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1 \dots N^\mu$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega) = \mathbf{V}_T(\varepsilon;\Omega) \oplus \mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu)_{i=1}^{N^\mu}.$$

9.7.1 Problèmes scalaires non injectifs : formulations équivalentes

Maintenant, nous pouvons donner des formulations équivalentes au problème (9.1)-(9.2) dans les espaces $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$.

Théorème 9.7.4 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons l'opérateur $A^\varepsilon : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro* $\mathrm{vect}\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$.
1) Si $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ vérifie (9.1)-(9.2) alors $\boldsymbol{E}$ est une solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = \ i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}', \qquad \forall \boldsymbol{E}' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega). \end{array}\right. \tag{9.24}$$

2) Si $\boldsymbol{E}$ satisfait (9.24) alors $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ est solution de (9.1)-(9.2).

Preuve. Concentrons-nous sur la preuve 2) $\Rightarrow$ 1). Montrons que si $\boldsymbol{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ satisfait (9.24) alors $\boldsymbol{E}$ est une solution du problème (9.7) posé dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$. Pour tout $\boldsymbol{E}'$ dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, la Proposition 9.7.1 indique qu'on peut construire $\varphi \in \mathrm{S}^\varepsilon$ tel que $\tilde{a}^\varepsilon(\varphi, \varphi') = (\varepsilon\boldsymbol{E}', \nabla\varphi')_\Omega$, pour tout $\varphi' \in \mathrm{S}^\varepsilon$. La fonction $\boldsymbol{E}' - \nabla\varphi$ appartient à $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. En remarquant que $(\varepsilon\boldsymbol{E}, \nabla\varphi)_\Omega = 0$ et $(\boldsymbol{J}, \nabla\varphi)_\Omega = 0$ (rappelons que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$), on obtient

$$\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}' - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' = \ i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}',$$

ce qui prouve que $\boldsymbol{E}$ vérifie (9.7). Par conséquent, si le champ $\boldsymbol{E}$ satisfait (9.24) alors $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie (9.1)-(9.2). ■

En adaptant la preuve du Théorème 9.7.4, on obtient le

Théorème 9.7.5 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons l'opérateur $A^\mu : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro* $\mathrm{vect}\{\lambda_i^\mu\}_{i=1}^{N^\mu}$.
1) Si $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ vérifie (9.1)-(9.2) alors $\boldsymbol{H}$ est une solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Trouver } \boldsymbol{H} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}' - \omega^2\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}' = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}', \qquad \forall \boldsymbol{H}' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega). \end{array}\right. \tag{9.25}$$

2) Si $\boldsymbol{H}$ satisfait (9.25) alors $(i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}), \boldsymbol{H})$ est solution de (9.1)-(9.2).

À présent, nous souhaitons étudier les formulations (9.24) et (9.25). Nous avons pour cela besoin de nouveaux résultats de compacité.

9.7.2 Problèmes scalaires non injectifs : résultats de compacité

Commençons par démontrer le résultat de compacité nécessaire à l'étude du problème pour le champ électrique.

Théorème 9.7.6 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'opérateur $A^\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro* $\mathrm{vect}\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$. *Alors l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 9.7.2, définissons $\boldsymbol{v}_n \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $(\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{N^\varepsilon n}) \in \mathbb{C}^{N^\varepsilon}$ les éléments tels que $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n + \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \alpha_{in}\boldsymbol{\Lambda}_i^\varepsilon$. Pour montrer le Théorème 9.7.6, il suffit de prouver qu'on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\boldsymbol{F}_n = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_n$. La suite $(\boldsymbol{F}_n)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{div}\,(\varepsilon\boldsymbol{v}_n) = 0$. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe (voir [2], théorème 3.12) $\boldsymbol{w}_n \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \varepsilon\boldsymbol{v}_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{v}_n = \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n$. Montrons qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Nous savons que $\boldsymbol{w} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega$ définit une norme sur $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. Par conséquent, la suite $(\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. Puisque $\mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n$ dans Ω et $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n) \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_\Omega = (\boldsymbol{F}_n, \boldsymbol{w}')_\Omega$ pour tout $\boldsymbol{w}' \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$.
Maintenant, construisons un opérateur continu $\mathbb{T}$ de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ pour restaurer une certaine positivité. Considérons $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$.
i) Définissons d'abord φ l'unique élément de S^ε tel que

$$\int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' = \int_\Omega \varepsilon\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\varepsilon) \cdot \nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{S}^\varepsilon,$$

où $\beta_i = (\varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \nabla\lambda_i^\varepsilon)_\Omega$. La fonction φ est bien définie car $\tilde{A}^\varepsilon$ définit un isomorphisme de S^ε.
ii) Remarquons ensuite que $\varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\varepsilon - \nabla\varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\mathbb{T}\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{w} = \varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\varepsilon - \nabla\varphi)$. Ceci définit un opérateur $\mathbb{T}$ continu de $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$.
Puisque $\mathbb{T}$ est continu, la suite $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite de $(\boldsymbol{w}_n)$, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, telle que $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i = 1 \ldots N^\varepsilon$, la suite (β_{in}), avec $\beta_{in} = (\varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n, \nabla\lambda_i^\varepsilon)$, est bornée dans $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite de $(\boldsymbol{w}_n)$, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, telle que (β_{in}) converge. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm} := \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}_m$, $\boldsymbol{F}_{nm} := \boldsymbol{F}_n - \boldsymbol{F}_m$ et $\beta_{inm} := \beta_{in} - \beta_{im}$. On a

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{F}_{nm},\, \mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_\Omega| &= |(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_\Omega| \\ &\geq \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}\|_\Omega^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} |\beta_{inm}||(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \boldsymbol{\Lambda}_i^\varepsilon)_\Omega|. \end{aligned}$$

Cette estimation montre que $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ constitue une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, elle converge. Ainsi, on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n) = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

En travaillant de la même manière, on prouve le

Théorème 9.7.7 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'opérateur $A^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro* $\mathrm{vect}\{\lambda_i^\mu\}_{i=1}^{N^\mu}$. *Alors l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

9.7.3 Problèmes scalaires non injectifs : retour aux problèmes initiaux

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs bornés $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$: $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} &= (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}')_\Omega - \omega^2(\varepsilon\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_\Omega, \qquad \forall\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega), \\ (\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} &= (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_\Omega - \omega^2(\mu\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_\Omega, \qquad \forall\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega). \end{aligned}$$

Énonçons maintenant le résultat principal lorsque la géométrie et les coefficients physiques ε, μ sont tels que les problèmes scalaires sont bien posés au sens de Fredholm avec un noyau non réduit à zéro.

Théorème 9.7.8 *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Considérons $\boldsymbol{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que* $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$.
Supposons l'opérateur $A^\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ Fredholm avec un noyau non trivial $\operatorname{vect}\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$.
Supposons l'opérateur $A^\mu : \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \to \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ Fredholm avec un noyau non trivial $\operatorname{vect}\{\lambda_i^\mu\}_{i=1}^{N^\mu}$.
Alors on a le résultat suivant.

- *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\boldsymbol{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ satisfait $(\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} = i\omega(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}')_\Omega$, pour tout $\boldsymbol{E}' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, si et seulement si le couple $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).*
- *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\boldsymbol{H} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ satisfait $(\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_\Omega$, pour tout $\boldsymbol{H}' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, si et seulement si le couple $(i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}), \boldsymbol{H})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).*

Preuve. Prouvons que $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, en utilisant le Théorème 9.7.6, on prouve que $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega) - \tilde{\mathscr{A}}_N(0)$ constitue un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Par conséquent, d'après [116, théorème 2.26], $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$ est Fredholm d'indice zéro si seulement si $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. Dans la suite de la preuve, nous travaillons sur l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$. Nous allons construire un opérateur continu $\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ pour recouvrer une certaine positivité, à une perturbation compacte près. Considérons $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$.
i) Définissons d'abord φ l'unique élément de S^μ tel que

$$\int_\Omega \mu\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' = \int_\Omega \mu\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^\mu}\beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu)\cdot\nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{S}^\mu,$$

où $\beta_i = (\mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \nabla\lambda_i^\mu)_\Omega$. La fonction φ est bien définie puisque $\tilde{A}^\mu$ est un isomorphisme de S^μ.
ii) Remarquons ensuite que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^\mu}\beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu - \nabla\varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^\mu}\beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu - \nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, en vertu du théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^\mu}\beta_i\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu - \nabla\varphi)$.
iii) Considérons ζ l'unique élément de S^ε tel que

$$\int_\Omega \varepsilon\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta' = \int_\Omega \varepsilon\,\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla\zeta', \qquad \forall\zeta' \in \mathrm{S}^\varepsilon.$$

La fonction ζ est bien définie puisque $\tilde{A}^\varepsilon$ est un isomorphisme de S^ε.
iv) Enfin, définissons l'opérateur $\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ fait correspondre $\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi} - \nabla\zeta$ ainsi que l'opérateur $\tilde{K}^\varepsilon : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ tel que

$$(\tilde{K}^\varepsilon\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega + \sum_{i=1}^{N^\mu}(\mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \nabla\lambda_i^\mu)_\Omega(\boldsymbol{\Lambda}_i^\mu, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall\boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega).$$

D'après le Théorème 9.7.6, nous savons que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, $\tilde{K}^\varepsilon$ est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang fini. C'est donc un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Maintenant, pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathscr{A}}_N(0)(\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} &= (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,(\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon\boldsymbol{u}), \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ &= (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega - (\tilde{K}^\varepsilon\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}}\,.\end{aligned}$$

Nous déduisons $\tilde{\mathscr{A}}_T(0) \circ \tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon + \tilde{K}^\varepsilon = \mathrm{Id}$. Ceci prouve que $\tilde{\mathbb{T}}^\varepsilon$ constitue une paramétrix à droite pour $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$. Par conséquent, l'opérateur autoadjoint $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$ est bien Fredholm d'indice zéro. On montre de la même façon que $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Finalement, l'équivalence avec les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) provient des Théorèmes 9.7.4 et 9.7.5. ■

Remarque 9.7.9 *Pour appliquer le théorème de Fredholm analytique et prouver que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible, il reste à montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$ ou $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)$ est inversible. Ceci ne semble pas évident à démontrer.*

9.8 Extension : géométries non triviales

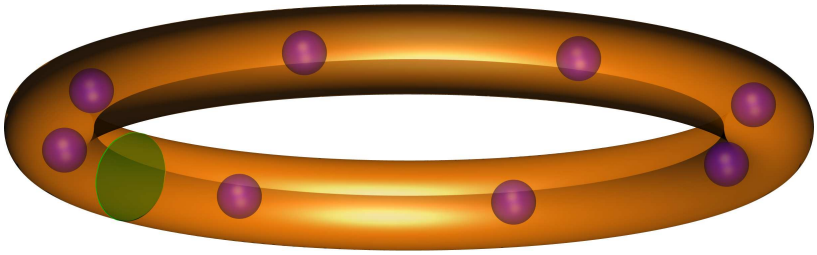


FIGURE 9.2 – Un exemple de domaine non simplement connexe à frontière non connexe. Le domaine est constitué du tore privé des inclusions violettes. Il est non simplement connexe en raison de la structure toroïdale. Il est à frontière non connexe car les frontières du tore et des sphères sont disjointes. Le disque vert représente une coupure Σ_1 telle que $\Omega \setminus \Sigma_1$ constitue un domaine simplement connexe.

Pour les applications, l'on est souvent conduit à étudier les équations de Maxwell dans des géométries non topologiquement triviales et des domaines à frontière non connexe. Dans cette section, nous souhaitons étendre les résultats que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents pour pouvoir traiter ce genre de configurations. Pour éviter de multiplier les sous-cas, nous travaillons directement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ à la fois non simplement connexe et à frontière non connexe. La Figure 9.2 présente un exemple de domaine possédant ces propriétés. Dans ces géométries, les éléments $\boldsymbol{u}$ de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ (resp. $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$) ne s'écrivent pas nécessairement sous la forme $\boldsymbol{u} = \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ (resp. $\boldsymbol{u} = \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$) où $\boldsymbol{\psi}$ appartient à $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ (resp. $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$). C'est un problème car l'étude que nous avons menée précédemment repose de façon fondamentale sur ces propositions qui sont vraies lorsque Ω est simplement connexe à frontière connexe. Tout n'est pas perdu pour autant. En effet, en imposant des conditions un peu plus restrictives aux éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, on peut retrouver ces résultats d'existence de potentiels.
Pour introduire les espaces adaptés à l'étude des équations de Maxwell dans ce type de domaines, reprenons les notations de [2].

Notations liées au caractère non connexe de la frontière

Nous notons Γ_i, $i = 0 \dots I$, les composantes connexes de la frontière $\partial\Omega$. Puisque nous supposons $\partial\Omega$ non connexe, nous avons $I \geq 1$. Introduisons

$$\mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) := \left\{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, \varphi_{|\Gamma_0} = 0,\ \varphi_{|\Gamma_i} = cste,\ i = 1 \dots I\right\}.$$

Commençons par caractériser cet espace. En utilisant un relèvement, on montre sans difficulté la

Proposition 9.8.1 *Supposons l'hypothèse* $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ *vérifiée. Alors pour* $i = 1 \dots I$*, il existe une unique solution* p_i *au problème*

$$\left|\begin{array}{lcll} \textit{Trouver } p_i \in \mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) \textit{ tel que :} & & & \\ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla p_i) & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ p_i & = & \delta_{ik} & \textit{sur } \Gamma_k,\ k = 1 \dots I. \end{array}\right.$$

On a alors

$$\mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) = \mathrm{H}^1_0(\Omega) \oplus \operatorname{vect}(p_i)_{i=1}^I.$$

Définissons

$$\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\, \Omega) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\, \Omega) \,|\, (\varepsilon \boldsymbol{u}, \nabla \varphi)_\Omega = 0,\ \forall \varphi \in \mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) \right\}.$$

Remarquons qu'on a $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\, \Omega) \subset \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$. Précisons le lien entre ces deux espaces.

Lemme 9.8.2 *Pour* $i = 1 \dots I$*, il existe* $\boldsymbol{P}_i \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ *tel que* $(\varepsilon \boldsymbol{P}_i, \nabla p_k)_\Omega = \delta_{ik}$*, pour* $k = 1 \dots I$*. On déduit*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\, \Omega) \oplus \operatorname{vect}(\boldsymbol{P}_i)_{i=1}^I \\ \textit{et} & \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\, \Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\, \Omega) \oplus \operatorname{vect}(\boldsymbol{P}_i)_{i=1}^I \oplus \nabla \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array}$$

Preuve. Pour $k = 1 \dots I$, définissons la forme linéaire ℓ_k sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$ telle que $\ell_k(\boldsymbol{v}) = (\varepsilon \boldsymbol{v}, \nabla p_k)_\Omega$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$. Montrons que la famille $\ell_1, \dots, \ell_I$ est libre. Considérons I constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_I$ telles que $\sum_{k=1}^I \overline{\alpha_k} \ell_k = 0$. Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$, on a $(\varepsilon \boldsymbol{v}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_\Omega = 0$. On déduit $(\varepsilon \boldsymbol{w}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_\Omega = 0$ pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\, \Omega)$. En effet, si $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\, \Omega)$, définissons $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ la fonction telle que $(\varepsilon \nabla \varphi, \nabla \varphi')_\Omega = (\varepsilon \boldsymbol{w}, \nabla \varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. On a $\boldsymbol{w} - \nabla \varphi \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\, \Omega)$. Puisque $(\varepsilon \nabla \varphi, \nabla p_k)_\Omega = 0$, $k = 1 \dots I$, on trouve bien $(\varepsilon \boldsymbol{w}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_\Omega = 0$.

Puisque $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\, \Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on obtient $\sum_{k=1}^I \overline{\alpha_k} \nabla p_k = 0$. Mais la famille $p_1, \dots, p_I$ est libre. Par conséquent, on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0$ et la famille $\ell_1, \dots, \ell_I$ est également libre. Le Théorème 7.3.5 de base antéduale du Chapitre 7 conduit alors au résultat de ce lemme. ■

Notations liées au caractère non simplement connexe du domaine

En ce qui concerne le caractère non simplement connexe du domaine, nous supposerons qu'il existe des surfaces ouvertes connexes Σ_j, $j = 1 \dots J$ appelées « coupures » telles que :

i) chaque surface Σ_j est une partie ouverte d'une variété régulière ;
ii) la frontière de Σ_j est contenue dans $\partial\Omega$, $j = 1 \dots J$;
iii) l'intersection $\overline{\Sigma_j} \cap \overline{\Sigma_k}$ est vide pour $j \neq k$;
iv) l'ensemble ouvert $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^J \Sigma_j$ est pseudo-lipschitzien et simplement connexe.

Le domaine Ω est dit topologiquement trivial quand on peut prendre $J = 0$. L'opérateur de prolongement de $\mathrm{L}^2(\dot{\Omega})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est noté $\widetilde{\cdot}$ tandis que $[\cdot]_{\Sigma_j}$ désigne le saut à travers Σ_j, $j = 1 \dots J$. Dans cette définition du saut, nous supposons qu'une convention a été déterminée pour le signe. Nous supposons également qu'un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ normal à $\partial\dot{\Omega}$ a été fixé sur Σ_j, $j = 1 \dots J$. Introduisons l'espace des potentiels scalaires

$$\Theta(\dot{\Omega}) := \left\{ \varphi \in \mathrm{H}^1(\dot{\Omega}) \,|\, \int_\Omega \widetilde{\varphi} = 0 \text{ et } [\varphi]_{\Sigma_j} = cste,\ j = 1 \dots J \right\}.$$

Présentons un résultat de décomposition de cet espace.

Proposition 9.8.3 *Supposons l'hypothèse* $(\mathscr{H}_\mu)$ *vérifiée. Alors pour* $j = 1 \dots J$*, il existe une unique solution* q_j *au problème*

$$\left|\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{l}{\textit{Trouver } q_j \in \Theta(\dot\Omega) \textit{ tel que :}} \\ \operatorname{div}(\mu\nabla q_j) & = & 0 & \textit{dans } \dot\Omega \\ \mu\partial_{\boldsymbol{n}} q_j & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega \\ [q_j]_{\Sigma_k} & = & \delta_{jk}, & k = 1\dots J \\ [\mu\partial_{\boldsymbol{n}} q_j]_{\Sigma_k} & = & 0, & k = 1\dots J. \end{array}\right. \tag{9.26}$$

On a alors

$$\Theta(\dot\Omega) = \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \oplus \operatorname{vect}(q_j)_{j=1}^J.$$

Preuve. Puisque nous avons supposé l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée, le problème (9.26) possède au plus une solution. Construisons cette solution. Pour $1 \le j \le J$, donnons-nous une fonction $r_j \in \Theta(\dot\Omega)$ telle que $[r_j]_{\Sigma_k} = \delta_{jk}$ pour $k = 1\dots J$. Définissons alors $q_j = r_j - \varphi$ où φ est l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' = \int_\Omega \mu\widetilde{\nabla r_j}\cdot\nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega).$$

On vérifie classiquement que q_j vérifie le problème (9.26). Ceci permet d'obtenir le résultat de décomposition de l'espace $\Theta(\dot\Omega)$. ■

Introduisons

$$\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) := \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \,|\, (\varepsilon\boldsymbol{u}, \widetilde{\nabla\varphi})_\Omega = 0,\ \forall\varphi \in \Theta(\dot\Omega)\right\}.$$

Observons qu'on a $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \subset \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En travaillant comme dans la preuve du Lemme 9.8.2, nous pouvons préciser la relation entre ces deux espaces.

Lemme 9.8.4 *Pour* $j = 1\dots J$*, il existe* $\boldsymbol{Q}_j \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ *tel que* $(\mu\boldsymbol{Q}_j, \widetilde{\nabla q_k})_\Omega = \delta_{jk}$*, pour* $k = 1\dots J$*. On déduit*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \oplus \operatorname{vect}(\boldsymbol{Q}_j)_{j=1}^J \\ \textit{et} & \mathbf{H}(\mathbf{rot};\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \oplus \operatorname{vect}(\boldsymbol{Q}_j)_{j=1}^J \oplus \nabla\mathrm{H}^1_\#(\Omega). \end{array}$$

Remarque 9.8.5 *Le théorème 3.12 de [2] indique que tout élément* $\boldsymbol{u}$ *de* $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $\boldsymbol{u} = \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ *avec* $\boldsymbol{\psi}$ *appartenant à* $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$*. De façon analogue, le théorème 3.17 de [2] assure que pour tout* $\boldsymbol{u} \in \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$*, il existe un unique* $\boldsymbol{\psi} \in \hat{\mathbf{V}}_N(1;\,\Omega)$ *tel que* $\boldsymbol{u} = \mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$*. Dans la suite, nous allons adapter les preuves des sections précédentes en utilisant ces résultats d'existence de potentiels vecteurs.*

Supposons les hypothèses $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiées. Remarquons que les Théorèmes 9.2.3, 9.2.7 d'équivalence entre les équations de Maxwell initiales et les formulations dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ ne nécessitent pas d'hypothèse sur la topologie du domaine. Ils sont donc vrais pour la géométrie que nous sommes en train de considérer. Dans la suite, nous travaillerons avec ces formulations dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Nous aurons besoin de prouver les résultats de compacité des Théorèmes 9.4.1, 9.4.3 dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe à frontière non connexe. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Remarque 9.8.6 *Est-il possible de travailler avec des formulations posées dans* $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$*,* $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ *? A priori, le champ électrique solution des équations de Maxwell n'a pas de raison d'appartenir à l'espace* $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$*. Pour le voir, utilisons le Lemme 9.8.2 et décomposons* $\boldsymbol{E}$ *sous la forme*

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{E}} + \sum_{i=1}^I \alpha_i \boldsymbol{P}_i,$$

avec $\hat{\boldsymbol{E}} \in \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ *et* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_I) \in \mathbb{C}^I$. *Pour* $i = 1\ldots I$, *en testant avec* ∇p_i *dans (9.6), on trouve*

$$\alpha_i = (\varepsilon \boldsymbol{E}, \nabla p_i)_\Omega = (i\omega)^{-1}(\boldsymbol{J}, \nabla p_i)_\Omega = (i\omega)^{-1}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}, 1)_{\Gamma_i}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé les propriétés $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0$ *dans* Ω *et* $p_i = \delta_{ik}$ *sur* Γ_k, $k = 1\ldots I$. *Ainsi, s'il existe* $0 \le i \le I$ *tel que* $(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}, 1)_{\Gamma_i} \neq 0$, *alors* $\boldsymbol{E}$ *n'appartient pas à* $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. *Mais ceci montre aussi que pour connaître le champ* $\boldsymbol{E}$, *il suffit de déterminer* $\hat{\boldsymbol{E}}$. *En suivant le même raisonnement, on vérifie que le champ magnétique constitue toujours un élément de* $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$, *indépendamment du terme source* $\boldsymbol{J}$. *Cependant, il ne semble pas évident qu'on puisse écrire des formulations dans* $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$, $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)$ *équivalentes aux équations de Maxwell initiales. Nous n'approfondirons donc pas cette piste.*

9.8.1 Géométries non triviales : résultats de compacité

Travaillons d'abord sur l'espace des champs électriques.

Théorème 9.8.7 *Soit* Ω *un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Supposons l'hypothèse* $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ *vérifiée. Alors l'injection de* $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *est compacte.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{u}_n)$ une suite bornée de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 9.8.2, définissons $\boldsymbol{v}_n \in \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega)$ et $(\alpha_{1n},\ldots,\alpha_{In}) \in \mathbb{C}^I$ les éléments tels que $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n + \sum_{i=1}^I \alpha_{in}\boldsymbol{P}_i$. Pour montrer le Théorème 9.8.7, il suffit de prouver qu'on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\boldsymbol{F}_n = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_n$. La suite $(\boldsymbol{F}_n)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\varepsilon\boldsymbol{v}_n, \nabla\varphi)_\Omega = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega)$. D'après le théorème 3.12 de [2], il existe donc $\boldsymbol{w}_n \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \varepsilon\boldsymbol{v}_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{v}_n = \varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n$. Montrons qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Nous savons que $\boldsymbol{w} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega$ définit une norme sur $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ (cf. [2, corollaire 3.16]). Par conséquent, la suite $(\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$. Puisque $\mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n$ dans Ω et $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)\times\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_\Omega = (\boldsymbol{F}_n, \boldsymbol{w}')_\Omega$ pour tout $\boldsymbol{w}' \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$. Maintenant, construisons un opérateur continu $\hat{\mathbb{T}}$ de $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ pour restaurer une certaine positivité. Considérons $\boldsymbol{w} \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$.
i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' = \int_\Omega \varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\cdot\nabla\varphi', \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée.
ii) Définissant $\beta_i := (\varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \nabla p_i)_\Omega$ pour $i = 1\ldots I$, remarquons ensuite qu'on a $(\varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^I \beta_i\boldsymbol{P}_i - \nabla\varphi), \nabla\varphi')_\Omega = 0$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega)$. Par conséquent, d'après le théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w} \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w} = \varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^I \beta_i\boldsymbol{P}_i - \nabla\varphi)$. Ceci définit un opérateur $\hat{\mathbb{T}}$ continu de $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$ dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$.
Puisque $\hat{\mathbb{T}}$ est continu, la suite $(\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\,\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite de $(\boldsymbol{w}_n)$, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, telle que $(\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i = 1\ldots I$, la suite (β_{in}), avec $\beta_{in} = (\varepsilon\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n, \nabla p_i)$, est bornée dans $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite de $(\boldsymbol{w}_n)$, toujours notée $(\boldsymbol{w}_n)$, telle que (β_{in}) converge. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm} := \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}_m$, $\boldsymbol{F}_{nm} := \boldsymbol{F}_n - \boldsymbol{F}_m$ et $\beta_{inm} := \beta_{in} - \beta_{im}$. On a

$$\begin{aligned}\left|(\boldsymbol{F}_{nm}, \hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_{nm})_\Omega\right| &= \left|(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \mathbf{rot}\,\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_{nm})_\Omega\right| \\ &\ge \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}\|^2_\Omega - \textstyle\sum_{i=1}^I |\beta_{inm}||(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \boldsymbol{P}_i)_\Omega|.\end{aligned}$$

Cette estimation montre que $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ constitue une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, elle converge. Ainsi, on peut extraire de $(\boldsymbol{v}_n) = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

En procédant de façon analogue, on montre le

Théorème 9.8.8 *Soit* Ω *un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Supposons l'hypothèse* $(\mathscr{H}_\mu)$ *vérifiée. Alors l'injection de* $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *est compacte.*

9.8.2 Géométries non triviales : retour aux problèmes initiaux

Énonçons maintenant le résultat principal de cette section concernant le caractère bien posé des équations de Maxwell dans un domaine non simplement connexe à frontière non connexe.

Théorème 9.8.9 *Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Considérons $\boldsymbol{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$. Supposons les hypothèses $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiées. Alors on a le résultat suivant.*

- *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur champ électrique $\mathscr{A}_N(\omega) : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ défini en (9.8) constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ satisfait $(\mathscr{A}_N(\omega)\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} = i\omega(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}')_\Omega$, pour tout $\boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$, si et seulement si le couple $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).*
- *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur champ magnétique $\mathscr{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ défini en (9.11) constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\boldsymbol{H} \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ satisfait $(\mathscr{A}_T(\omega)\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_\Omega$, pour tout $\boldsymbol{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$, si et seulement si le couple $(i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}), \boldsymbol{H})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).*

Preuve. Montrons que $\mathscr{A}_N(\omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro. En utilisant le Théorème 9.8.7, on prouve que $\mathscr{A}_N(\omega) - \mathscr{A}_N(0)$ constitue un opérateur compact de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Il suffit donc de montrer que $\mathscr{A}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. De nouveau, nous allons construire une paramétrix à droite $\mathbb{T}^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour l'opérateur $\mathscr{A}_N(0)$. Considérons $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$.
i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' = \int_\Omega \mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie puisque nous avons supposé l'hypothèse $(\mathscr{H}_\mu)$ vérifiée.
ii) Définissant $\beta_j := (\mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \widetilde{\nabla q_j})_\Omega$ pour $j = 1 \dots J$, remarquons ensuite qu'on a $(\mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{j=1}^J \beta_j \boldsymbol{Q}_j - \nabla\varphi), \widetilde{\nabla\varphi'})_\Omega = 0$ pour tout $\varphi' \in \Theta(\dot{\Omega})$. Par conséquent, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel $\boldsymbol{\psi} \in \hat{\mathbf{V}}_N(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \mu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - \sum_{j=1}^J \beta_j \boldsymbol{Q}_j - \nabla\varphi)$.
iii) Considérons ζ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varepsilon \nabla\zeta \cdot \nabla\zeta' = \int_\Omega \varepsilon\,\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla\zeta', \qquad \forall \zeta' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie puisque nous avons supposé l'hypothèse $(\mathscr{H}_\varepsilon)$ vérifiée.
iv) Enfin, définissons l'opérateur $\mathbb{T}^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ fait correspondre $\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi} - \nabla\zeta$ ainsi que l'opérateur $K^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ tel que

$$(K^\varepsilon\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega + \sum_{j=1}^J (\mu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \widetilde{\nabla q_j})_\Omega (\boldsymbol{Q}_j, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega).$$

D'après le Théorème 9.8.7, nous savons que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, $K^\varepsilon : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang fini. C'est donc un opérateur compact de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. Par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}_N(0)(\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} &= (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,(\mathbb{T}^\varepsilon\boldsymbol{u}), \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega \\ &= (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega - (K^\varepsilon\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\mathscr{A}_T(0) \circ \mathbb{T}^\varepsilon + K^\varepsilon = \mathrm{Id}$. Nous déduisons que $\mathbb{T}^\varepsilon$ constitue une paramétrix à droite pour $\mathscr{A}_N(0)$. Ceci prouve que l'opérateur autoadjoint $\mathscr{A}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. On montre de la même façon que $\mathscr{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Finalement, l'équivalence avec les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) provient des Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7. ∎

Remarque 9.8.10 *De nouveau, pour appliquer le théorème de Fredholm analytique et prouver que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible, il reste à montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{A}_N(\omega)$ ou $\mathscr{A}_T(\omega)$ est inversible. Ce résultat ne paraît pas simple à obtenir. Observons tout de même, d'après la Remarque 9.8.6, que les éléments du noyau de $\mathscr{A}_N(\omega)$ (resp. $\mathscr{A}_T(\omega)$) appartiennent à $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ (resp. $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$). D'autre part, l'application $\boldsymbol{u} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega$ définit une norme sur $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et sur $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$. Mais il manque encore un ingrédient pour conclure.*

Profitons de cette fin de chapitre pour présenter un exemple particulièrement surprenant prouvant la nécessité de la condition d'inversibilité en un point dans l'énoncé du théorème de Fredholm analytique. D'après [151, p.211], cet exemple est dû à Seeley.

◇ Exemple. Considérons l'anneau $\Omega := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, \pi < r < 2\pi \text{ et } 0 \le \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que

$$Au = e^{-2i\theta}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u\Big) \qquad \text{pour tout } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Puisque nous avons exclu l'origine en travaillant sur un anneau, on peut montrer que A est un opérateur Fredholm d'indice zéro. Notons

$$J_0(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\sin s}\,ds$$

la fonction de Bessel d'ordre 0. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, définissons alors la fonction $u_\lambda \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que

$$u_\lambda(r,\theta) := J_0(\lambda^{1/2}e^{i\theta})\sin r.$$

On peut vérifier que $Au_\lambda = \lambda u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Autrement dit, **le spectre ponctuel de l'opérateur A couvre tout le plan complexe**. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $B(\lambda) = A - \lambda\mathrm{Id}$ est Fredholm d'indice zéro. La famille $\{B(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ dépend analytiquement de λ. Cependant, il n'existe pas de paramètre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $B(\lambda_0)$ soit inversible.

Lorsque ε et μ changent de signe, l'étude du problème spectral « trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{div}\,(\mu^{-1}\nabla u) + \lambda\varepsilon u = 0$ » semble compliquée. Peut-on rencontrer ce phénomène de spectre ponctuel couvrant tout le plan complexe ? La question est ouverte.

QUATRIÈME PARTIE

PROBLÈMES DE TRANSMISSION INTÉRIEURS

CHAPITRE DIX

APPLICATION AU PROBLÈME DE TRANSMISSION INTÉRIEUR

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet des publications :

[22] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et H. HADDAR : On the use of T-coercivity to study the Interior Transmission Eigenvalue Problem. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 340(11-12):647–651, 2011.

[48] L. CHESNEL : Interior transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations : the T-coercivity as an alternative approach. *Inverse Problems*, 28(6):065005, 2012.

Sommaire

Introduction **239**

10.1 Étude du problème de Transmission Intérieur scalaire **241**

10.1.1 La T-coercivité pour le problème de transmission intérieur 242

10.1.2 Cas $A \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ dans un voisinage de $\partial\Omega$ 243

10.1.3 Cas $\mathrm{Id} < A_\star \mathrm{Id} \leq A$ dans un voisinage de $\partial\Omega$ 245

10.2 Étude du problème de Transmission Intérieur vectoriel **245**

10.2.1 Définitions et présentation du problème 246

10.2.2 Propriétés pour le problème scalaire 247

10.2.3 Une condition suffisante pour le caractère discret des valeurs propres de transmission 248

10.2.4 Étude de l'espace $\mathbf{X}_0$ 248

10.2.5 Cas $A \leq A^\star \mathrm{Id}$, avec $A^\star < 1$, dans un voisinage de la frontière 251

10.2.6 Caractère Fredholm de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ 251

10.2.7 Caractère discret des valeurs propres de transmission 252

10.2.8 Localisation des valeurs propres de transmission 253

10.2.9 Une estimation pour la première valeur propre de transmission 253

10.2.10 Cas $A_\star \mathrm{Id} \leq A$, avec $1 < A_\star$, dans un voisinage de la frontière 254

10.3 Quelques questions ouvertes **254**

Introduction

Jusqu'à présent, dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de transmission en électromagnétisme entre un matériau positif (vide, diélectrique,...) et un matériau négatif (métal, métamatériau,...). Dans les Parties I et II, nous nous sommes concentrés sur la version scalaire de ce problème, permettant notamment d'étudier les équations de Maxwell dans une géométrie 3D invariante dans une direction. Dans la Partie III, nous avons travaillé sur

le cas vectoriel. Dans cette dernière partie, nous souhaitons examiner un problème *a priori* assez éloigné de notre centre d'intérêt principal. Nous travaillerons sur le problème de transmission intérieur que l'on rencontre dans la théorie des problèmes inverses de diffraction.

En réalité, l'appellation « problème de transmission intérieur » recouvre toute une famille de problèmes spectraux. On les rencontre notamment lorsqu'on cherche à reconstruire le support d'une inclusion noyée dans un milieu de référence à partir de la mesure de champs lointains à fréquence donnée. Décrivons brièvement la problématique. Imaginons que l'on dispose d'un milieu de référence (corps humains, câble, mer,...) comportant un défaut localisé, *i.e.* à support borné (caillot, fissure, sous-marin,...). En envoyant des ondes dans toutes les directions à fréquence fixée et en mesurant le champ diffracté, nous voulons déterminer la position de l'inclusion et si possible, obtenir des informations concernant les propriétés physiques des matériaux la constituant. Pour mettre en place de telles techniques, il est important de savoir montrer qu'à fréquence fixée, *i.e.* à nombre d'onde fixé, il n'existe pas d'onde incidente qui ne rayonne pas.

À partir de cette question relativement simple, formulons un problème spectral. Nous allons nous concentrer sur l'étude du problème de transmission intérieur en électromagnétisme mais indiquons qu'il apparaît également en élasticité (cf. [9, 89, 10]). Le milieu de référence, caractérisé par les constantes physiques ε_0 et μ_0, occupe tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour simplifier la présentation, nous supposons $\varepsilon_0 = 1$ et $\mu_0 = 1$. Travaillons dans une configuration pour laquelle l'inclusion (le défaut) Ω est pénétrable. Introduisons les coefficients $A, N \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tels que $\varepsilon = \varepsilon_0 N$, $\mu = \mu_0 A^{-1}$ dans Ω. Notons u^i le *champ incident* (les ondes envoyées), u^s le *champ diffracté* (les ondes réfléchies dont on mesure l'amplitude) et $u := u^i + u^s$ le champ total. Pour fixer les idées, considérons le problème pour les modes TE-TM en 2D. Pour ce problème scalaire, nous supposons que $N = n\mathrm{Id}$ où n est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le milieu de référence $\mathbb{R}^2$, le champ incident vérifie l'équation $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$. Ici, k désigne le nombre d'onde. Le champ total satisfait l'équation $\mathrm{div}\,(A\nabla u) + k^2 nu = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $A = \mathrm{Id}$, $n = 1$ en dehors de l'inclusion et $A \neq \mathrm{Id}$ et/ou $n \neq 1$ dans Ω. Enfin, le champ diffracté obéit à une condition d'onde sortante, aussi appelée condition de radiation, de la forme $\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}(\partial u^s/\partial r - iku^s) = 0$. À présent, écrivons ce qui se passe lorsqu'il existe une onde u^i qui ne rayonne pas. Dans Ω, on a $\mathrm{div}\,(A\nabla u) + k^2 nu = 0$ et $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$. Le champ total, cherché dans $\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathrm{div}\,(A\nabla u) \in \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ vérifie les conditions de transmission $[u]|_{\partial\Omega} = [\nu \cdot A\nabla u]|_{\partial\Omega} = 0$ où $[\cdot]|_{\partial\Omega}$ désigne le saut sur $\partial\Omega$. Puisque $u^s = 0$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$ (nous cherchons un champ incident qui ne diffracte pas), on déduit $u = u^i$ et $\nu \cdot A\nabla u = \nu \cdot \nabla u^i$ sur $\partial\Omega$. Ici, ν désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. Pour ne pas avoir à écrire l'indice ^{i}, notons w la restriction à Ω du champ incident qui ne rayonne pas. Le couple (u, w) vérifie alors le problème de transmission intérieur

$$\left|\begin{array}{lcll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u,w) \in \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que :}} \\
\mathrm{div}\,(A\nabla u) + k^2 nu & = & 0 & \text{dans } \Omega \\
\Delta w + k^2 w & = & 0 & \text{dans } \Omega \\
u - w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\
\nu \cdot A\nabla u - \nu \cdot \nabla w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega.
\end{array}\right.$$

En suivant la même démarche, on peut formuler un problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell qui s'écrit :

$$\left|\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\text{Trouver } (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \text{ tel que :}} \\
\mathbf{rot}\ (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}) - k^2 N\boldsymbol{u} & = 0 & \text{dans } \Omega \\
\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - k^2\boldsymbol{w} & = 0 & \text{dans } \Omega \\
\nu \times (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\
\nu \times (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega
\end{array}\right.$$

avec, pour le champ électrique, $\varepsilon = \varepsilon_0 N$ et $\mu = \mu_0 A^{-1}$. Notons bien que dans ce problème, les conditions de transmission sont écrites sur toute la frontière du domaine.

Les premières recherches, pour des raisons techniques ou physiques, ça ne semble pas clair, ont porté sur le cas où l'inclusion est caractérisée par un seul paramètre : $A \neq Id, N = Id$ ou $A = Id, N \neq Id$. Les problèmes scalaires [58, 139, 59, 60] et vectoriels [90, 39, 35] associés ont été largement étudiés. Il reste néanmoins de nombreuses questions ouvertes que nous évoquerons au fil de ce chapitre (pour un aperçu récent des techniques utilisées, voir également [38]). En pratique, il est restrictif de modéliser le matériau de l'inclusion par un seul coefficient. C'est pourquoi certains auteurs se sont mis à étudier le problème de transmission intérieur avec $A \neq Id$ et $N \neq Id$ [34, 99, 40]. D'un point de vue mathématique, comme nous allons nous en rendre compte dans la suite, la forme sesquilinéaire associée à ce problème présente un changement de signe dans sa partie principale. Par conséquent, l'opérateur associé n'est pas fortement elliptique et son étude n'est pas standard. Mais pour faire face à ce genre de problèmes, nous pouvons utiliser la technique de la T-coercivité. Rappelons que l'idée consiste à tester dans les formulations variationnelles, non pas directement contre le champ, mais contre une transformation simple du champ de façon à retrouver une certaine positivité. Dans ce chapitre, nous allons voir comment développer cette méthode pour étudier le problème de transmission intérieur. Nous renvoyons également le lecteur à [36] pour une application à un problème de transmission intérieur différent de celui traité ici.

Nous travaillons sur le problème scalaire dans la Section 10.1 et sur le problème vectoriel dans la Section 10.2, complétant ainsi les résultats de [34, 40]. Nous prouvons que le problème de transmission intérieur est bien posé au sens de Fredholm et que les valeurs propres de transmission forment au plus un ensemble discret dans des configurations pour lesquelles $A - Id$ et $N - Id$ sont positifs ou négatifs dans un voisinage de la frontière mais peuvent changer de signe à l'intérieur du domaine. C'est là un apport de la technique de la T-coercivité par rapport aux approches existantes dans la littérature. Sous des conditions un peu plus restrictives sur les paramètres A et N, nous fournissons également des estimations pour la première valeur propre.

10.1 Étude du problème de Transmission Intérieur scalaire

Dans cette section, Ω désigne un domaine borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Notons ν le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω. Considérons $A \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{d\times d})$ une fonction à valeurs matricielles telle que $A(\boldsymbol{x})$ soit hermitienne pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Introduisons également $n \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles scalaires. Nous supposons

$$\begin{aligned} A_- &:= \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \inf_{\xi\in\mathbb{C}^2,\,|\xi|=1} (\xi \cdot A(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) > 0 \quad ; \qquad A_+ := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \sup_{\xi\in\mathbb{C}^2,\,|\xi|=1} (\xi \cdot A(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) < \infty \ ; \\ n_- &:= \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} n(\boldsymbol{x}) > 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad n_+ := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} n(\boldsymbol{x}) < \infty. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, nous notons $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, $(\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^d$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées. Nous nous intéressons au problème de transmission intérieur :

$$\left|\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } (u,w) \in \mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega) \ \text{ tel que :}} \\ \operatorname{div}(A\nabla u) + k^2 n u & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ u - w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \nu\cdot A\nabla u - \nu\cdot\nabla w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{10.2}$$

Définition 10.1.1 *Les valeurs de $k \in \mathbb{C}$ pour lesquelles le problème (10.2) possède une solution non-nulle (u, w) sont appelées valeurs propres de transmission.*

Le couple (u, w) vérifie le problème fort (10.2) si et seulement si (u, w) vérifie le problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u,w) \in \mathrm{X} \text{ tel que, pour tout } (u',w') \in \mathrm{X}, \\ a_k((u,w),(u',w')) := (A\nabla u, \nabla u')_\Omega - (\nabla w, \nabla w')_\Omega - k^2\left((nu,u')_\Omega - (w,w')_\Omega\right) = 0, \end{array} \right. \tag{10.3}$$

avec $\mathrm{X} := \{(u,w) \in \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, u - w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\}$. À l'aide du théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $\mathcal{A}_k : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(\mathcal{A}_k(u,w),(u',w'))_{\mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)} = a_k((u,w),(u',w')), \qquad \forall((u,w),(u',w')) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X}$$

Notons que a_k n'est ni coercive sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ ni même de la forme « coercive+compacte ».

10.1.1 La T-coercivité pour le problème de transmission intérieur

Pour présenter la technique de la T-coercivité dans le cadre de l'étude du problème de transmission intérieur, travaillons sur le cas $A_+ < 1$ et $n_+ < 1$. L'idée consiste à considérer une formulation équivalente à (10.3) où a_k est remplacée par $a_k^{\mathtt{T}}$ définie par

$$a_k^{\mathtt{T}}((u,w),(u',w')) := a_k((u,w),\mathtt{T}(u',w')), \qquad \forall((u,w),(u',w')) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X}, \tag{10.4}$$

$\mathtt{T}$ étant un isomorphisme *ad hoc* de X. Le couple $(u, w) \in \mathrm{X}$ satisfait $a_k((u,w),(u',w')) = 0$ pour tout $(u', w') \in \mathrm{X}$ si et seulement s'il vérifie $a_k^{\mathtt{T}}((u,w),(u',w')) = 0$ pour tout $(u', w') \in \mathrm{X}$. Prenons $\mathtt{T}$ tel que $\mathtt{T}(u, w) := (u - 2w, -w)$. Notons que $\mathtt{T}$ constitue bien un isomorphisme car $\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{Id}$. En utilisant l'inégalité de Young, on trouve pour $k = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}^*$, pour $\alpha, \beta > 0$ et pour tout $(u, w) \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned} & |a_k^{\mathtt{T}}((u,w),(u,w))| \\ = \;& \left|(A\nabla u,\nabla u)_\Omega + (\nabla w,\nabla w)_\Omega - 2(A\nabla u,\nabla w)_\Omega + \kappa^2\left((nu,u)_\Omega + (w,w)_\Omega - 2(nu,w)_\Omega\right)\right| \\ \geq \;& (A\nabla u,\nabla u)_\Omega + (\nabla w,\nabla w)_\Omega + \kappa^2\left((nu,u)_\Omega + (w,w)_\Omega\right) - 2\left|(A\nabla u,\nabla w)_\Omega\right| - 2\kappa^2\left|(nu,w)_\Omega\right| \\ \geq \;& ((1-\alpha)A\nabla u,\nabla u)_\Omega + ((1-\alpha^{-1}A_+)\nabla w,\nabla w)_\Omega + \kappa^2\left(((1-\beta)nu,u)_\Omega + ((1-\beta^{-1}n_+)w,w)_\Omega\right). \end{aligned}$$

En choisissant α et β tels que $A_+ < \alpha < 1$ et $n_+ < \beta < 1$, cette estimation prouve que $a_k^{\mathtt{T}}$ est coercive sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. En utilisant le théorème de Lax-Milgram et puisque $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de X, on déduit que $\mathcal{A}_k$ définit un isomorphisme de X pour $k = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Or pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'injection de X dans $\mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ étant compacte, l'opérateur $\mathcal{A}_k$ diffère de l'isomorphisme $\mathcal{A}_i$ d'une perturbation compacte. Par conséquent, d'après le théorème de Fredholm analytique, lorsque $A_+ < 1$ et $n_+ < 1$, l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans $\mathbb{C}$.

Remarque 10.1.2 *Pour ce problème de transmission intérieur, les deux fonctions mises en jeu « vivent » sur le même domaine. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser les opérateurs de transfert géométriques introduits dans le Chapitre 1 pour étudier le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif.*

Dans la suite de cette première section, nous allons chercher à affaiblir les hypothèses portant sur A et n. Dans le Chapitre 1, nous avons prouvé que le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif est bien posé au sens de Fredholm lorsque le contraste est plus grand ou plus petit que -1 au voisinage de l'interface. Dans le problème de transmission intérieur, c'est la frontière du domaine qui joue le rôle d'interface. Assez naturellement, nous allons montrer que le problème de transmission intérieur est bien posé au sens de Fredholm lorsque A est plus grand ou plus petit que l'identité, au sens des matrices hermitiennes, dans un voisinage de $\partial\Omega$.

10.1.2 Cas $A \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ dans un voisinage de $\partial\Omega$

Supposons dans ce paragraphe qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\Omega$, *i.e.* un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\partial\Omega \subset \mathcal{V}$, et une constante $A^\star$ tels que, au sens des matrices hermitiennes (cf. (10.1)), $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$.

Lemme 10.1.3 *Supposons $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $n(\boldsymbol{x}) \leq n^\star < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors il existe $k = i\kappa$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$, tel que l'opérateur $\mathcal{A}_k : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ définisse un isomorphisme.*

Remarque 10.1.4 *Dans ce lemme, nous n'effectuons pas d'hypothèse quant au signe de $A - \mathrm{Id}$ et $n - 1$ sur $\Omega \backslash \overline{\mathcal{V}}$.*

Preuve. Introduisons $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ une fonction de troncature égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$ et à support dans $\mathcal{V} \cap \Omega$. Considérons l'opérateur $\mathtt{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que $\mathtt{T}(u, w) = (u - 2\chi w, -w)$. De nouveau, on calcule $\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{Id}$ ce qui montre que $\mathtt{T}$ constitue un isomorphisme. Prouvons que $a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}$ défini en (10.4) est coercive pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}$. Pour tout $(u, w) \in \mathrm{X}$, on a,

$$\begin{aligned} |a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}((u,w),(u,w))| &= |(A\nabla u, \nabla u)_\Omega + (\nabla w, \nabla w)_\Omega - 2(A\nabla u, \nabla(\chi w))_\Omega \\ &\quad + \kappa^2 \left((nu, u)_\Omega + (w, w)_\Omega - 2(nu, \chi w)_\Omega\right)| \,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} 2\,|(A\nabla u, \nabla(\chi w))_\Omega| &\leq 2\,|(\chi A\nabla u, \nabla w)_{\mathcal{V}}| + 2\,|(A\nabla u, \nabla(\chi) w)_{\mathcal{V}}| \\ &\leq \eta(A\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{V}} + \eta^{-1}(A\nabla w, \nabla w)_{\mathcal{V}} \\ &\quad + \alpha(A\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1}(A\nabla(\chi) w, \nabla(\chi) w)_{\mathcal{V}} \\ \text{et} \qquad 2\,|(nu, \chi w)_\Omega| &\leq \beta(nu, u)_{\mathcal{V}} + \beta^{-1}(nw, w)_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

En injectant (10.6) dans (10.5), on obtient

$$\begin{aligned} |a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}((u,w),(u,w))| &\geq (A\nabla u, \nabla u)_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} + (\nabla w, \nabla w)_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} + \kappa^2((nu, u)_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} + (w, w)_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}}) \\ &\quad + ((1 - \eta - \alpha)A\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{V}} + ((\mathrm{Id} - \eta^{-1}A)\nabla w, \nabla w)_{\mathcal{V}} \\ &\quad + \kappa^2((1 - \beta)nu, u)_{\mathcal{V}} + ((\kappa^2(1 - \beta^{-1}n) - \sup_{\mathcal{V}} |\nabla\chi|^2 A^\star \alpha^{-1})w, w)_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

En prenant η, β et α tels que $A^\star < \eta < 1$, $n^\star < \beta < 1$ et $0 < \alpha < 1 - \eta$, nous obtenons la coercivité de $a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}$ pour κ suffisamment grand. ■

Considérons $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}_{i\kappa_0} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ définisse un isomorphisme. Puisque $\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_{i\kappa_0}$ constitue un opérateur compact de X pour tout $k \in \mathbb{C}$, en utilisant le théorème de Fredholm analytique, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 10.1.5 *Supposons $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $n(\boldsymbol{x}) \leq n^\star < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans $\mathbb{C}$.*

Du Lemme 10.1.3, on déduit également directement la proposition suivante.

Proposition 10.1.6 *Supposons seulement $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}_k : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro.*

À présent, énonçons un théorème de localisation des valeurs propres de transmission. Dans [94], les auteurs donnent un résultat plus précis pour la formulation en bilaplacien (voir le Chapitre 11) du problème de transmission intérieur.

Théorème 10.1.7 *Supposons $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $n(\boldsymbol{x}) \leq n^\star < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re e\, k| < \delta\, |\Im m\, k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

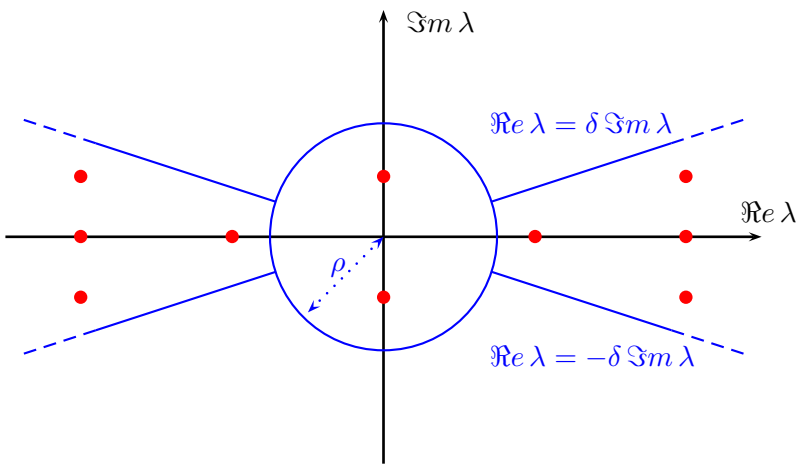


FIGURE 10.1 – Position des valeurs propres dans le plan complexe lorsque $A(\boldsymbol{x}) \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $n(\boldsymbol{x}) \leq n^\star < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$.

Preuve. Considérons de nouveau l'isomorphisme $\mathtt{T}$ défini par $\mathtt{T}(u,w) = (u - 2\chi w, -w)$. le Lemme 10.1.3 prouve que pour $\kappa \in \mathbb{R}$ avec $|\kappa|$ suffisamment grand, on a l'estimation

$$\left|a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}((u,w),(u,w))\right| \geq C_1(\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + \|w\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}) + C_2\kappa^2(\|u\|^2_\Omega + \|w\|^2_\Omega), \tag{10.7}$$

où les constantes $C_1, C_2 > 0$ sont indépendantes de κ. Prenons maintenant $k = i\kappa e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On a

$$\left|a^{\mathtt{T}}_{k}((u,w),(u,w)) - a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}((u,w),(u,w))\right| \leq C_3 \left|1 - e^{2i\theta}\right| \kappa^2(\|u\|^2_\Omega + \|w\|^2_\Omega), \tag{10.8}$$

avec $C_3 > 0$ indépendant de κ. En combinant (10.7) et (10.8), on trouve

$$\begin{aligned} \left|a^{\mathtt{T}}_{k}((u,w),(u,w))\right| &\geq \left|a^{\mathtt{T}}_{i\kappa}((u,w),(u,w))\right| - C_3\kappa^2 \left|1 - e^{2i\theta}\right| (\|u\|^2_\Omega + \|w\|^2_\Omega) \\ &\geq C_1(\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + \|w\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}) + (C_2 - C_3 \left|1 - e^{2i\theta}\right|)\kappa^2(\|u\|^2_\Omega + \|w\|^2_\Omega). \end{aligned}$$

En choisissant θ assez petit pour avoir, par exemple, $C_3 \left|1 - e^{2i\theta}\right| \leq C_2/2$, on obtient le résultat désiré. ■

Avec une hypothèse plus forte sur A, on peut affaiblir la condition sur n. En prenant $u' = w' = 1$ dans (10.3), nous remarquons d'abord que les vecteurs propres de transmission (u,w) (*i.e.* les vecteurs propres du problème (10.2)) vérifient $k^2 \int_\Omega nu - w = 0$. Ceci nous conduit à introduire l'espace $\mathrm{Y} := \{(u,w) \in \mathrm{X} \,|\, \int_\Omega nu - w = 0\}$. Maintenant, supposons $\int_\Omega (n-1) \neq 0$. En procédant par contradiction, on prouve l'existence d'une constante $C_P > 0$ (qui dépend de Ω et aussi de n par l'intermédiaire de Y) telle que

$$\|u\|^2_\Omega + \|w\|^2_\Omega \leq C_P(\|\nabla u\|^2_\Omega + \|\nabla w\|^2_\Omega), \qquad \forall (u,w) \in \mathrm{Y}. \tag{10.9}$$

De plus, on peut vérifier que $k \neq 0$ est une valeur propre de transmission si, et seulement si il existe un élément non nul $(u,w) \in \mathrm{Y}$ tel que $a_k((u,w),(u',w')) = 0$ pour tout $(u',w') \in \mathrm{Y}$.

Théorème 10.1.8 *Supposons $\int_\Omega (n-1) \neq 0$ et $A_+ < 1$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans $\mathbb{C}$. En outre, si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (A_-(1-\sqrt{A_+}))/(C_P \max(n_+,1)\,(1+\sqrt{n_+}))$, avec C_P définie en (10.9), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. Notons $\lambda(w) := 2\int_\Omega (n-1)w/\int_\Omega (n-1)$ et considérons l'isomorphisme de Y défini par $\mathtt{T}(u,w) = (u-2w+\lambda(w), -w+\lambda(w))$ (en remarquant que $\lambda(\lambda(w)) = 2\lambda(w)$, on prouve $\mathtt{T}\circ\mathtt{T} = \mathrm{Id}$). Pour tout $(u,w)\in \mathrm{Y}$, on a

$$\begin{aligned}
& |a_k^{\mathtt{T}}((u,w),(u,w))| \\
= \;& \left|(A\nabla u,\nabla u)_\Omega + (\nabla w,\nabla w)_\Omega - 2(A\nabla u,\nabla w)_\Omega - k^2\left((nu,u)_\Omega + (w,w)_\Omega - 2(nu,w)_\Omega\right)\right| \\
\geq \;& (A\nabla u,\nabla u)_\Omega + (\nabla w,\nabla w)_\Omega - 2\left|(A\nabla u,\nabla w)_\Omega\right| - |k|^2\left((nu,u)_\Omega + (w,w)_\Omega + 2\left|(nu,w)_\Omega\right|\right) \\
\geq \;& (1-\sqrt{A_+})((A\nabla u,\nabla u)_\Omega + (\nabla w,\nabla w)_\Omega) - |k|^2\,(1+\sqrt{n_+})((nu,u)_\Omega + (w,w)_\Omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k\in\mathbb{C}$ tel que $|k|^2 < (A_-(1-\sqrt{A_+}))/(C_P\max(n_+,1)\,(1+\sqrt{n_+}))$, $a_k^{\mathtt{T}}$ est coercive sur $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$. On peut alors conclure grâce au théorème de Fredholm analytique. ■

Remarque 10.1.9 *En particulier, si $n_+ < 1$ ou si $1 < n_-$, alors $\int_\Omega (n-1)\neq 0$ et le Théorème 10.1.8 prouve que l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret. De plus, si $1 < n_-$, en observant que pour $k^2\in\mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
& \Re e\, a_k^T((u,w),(u,w)) \\
= \;& (A\nabla(u-w),\nabla(u-w))_\Omega + ((\mathrm{Id}-A)\nabla w,\nabla w)_\Omega - k^2((n(u-w),(u-w))_\Omega + ((1-n)w,w)_\Omega),
\end{aligned}$$

on peut vérifier que la première valeur propre de transmission réelle k_1 non nulle vérifie $|k_1|^2 \geq (A_-\Lambda_1(\Omega)/n_+)$ où $\Lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur Ω. C'est l'un des résultats de [40].

Résumons maintenant les résultats lorsque A est plus grand que l'identité dans un voisinage de la frontière.

10.1.3 Cas $\mathrm{Id} < A_\star\mathrm{Id} \leq A$ dans un voisinage de $\partial\Omega$

Supposons $\mathrm{Id} < A_\star\mathrm{Id} \leq A(\boldsymbol{x})$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. En travaillant comme dans la section précédente, avec cette fois-ci un isomorphisme $\mathtt{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ défini par $\mathtt{T}(u,w) = (u, -w+2\chi u)$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 10.1.10 *Supposons $\mathrm{Id} < A_\star\mathrm{Id} \leq A(\boldsymbol{x})$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Alors pour tout $k\in\mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}_k:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ est de type Fredholm.*

Supposons $\mathrm{Id} < A_\star\mathrm{Id} \leq A(\boldsymbol{x})$ et $1 < n_\star \leq n(\boldsymbol{x})$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans $\mathbb{C}$. De plus, il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k\in\mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re e\, k| < \delta\,|\Im m\, k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.

Notons $\tilde\lambda(u) := -2\int_\Omega (n-1)u/\int_\Omega (n-1)$. Avec l'isomorphisme $\mathtt{T}:\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}$ défini par $\mathtt{T}(u,w) = (u+\tilde\lambda(u), -w+2u+\tilde\lambda(u))$, on peut prouver le théorème suivant.

Théorème 10.1.11 *Supposons $\int_\Omega (n-1)\neq 0$ et $1 < A_-$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans $\mathbb{C}$. En outre, si $k\in\mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (1-1/\sqrt{A_-})/(C_P\max(n_+,1)\,(1+1/\sqrt{n_-}))$, avec C_P définie en (10.9), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

10.2 Étude du problème de Transmission Intérieur vectoriel

Nous allons passer à l'étude du problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell. Dans toute cette section, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ désigne un domaine borné simplement connexe à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne connexe. Le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω, est noté ν.

10.2.1 Définitions et présentation du problème

Nous travaillerons sur le problème de diffraction du champ électrique par une inclusion dont la perméabilité et la permittivité sont données par $\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_0 N(\boldsymbol{x})$ et $\mu(\boldsymbol{x}) = \mu_0 A(\boldsymbol{x})^{-1}$. Pour simplifier la présentation, nous supposons ε_0 et μ_0 constantes en espace. Ici, $A, N \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{3\times 3})$ sont des fonctions à valeurs matricielles telle que $A(\boldsymbol{x}), N(\boldsymbol{x})$ sont hermitiennes pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Nous faisons l'hypothèse que A^{-1}, N^{-1} appartiennent à $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{3\times 3})$. Nous notons

$$\begin{aligned} A_- &:= \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \inf_{\xi\in\mathbb{C}^3,\,|\xi|=1} (\xi\cdot A(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) > 0 \quad ; \quad A_+ := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \sup_{\xi\in\mathbb{C}^3,\,|\xi|=1} (\xi\cdot A(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) < \infty \,; \\ N_- &:= \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \inf_{\xi\in\mathbb{C}^3,\,|\xi|=1} (\xi\cdot N(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) > 0 \quad \text{et} \quad N_+ := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \sup_{\xi\in\mathbb{C}^3,\,|\xi|=1} (\xi\cdot N(\boldsymbol{x})\overline{\xi}) < \infty. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Dans l'étude qui va suivre, $A_\star > 1$, $A^\star < 1$, $N_\star > 1$ et $N^\star < 1$ seront des constantes qui permettent de formuler des hypothèses sur les valeurs de A et N dans un voisinage de la frontière. Par ailleurs, $\mathcal{V}$ désignera toujours un voisinage de $\partial\Omega$, *i.e.* un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $\partial\Omega \subset \mathcal{V}$.
Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, nous notons $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) := \mathrm{L}^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^3)$. L'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ est défini comme la fermeture de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^3)$ pour la norme

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)} := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^{1/2}_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)} \quad \text{avec} \quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)} := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_\Omega + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_\Omega.$$

Le sous-ensemble des éléments de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ dont la trace tangentielle s'annule sur $\partial\Omega$ est notée $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,;\Omega)$.

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,;\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \,|\, \boldsymbol{v}\times\nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Définissons la notion de valeur propre de transmission pour les équations de Maxwell.

Définition 10.2.1 *Les éléments $k \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe un couple $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \neq (0,0)$ vérifiant*

$$\left|\begin{array}{lll} \textit{Trouver } (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) & & \textit{tel que :} \\ \mathbf{rot}\,(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}) - k^2 N\boldsymbol{u} & = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} - k^2\boldsymbol{w} & = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \nu\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}) & = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \\ \nu\times(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}) & = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{10.11}$$

sont appelés valeurs propres de transmission.

Rappelons que $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{u}$ correspondent respectivement au champ incident qui ne rayonne pas et au champ total à l'intérieur de l'inclusion. Le couple $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ vérifie (10.11) si et seulement si $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ satisfait le problème variationnel

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{X} \text{ tel que, pour tout } (\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}') \in \mathbf{X}, \\ \displaystyle\int_\Omega A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}' - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}' = k^2\int_\Omega N\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}', \end{array}\right. \tag{10.12}$$

avec $\mathbf{X} := \{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \,|\, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,;\Omega)\}$. Introduisons la forme sesquilinéaire sur $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$

$$a_k((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}')) := (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}')_\Omega - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_\Omega - k^2\left((N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')_\Omega - (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}')_\Omega\right).$$

Nous remarquons que si $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ vérifie le problème (10.12), alors pour tout $(\varphi,\psi) \in \mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que $\varphi-\psi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (dans ce cas, $(\nabla\varphi,\nabla\psi) \in \mathbf{X}$ car $(\nabla\varphi-\nabla\psi)\times\nu = 0$ sur $\partial\Omega$), on a

$$k^2\left((N\boldsymbol{u},\nabla\varphi)_\Omega - (\boldsymbol{w},\nabla\psi)_\Omega\right) = 0. \tag{10.13}$$

Ceci nous conduit à introduire les espaces

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &:= \{(\varphi,\psi) \in \mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, \varphi-\psi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ et } (\varphi,1)_{\partial\Omega} = (\psi,1)_{\partial\Omega} = 0\}; \\ \mathbf{X}_0 &:= \{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{X} \,|\, (N\boldsymbol{u},\nabla\varphi)_\Omega - (\boldsymbol{w},\nabla\psi)_\Omega = 0, \quad \forall(\varphi,\psi) \in \mathrm{S}\}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Ici, $(\cdot,\cdot)_{\partial\Omega}$ désigne le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. La condition $(\varphi,1)_{\partial\Omega} = (\psi,1)_{\partial\Omega} = 0$ pour les éléments (φ,ψ) de S est imposée pour éliminer les constantes : si $(C_1,C_2) \in \mathrm{S}\cap\mathbb{C}^2$ alors $C_1 = C_2 = 0$. On peut vérifier que $((\varphi,\psi),(\varphi',\psi')) \mapsto ((\varphi,\psi),(\varphi',\psi'))_{\mathrm{S}} := (\nabla\varphi,\nabla\varphi')_\Omega + (\nabla\psi,\nabla\psi')_\Omega$ définit un produit scalaire sur S. Énonçons un lemme caractérisant les éléments de $\mathbf{X}_0$.

Lemme 10.2.2 *Soit $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ un élément de $\mathbf{X}$. Le couple $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ appartient à $\mathbf{X}_0$ si et seulement si* $\operatorname{div}(N\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0$ *dans Ω et $\nu\cdot(N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}) = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Preuve. Considérons $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ un élément de $\mathbf{X}_0$. Par définition, on a

$$(N\boldsymbol{u},\nabla\varphi)_\Omega - (\boldsymbol{w},\nabla\psi)_\Omega = 0, \qquad \forall(\varphi,\psi)\in\mathrm{S}.$$

En prenant, $(\varphi,\psi) = (\zeta,0)$ (resp. $(\varphi,\psi) = (0,\zeta)$) pour $\zeta \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, on trouve $\operatorname{div}(N\boldsymbol{u}) = 0$ (resp. $\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0$). Maintenant, si $\zeta \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\langle\nu\cdot(N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}),\zeta\rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega),\,\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} &= (\operatorname{div}(N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}),\zeta)_\Omega + (N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w},\nabla\zeta)_\Omega\\ &= (N\boldsymbol{u},\nabla(\zeta-\lambda_\zeta))_\Omega - (\boldsymbol{w},\nabla(\zeta-\lambda_\zeta))_\Omega = 0.\end{aligned}$$

Ci-dessus, λ_ζ désigne le nombre $(\zeta,1)_{\partial\Omega}/(1,1)_{\partial\Omega}$.
Réciproquement, si $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}$ vérifie $\operatorname{div}(N\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0$ dans Ω et $\nu\cdot(N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}) = 0$, alors pour $(\varphi,\psi)\in\mathrm{S}$, on a

$$\begin{aligned}(N\boldsymbol{u},\nabla\varphi)_\Omega - (\boldsymbol{w},\nabla\psi)_\Omega &= \langle\nu\cdot N\boldsymbol{u},\varphi\rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega),\,\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} - \langle\nu\cdot\boldsymbol{w},\psi\rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega),\,\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}\\ &= \langle\nu\cdot(N\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}),\varphi\rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega),\,\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} = 0.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Maintenant considérons le problème scalaire,

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } (\varphi,\psi)\in\mathrm{S} \text{ tel que, pour tout } (\varphi',\psi')\in\mathrm{S},\\ \displaystyle\int_\Omega N\nabla\varphi\cdot\overline{\nabla\varphi'} - \nabla\psi\cdot\overline{\nabla\psi'} = f((\varphi',\psi')),\end{array}\right. \tag{10.15}$$

où $f \in \mathrm{S}^*$ (le dual topologique de S). Dans la suite, nous aurons besoin d'informations concernant $\mathbf{X}_0\cap\nabla\mathrm{S}$, espace précisément égal à l'ensemble des gradients des éléments du noyau de (10.15). Nous allons donc énoncer dans le paragraphe suivant quelques résultats pour ce problème qui seront utiles dans la suite de l'analyse. Nous renvoyons le lecteur à la Section 10.1 pour les démonstrations.

10.2.2 Propriétés pour le problème scalaire

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ tel que

$$(\mathcal{B}(\varphi,\psi),(\varphi',\psi'))_{\mathrm{S}} = \int_\Omega N\nabla\varphi\cdot\overline{\nabla\varphi'} - \nabla\psi\cdot\overline{\nabla\psi'}, \qquad \forall((\varphi,\psi),(\varphi',\psi'))\in\mathrm{S}\times\mathrm{S}.$$

En travaillant comme dans les preuves du Lemme 10.1.3 et du Théorème 10.1.10, on montre les deux résultats suivants.

Proposition 10.2.3 *Supposons $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$. Alors l'opérateur $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ associé au problème scalaire (10.15) définit un isomorphisme.*

Proposition 10.2.4 *Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\Omega$ tel que la fonction N satisfasse $N \le N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ ou $\mathrm{Id} < N_\star\mathrm{Id} \le N$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Alors l'opérateur $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ associé au problème scalaire (10.15) vérifie l'égalité $\mathcal{B} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$ où $\mathcal{I} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme et $\mathcal{K} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ un opérateur compact.*

Remarque 10.2.5 *Sous les hypothèses de la Proposition 10.2.4, on a classiquement l'alternative de Fredholm :*
– ou bien $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ *est injectif et dans ce cas* $\mathcal{B}$ *constitue un isomorphisme ;*
– ou bien $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ *possède un noyau non réduit à zéro* $\ker \mathcal{B} = vect((\varphi_1, \psi_1), \ldots, (\varphi_M, \psi_M))$ *et dans ce cas le problème (10.15) possède une solution, définie à une combinaison linéaire des élements de* $\ker \mathcal{B}$ *près, si et seulement si* f *vérifie la condition de compatibilité* $f((\varphi_k, \psi_k)) = 0$ *pour* $k = 1 \ldots M$.

10.2.3 Une condition suffisante pour le caractère discret des valeurs propres de transmission

Revenons à l'étude du problème (10.12). Si $\mathbf{T}$ est un isomorphisme de $\mathbf{X}$, alors $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ est une solution de (10.12) si et seulement si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ vérifie

$$a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')) := a_k((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \mathbf{T}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}') \in \mathbf{X}. \tag{10.16}$$

Comme pour le problème scalaire, l'idée consiste à trouver le bon isomorphisme $\mathbf{T} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ qui permet de recouvrer une propriété de positivité pour la partie principale de $a_k^{\mathbf{T}}$. Cependant, ce n'est pas suffisant pour appliquer le théorème de Fredholm analytique car l'injection de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. Classiquement pour les équations de Maxwell, la compacité sera obtenue en prenant en compte la condition de divergence nulle en travaillant dans l'espace $\mathbf{X}_0$. Si k est une valeur propre de transmission non nulle, nous savons, d'après (10.13), que le couple de vecteurs propres associé appartient à $\mathbf{X}_0$. Ceci conduit à introduire le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0 \text{ tel que, pour tout } (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}') \in \mathbf{X}_0, \\ a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')) = l((\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')), \end{array} \right. \tag{10.17}$$

où $l \in \mathbf{X}_0^*$ (le dual topologique de $\mathbf{X}_0$). Définissons l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_0$ tel que, pour tout $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')) \in \mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$,

$$(\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}'))_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)^2} = a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')). \tag{10.18}$$

Si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ est un couple de vecteurs propres associé à la valeur propre de transmission $k \neq 0$, alors on a $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0$. Par conséquent, pour montrer que l'ensemble des valeur propres de transmission est discret dénombrable, il est suffisant de prouver que $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$ où $\mathscr{S}$ est un ensemble discret dénombrable du plan complexe. Dans la prochaine section, nous prouvons un résultat d'injection compacte de $\mathbf{X}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ qui permettra, comme nous l'avons annoncé, d'utiliser le théorème de Fredholm analytique.

Remarque 10.2.6 *Supposons l'opérateur scalaire* $\mathcal{B} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ *inversible (il suffit pour cela de faire l'hypothèse* $N_+ < 1$ *ou* $1 < N_-$*). Alors on vérifie aisément que si* $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ *n'est pas injectif, alors* k *constitue une valeur propre de transmission. Dans ce cas,* $k \neq 0$ *est une valeur propre de transmission si et seulement si* $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ *n'est pas injectif.*

10.2.4 Étude de l'espace $\mathbf{X}_0$

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier les propriétés de l'espace $\mathbf{X}_0$.

Résultat de compacité

Commençons par démontrer un résultat de compacité de l'injection de $\mathbf{X}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 10.2.7 *Supposons qu'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $\partial\Omega$ *tel que la fonction* N *satisfasse* $N \leq N^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ *ou* $\mathrm{Id} < N_\star \mathrm{Id} \leq N$ *p.p. sur* $\Omega \cap \mathcal{V}$*. Alors* $\mathbf{X}_0$ *s'injecte de façon compacte dans* $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Preuve. Définissons les espaces classiques, pour $\xi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}_N(\xi;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } \Omega,\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}\,, \\ \mathbf{V}_T(\xi;\,\Omega) & := & \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } \Omega,\ \xi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}\,. \end{array}$$

Considérons une suite bornée $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m)$ d'éléments de $\mathbf{X}_0$. D'après le Lemme 10.2.2, on a $\mathrm{div}\,(N\boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{w}_m) = 0$ dans Ω qui possède une frontière connexe. Par conséquent, d'après [2, théorème 3.12], il existe un élément $\boldsymbol{s}_m \in \mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$ tel que $N\boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{w}_m = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{s}_m$. D'autre part, puisque $\mathrm{div}\,(N\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{w}_m) = 0$ dans le domaine simplement connexe Ω et puisque $\nu\cdot(N\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{w}_m) = 0$ sur $\partial\Omega$ (de nouveau, d'après le Lemme 10.2.2), il existe en vertu de [2, théorème 3.17] un élément $\boldsymbol{d}_m \in \mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ tel que $N\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{w}_m = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{d}_m$. Définissons alors $\boldsymbol{\varphi}_m := (\boldsymbol{s}_m + \boldsymbol{d}_m)/2$ et $\boldsymbol{\psi}_m := (\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{d}_m)/2$. On a $\boldsymbol{u}_m = N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_m$ et $\boldsymbol{w}_m = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_m$.

Montrons qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_m)$ et $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_m)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons l'espace

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 := \{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{X}\,|\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega,\ \nu\cdot(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \tag{10.19}$$

Dans le Lemme 10.2.8 ci-dessous, nous prouvons que $\tilde{\mathbf{X}}_0$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$ et que l'application $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \mapsto (\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}\|_\Omega^2)^{1/2}$ définit sur cet espace une norme équivalente à la norme canonique. Par conséquent, la suite $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ est bornée dans $\tilde{\mathbf{X}}_0$, et il existe une sous-suite (notée également $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$) qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\boldsymbol{\varphi}_{lm} := \boldsymbol{\varphi}_l - \boldsymbol{\varphi}_m$, $\boldsymbol{\psi}_{lm} := \boldsymbol{\psi}_l - \boldsymbol{\psi}_m$, $\boldsymbol{u}_{lm} := \boldsymbol{u}_l - \boldsymbol{u}_m$ et $\boldsymbol{w}_{lm} := \boldsymbol{w}_l - \boldsymbol{w}_m$. Alors, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{rot}\,N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm} & = & \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm} \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm} & = & \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{lm}. \end{array} \tag{10.20}$$

Considérons, comme lors de l'étude du problème scalaire, une fonction de troncature $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ à support dans $\mathcal{V}\cap\overline{\Omega}$ et égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Étudions le cas $\mathrm{Id} < N_\star\mathrm{Id} \le N$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Multiplions les équations (10.20) respectivement par $\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}$ et $\boldsymbol{\psi}_{lm}$ (pour traiter le cas $N \le N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$, il suffit de multiplier par $\boldsymbol{\varphi}_{lm}$ et $\boldsymbol{\psi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{array}{l} (N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))_\Omega + \langle \nu\times(N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}), (\nu\times(\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))\times\nu\rangle_{\partial\Omega} \\ = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}, \boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega \end{array} \tag{10.21}$$

et

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega + \langle \nu\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu\times\boldsymbol{\psi}_{lm})\times\nu\rangle_{\partial\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{lm}, \boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega. \tag{10.22}$$

Puisque $N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm} = \boldsymbol{u}_{lm} - \boldsymbol{w}_{lm}$, la fonction $N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}$ appartient à $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, D)$. En se souvenant que $\boldsymbol{\varphi}_{lm} - \boldsymbol{\psi}_{lm}$ constitue un élément de $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, D)$, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{l} \langle \nu\times(N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}), (\nu\times(\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))\times\nu\rangle_{\partial D} + \langle \nu\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu\times\boldsymbol{\psi}_{lm})\times\nu\rangle_{\partial D} \\ = \langle \nu\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu\times(-\boldsymbol{\varphi}_{lm}))\times\nu\rangle_{\partial D} + \langle \nu\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu\times\boldsymbol{\varphi}_{lm})\times\nu\rangle_{\partial D} = 0. \end{array}$$

En additionnant (10.21) et (10.22), on obtient alors

$$\begin{array}{rl} & (N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_\Omega + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega - 2|(N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,(\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))_\Omega| \\ \le & C\,(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega). \end{array} \tag{10.23}$$

Mais, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, nous avons, d'après l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
& 2\left|(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,(\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))_\Omega\right| \\
\leq\ & 2\left|(\chi\, N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega\right| + 2\left|(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \nabla\chi\times\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega\right| \\
\leq\ & \alpha\,(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1}\,(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& +\beta\,(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \beta^{-1}\,(N^{-1}(\nabla\chi\times\boldsymbol{\psi}_{lm}), \nabla\chi\times\boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
\leq\ & \alpha\,(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1}N_\star^{-1}\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& +\beta\,(N^{-1}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + C\,\beta^{-1}\,(\boldsymbol{\psi}_{lm}, \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}}
\end{aligned} \tag{10.24}$$

avec $C > 0$ qui dépend seulement de χ et N. En injectant (10.24) dans (10.23), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\Omega\setminus\overline{\mathcal{V}}} + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_{\Omega\setminus\overline{\mathcal{V}}} \\
& +(1-\alpha-\beta)(N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + (1-\alpha^{-1}N_\star^{-1})(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
\leq\ & C\,(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega + \beta^{-1}\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega^2).
\end{aligned} \tag{10.25}$$

Puisque $1 < N_\star$, nous pouvons choisir $\alpha < 1$ tel que $(1-\alpha^{-1}N_\star^{-1}) > 0$. En prenant $0 < \beta < 1-\alpha$, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega^2 \ \leq\ & C\,(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega \\
& + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{lm}\|_\Omega\|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega + \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega^2).
\end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_m)$ et $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_m)$ sont de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Ceci prouve que $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m) = (N^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}_m, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}_m)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

Lemme 10.2.8 *L'espace $\tilde{\mathbf{X}}_0$ défini en (10.19) s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) \mapsto (\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}\|_\Omega^2)^{1/2}$ définit sur $\tilde{\mathbf{X}}_0$ une norme équivalente à la norme canonique.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ une suite bornée d'éléments de $\tilde{\mathbf{X}}_0$. Les suites $(\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)$ et $(\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)$ sont respectivement bornées dans $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$. D'après le théorème de Weber [150], nous pouvons extraire de $(\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)$ et $(\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En écrivant, $\boldsymbol{\varphi}_m = (\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)/2 + (\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)/2$ et $\boldsymbol{\psi}_m = (\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)/2 - (\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)/2$, ceci prouve qu'on peut extraire de $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, puisque l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_\Omega$ définit une norme sur $\mathbf{V}_N(1;\,\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\,\Omega)$, nous obtenons la seconde partie de ce lemme. ■

Normes équivalentes sur $\mathbf{X}_0$

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition suffisante pour que l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \mapsto (\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega^2)^{1/2}$ définisse sur $\mathbf{X}_0$ une norme équivalente à la norme canonique.

Proposition 10.2.9 *Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\Omega$ tel que la fonction N satisfasse $N \leq N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ ou $\mathrm{Id} < N_\star\mathrm{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Supposons également que l'opérateur $\mathcal{B}$ associé au problème scalaire (10.15) soit injectif ($\nabla\ker\mathcal{B} = \mathbf{X}_0 \cap \nabla\mathrm{S} = \{0\}$). Alors l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \mapsto (\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega^2)^{1/2}$ définit sur $\mathbf{X}_0$ une norme équivalente à la norme canonique.*

Définition 10.2.10 *Sous les hypothèses de la Proposition 10.2.9, nous notons $C_P > 0$ la plus petite constante telle que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2 \leq C_P(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_\Omega^2), \qquad \forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0. \tag{10.26}$$

Preuve de la Proposition 10.2.9

Il suffit de prouver que (10.26) est vraie pour un certain $C_P > 0$. Supposons qu'il existe une suite $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m)$ d'éléments de $\mathbf{X}_0$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \|\boldsymbol{u}_m\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}_m\|_\Omega^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to\infty} \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}_m\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}_m\|_\Omega^2 = 0.$$

En vertu du Théorème 10.2.7, nous pouvons extraire de $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m)$ une suite (toujours notée $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m)$) qui converge vers $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2+\|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2 = 1$ et $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w} = 0$. Puisque $\partial\Omega$ est simplement connexe, on déduit (voir [45, théorème 8]) qu'il existe un couple $(\varphi, \psi) \in \mathrm{S}$ tel que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (\nabla\varphi, \nabla\psi)$. Nous remarquons alors que $\mathcal{B}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = (0, 0)$. Puisque nous avons supposé $\mathcal{B}$ injectif, nous déduisons $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (0, 0)$. Ceci conduit à une contradiction car nous devons avoir $\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2 = 1$. ■

10.2.5 Cas $A \leq A^\star\mathrm{Id}$, avec $A^\star < 1$, dans un voisinage de la frontière

Revenons à l'étude de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ défini en (10.18), où, pour le moment, $\mathbf{T}$ est un isomorphisme abstrait de $\mathbf{X}$. Dans ce paragraphe, nous supposerons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\Omega$ tel que $A \leq A^\star\mathrm{Id}$ p.p. dans $\mathcal{V}$, avec $A^\star < 1$. De nouveau, $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ désigne une fonction de troncature à support dans $\mathcal{V} \cap \overline{\Omega}$ et égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Définissons l'opérateur $\mathbf{T} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tel que

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} - 2\chi\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{w}). \tag{10.27}$$

C'est un isomorphisme car $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}$.

10.2.6 Caractère Fredholm de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$

Lemme 10.2.11 *Supposons $A \leq A^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $N \leq N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors il existe $k = i\kappa$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$, tel que l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_0$ soit un isomorphisme.*

Preuve. Montrons que la forme sesquilinéaire $a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}$ est coercive pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}$. Pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& |a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}))| \\
= \; & |(A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\Omega + (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w})_\Omega - 2(A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, (\chi\boldsymbol{w}))_\Omega \\
& + \kappa^2 \left((N\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_\Omega - 2(N\boldsymbol{u}, \chi\boldsymbol{w})_\Omega\right)| \\
\geq \; & (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\Omega + (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w})_\Omega + \kappa^2 \left((N\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_\Omega\right) \\
& -2\, |(A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, (\chi\boldsymbol{w}))_\Omega| - 2\kappa^2\, |(N\boldsymbol{u}, \chi\boldsymbol{w})_\Omega|\,.
\end{aligned} \tag{10.28}$$

Mais, pour tout $\eta > 0$, $\alpha > 0$, on a, d'après l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
& 2\, |(A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, (\chi\boldsymbol{w}))_\Omega| \\
\leq \; & 2\, |(\chi A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w})_\Omega| + 2\, |(A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \nabla\chi \times \boldsymbol{w})_\Omega| \\
\leq \; & \eta\, (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + \eta^{-1}\, (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w})_\mathcal{V} \\
& +\alpha\, (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + \alpha^{-1}\, (A(\nabla\chi \times \boldsymbol{w}), \nabla\chi \times \boldsymbol{w})_\mathcal{V} \\
\leq \; & \eta\, (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + \eta^{-1} A^*\, (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w})_\mathcal{V} \\
& +\alpha\, (A\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + C\, \alpha^{-1}\, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_\mathcal{V}
\end{aligned} \tag{10.29}$$

avec $C > 0$ qui dépend uniquement de χ et de A. De même, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
2\, |(N\boldsymbol{u}, \chi\boldsymbol{w})_\Omega| \; & \leq \; \beta(N\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + \beta^{-1}(N\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_\mathcal{V} \\
& \leq \; \beta(N\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\mathcal{V} + \beta^{-1} N^*(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_\mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{10.30}$$

Ainsi, en injectant (10.29) et (10.30) dans (10.28), on obtient, pour tout $\eta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} \left|a^{\mathbf{T}}_{i\kappa}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}))\right| \;\geq\; & (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} \\ & +\kappa^2\left((N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}} + (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{V}}}\right) \\ & +(1-\eta-\alpha)(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})_{\mathcal{V}} + (1-\eta^{-1}A^*)(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_{\mathcal{V}} \\ & +\kappa^2(1-\beta)(N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathcal{V}} + (\kappa^2(1-\beta^{-1}N^*) - C\,\alpha^{-1})(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Choisissons d'abord $\eta > 0$ de sorte qu'on ait à la fois $(1-\eta) > 0$ et $(1-\eta^{-1}A^\star) > 0$ (rappelons que $A^\star < 1$). Puis, prenons $\alpha > 0$ tel que $(1-\eta-\alpha) > 0$. Enfin, fixons $\beta > 0$ tel que $(1-\beta) > 0$ et $(1-\beta^{-1}N^\star) > 0$ (rappelons que $N^\star < 1$). Il ne reste plus qu'à prendre un κ suffisamment grand (en valeur absolue) pour obtenir

$$\left|a^{\mathbf{T}}_{i\kappa}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}))\right| \geq c\,(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)} + \|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)})$$

où c est une constante indépendante de $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$. Ainsi, pour une valeur de κ assez grande, $a^{\mathbf{T}}_{i\kappa}$ est coercive. Avec le théorème de Lax-Milgram, on peut alors conclure que $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_{i\kappa}$ constitue un isomorphisme de $\mathbf{X}_0$ pour un tel κ. ■

Nous déduisons le

Théorème 10.2.12 *Supposons $A \leq A^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Supposons également $N \leq N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ ou $\mathrm{Id} < N_\star\mathrm{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k$ vérifie l'égalité $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k = \mathcal{I}+\mathcal{K}_k$ où $\mathcal{I}$ est un isomorphisme de $\mathbf{X}_0$ indépendant de k, et $\mathcal{K}_k$ est un opérateur compact de $\mathbf{X}_0$.*

Preuve. Définissons $\mathcal{I} : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_0$ l'opérateur satisfaisant, pour tout $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}')) \in \mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$,

$$(\mathcal{I}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}'))_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega)^2} = a_{i\kappa,1/2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\mathbf{T}(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}')),$$

avec $\mathbf{T}$ défini en (10.27) et

$$a_{i\kappa,1/2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{w}')) = (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}')_\Omega - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_\Omega + \kappa^2\left((2^{-1}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')_\Omega - (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}')_\Omega\right).$$

D'après le Lemme 10.2.11 (remarquer que $2^{-1}\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$), nous pouvons choisir $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{I}$ soit un isomorphisme de $\mathbf{X}_0$. Puisque, par hypothèse, $N \leq N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ ou $\mathrm{Id} < N_\star\mathrm{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$, le Théorème 10.2.7 indique que l'injection de $\mathbf{X}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Ceci prouve que $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k - \mathcal{I}$ constitue un opérateur compact de $\mathbf{X}_0$. ■

10.2.7 Caractère discret des valeurs propres de transmission

Sous les hypothèses du Théorème 10.2.12, grâce au théorème de Fredholm analytique, on distingue deux possibilités pour la famille d'opérateurs $\{\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k\}_{k\in\mathbb{C}}$. Ou bien, pour tout $k \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k$ n'est pas injectif (cette situation peut se présenter, cf. exemple de la fin du Chapitre 9). Ou bien il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k$ soit injectif et alors $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$ où $\mathscr{S}$ est un ensemble discret dénombrable du plan complexe.

Théorème 10.2.13 *Supposons $A \leq A^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $N \leq N^\star\mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega\cap\mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Le Lemme 10.2.11 assure qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_{i\kappa}$ soit un isomorphisme de $\mathbf{X}_0$. Ainsi, $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}_k$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$ où $\mathscr{S}$ est un ensemble discret du plan complexe. Pour $k \in \mathbb{C}\backslash\mathscr{S}$, ceci implique que l'unique solution du problème (10.16) (et par conséquent des problèmes (10.11) et (10.12)) est la solution nulle. ■

Théorème 10.2.14 *Supposons $A_+ < 1$. Supposons également l'opérateur $\mathcal{B}$ associé au problème scalaire (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. En utilisant la preuve du Lemme 10.2.11 avec $\chi = 1$, on obtient l'existence de deux constantes C_1, $C_2 > 0$ indépendantes de k telles que, pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) \right| \geq C_1(\|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\|_\Omega^2) - C_2 |k|^2 (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2).$$

En utilisant la Proposition 10.2.9 d'équivalence de normes sur $\mathbf{X}_0$, on déduit que $a_k^{\mathbf{T}}$ est coercive sur $\mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$ pour $|k|^2 < C_1/(C_2\, C_P)$, où C_P est définie en (10.26). Ainsi, l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est un isomorphisme de $\mathbf{X}_0$ pour de petites valeurs (en module) de k. On peut alors conclure avec le théorème de Fredholm analytique. ■

10.2.8 Localisation des valeurs propres de transmission

Réutilisons une nouvelle fois l'astuce de la preuve du théorème 3.6.1 de [102] pour montrer un résultat de localisation des valeurs propres de transmission.

Théorème 10.2.15 *Supposons $A \leq A^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ et $N \leq N^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re e\, k| < \delta\, |\Im m\, k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. Soit $k = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Le Lemme 10.2.11 montre que, pour $|\kappa|$ suffisamment grand, on a l'estimation, pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) \right| \geq C_1(\|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\|_\Omega^2) + C_2\, \kappa^2 (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2), \tag{10.32}$$

où les constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ sont indépendantes de κ.
Considérons maintenant $k = i\kappa\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On vérifie que

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) - a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) \right| \leq C_3\, \kappa^2 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2), \tag{10.33}$$

avec $C_3 > 0$ indépendante de κ. En combinant (10.32) et (10.33), on trouve

$$\begin{aligned} \left| a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) \right| &\geq \left| a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) \right| - C_3\, \kappa^2 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2) \\ &\geq C_1(\|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\|_\Omega^2) + (C_2 - C_3 \left| 1 - e^{2i\theta} \right|) \kappa^2 (\|\boldsymbol{u}\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\Omega^2). \end{aligned}$$

En prenant θ assez petit pour avoir, par exemple, $C_3 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| \leq C_2/2$, on déduit le résultat. ■

10.2.9 Une estimation pour la première valeur propre de transmission

Comme pour le problème scalaire, nous pouvons fournir une estimation pour la première valeur propre de transmission. Précisons que ce genre de résultats peut servir à obtenir des informations concernant les caractéristiques physiques de l'inclusion lorsqu'on dispose des valeurs propres de transmission.

Théorème 10.2.16 *Supposons $A_+ < 1$. Supposons également l'opérateur $\mathcal{B}$ associé au problème (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). Alors si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (A_-(1 - \sqrt{A_+}))/(C_P \max(N_+, 1)(1 + \sqrt{N_+}))$, avec C_P définie en (10.26), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. En reprenant la preuve du Lemme 10.2.11 avec $\chi = 1$, on peut écrire, pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\begin{aligned}
|a_k^{\mathbf{T}}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}))| &= |(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})_\Omega + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_\Omega - 2(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_\Omega \\
&\quad -k^2\left((N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_\Omega + (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_\Omega - 2(N\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_\Omega\right)| \\
&\geq (A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})_\Omega + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_\Omega - 2|(A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_\Omega| \\
&\quad -|k|^2\left((N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_\Omega + (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_\Omega + 2|(N\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_\Omega|\right) \\
&\geq (1-\sqrt{A_+})((A\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})_\Omega + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w})_\Omega) \\
&\quad -|k|^2(1+\sqrt{N_+})((N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_\Omega + (\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_\Omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k \in \mathbb{C}$ tel que $|k|^2 < (A_-(1-\sqrt{A_+}))/(C_P \max(N_+,1)(1+\sqrt{N_+}))$, la forme $a_k^{\mathbf{T}}$ est coercive. ■

10.2.10 Cas $A_\star \mathrm{Id} \leq A$, avec $1 < A_\star$, dans un voisinage de la frontière

Dans ce paragraphe, nous supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\Omega$ tel que $A_\star \mathrm{Id} \leq A$ p.p. dans $\mathcal{V}$, avec $1 < A_\star$. De nouveau, $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0;1])$ désigne une fonction de troncature à support dans $\mathcal{V} \cap \overline{\Omega}$ égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Définissons l'opérateur $\mathbf{T} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tel que $\mathbf{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{w} + 2\chi\boldsymbol{u})$. C'est un isomorphisme car $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}$. Comme dans la section précédente, on prouve successivement les résultats suivants.

Théorème 10.2.17 *Supposons* $\mathrm{Id} < A_\star \mathrm{Id} \leq A$ *p.p. sur* $\Omega \cap \mathcal{V}$. *Supposons aussi* $N \leq N^\star \mathrm{Id} < \mathrm{Id}$ *ou* $\mathrm{Id} < N_\star \mathrm{Id} \leq N$ *p.p. sur* $\Omega \cap \mathcal{V}$. *Alors pour tout* $k \in \mathbb{C}$, *l'opérateur* $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ *vérifie l'égalité* $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} = \mathcal{I} + \mathcal{K}_k$ *où* $\mathcal{I}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{X}_0$ *indépendant de* k, *et* $\mathcal{K}_k$ *est un opérateur compact de* $\mathbf{X}_0$.

Théorème 10.2.18 *Supposons* $\mathrm{Id} < A_\star \mathrm{Id} \leq A$ *et* $\mathrm{Id} < N_\star \mathrm{Id} \leq N$ *p.p. sur* $\Omega \cap \mathcal{V}$. *Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans* $\mathbb{C}$. *De plus, il existe deux constantes positives* ρ *et* δ *telles que si* $k \in \mathbb{C}$ *vérifie* $|k| > \rho$ *et* $|\Re e\, k| < \delta\, |\Im m\, k|$, *alors* k *n'est pas une valeur propre de transmission.*

Théorème 10.2.19 *Supposons* $1 < A_-$. *Supposons également l'opérateur* $\mathcal{B}$ *associé au problème (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse* $N_+ < 1$ *ou* $1 < N_-$*). De plus si* $k \in \mathbb{C}^*$ *vérifie l'estimation* $|k|^2 < (1 - 1/\sqrt{A_-})/(C_P \max(N_+,1)(1+1/\sqrt{N_-}))$, *avec* C_P *définie en (10.26), alors* k *n'est pas une valeur propre de transmission.*

10.3 Quelques questions ouvertes pour le problème de transmission intérieur

Tout au long de ce chapitre, nous avons dû supposer $A - \mathrm{Id}$ et $N - \mathrm{Id}$ positifs ou négatifs dans un voisinage de la frontière pour utiliser la technique de T-coercivité. Naturellement, on peut se poser la question suivante : qu'advient-il lorsque $A - \mathrm{Id}$ et/ou $N - \mathrm{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière ? Pour répondre à cette question, nous allons nous servir de l'analogie entre le problème de transmission intérieur ($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$) et le problème de transmission matériau positif/matériau négatif ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$). Rappelons que la frontière du domaine $\partial\Omega$ pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$) joue le rôle d'interface Σ pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$).

Tout d'abord, la situation dans laquelle $A - \mathrm{Id}$ s'annule dans un voisinage de $\partial\Omega$ pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$) correspond à un cas de contraste égal à -1 au voisinage de Σ pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$). Dans cette configuration, nous savons d'après les résultats du Chapitre 1 que H^1 ne constitue pas un « bon » cadre fonctionnel pour poser les problèmes, les opérateurs associés n'étant pas de type Fredholm en

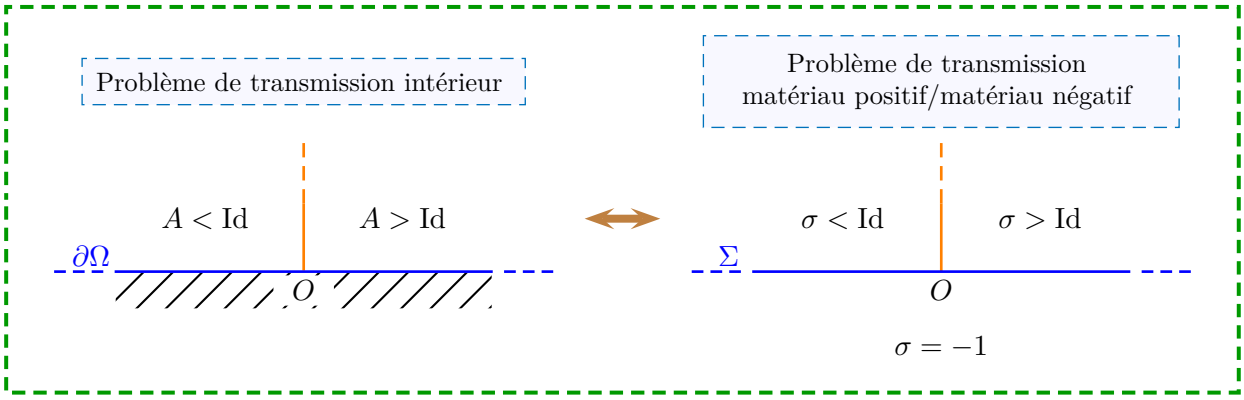


FIGURE 10.2 – Le problème de transmission intérieur présente de fortes analogies avec le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif.

raison de l'existence de singularités localisées sur la frontière/interface. Dans le prochain chapitre, nous verrons comment l'on peut définir un nouveau cadre fonctionnel pour retrouver le caractère Fredholm pour le problème de transmission intérieur lorsque A est identiquement égale à l'identité. Cette démarche, connue depuis fort longtemps pour $(\mathscr{P}_{\mathrm{TI}})$, devrait permettre d'étudier $(\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}})$ dans le cas d'un contraste égal à -1. Cependant, l'adaptation n'est pas si directe. Mais laissons ce cas de côté et supposons dans la suite de la discussion $A \neq \mathrm{Id}$. La détermination d'un cadre fonctionnel pour étudier le problème de transmission intérieur scalaire lorsque $A - \mathrm{Id}$ s'annule sur une partie non vide de la frontière mais pas sur tout $\partial\Omega$ constitue pour le moment un problème ouvert.

Intéressons-nous maintenant à la configuration où $A - \mathrm{Id}$ et/ou $N - \mathrm{Id}$ s'annulent ou « passent par zéro » en un point de la frontière (voir un exemple sur la Figure 10.2). Dans [106], en utilisant le critère de Shapiro-Lopatinskii, les auteurs fournissent une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'ellipticité du problème de transmission scalaire associé à (10.2) dans le cas où A et N sont régulières. La situation où $A - \mathrm{Id}$ change de signe au voisinage de $\partial\Omega$ pour $(\mathscr{P}_{\mathrm{TI}})$ est analogue au cas d'un contraste « passant » par -1 pour $(\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}})$. Il peut alors apparaître les singularités propagatives rencontrées dans les Chapitres 5 et 6. Pour obtenir un problème bien posé au sens de Fredholm, nous savons qu'il est nécessaire de modifier le cadre fonctionnel en ajoutant à l'espace une des singularités propagatives. Cette fois-ci, on peut imaginer utiliser les résultats obtenus lors de l'étude de $(\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}})$ pour traiter $(\mathscr{P}_{\mathrm{TI}})$. Malheureusement, la question de l'injectivité pour une fréquence, essentielle pour appliquer le théorème de Fredholm analytique, semble difficile à résoudre dans le cas du problème de transmission intérieur.

Pour le problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell, les questions ouvertes semblent encore plus nombreuses. En effet, le coefficient N importe également dans le caractère Fredholm car il détermine si oui ou non la perturbation de l'opérateur principal est compacte. La détermination d'un cadre fonctionnel adapté à l'étude du problème de transmission intérieur vectoriel lorsque $A - \mathrm{Id}$ et/ou $N - \mathrm{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière est loin d'être claire. Néanmoins, l'analogie entre $(\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}})$ et $(\mathscr{P}_{\mathrm{TI}})$ demeure vraie pour les équations de Maxwell.

Terminons par quelques mots concernant la question de l'existence de valeurs propres de transmission réelles, question qui revêt une grande importance pour les applications. Le constat est aussi simple qu'accablant : nous ne sommes pas en mesure d'y répondre par la méthode de la T-coercivité. Cette technique permet de retrouver une certaine positivité mais elle présente l'inconvénient majeur de conduire à une perte de symétrie de la forme sesquilinéaire. Ceci empêche d'utiliser les jolis

arguments basés sur le principe du *min-max* (cf. [60, 37]) pour démontrer l'existence de valeurs propres de transmission. À l'heure actuelle, il n'existe pas de tel résultat d'existence lorsque $A - \mathrm{Id}$ et/ou $N - \mathrm{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière.

Chapitre Onze

Bilaplacien avec changement de signe

Sommaire

Introduction **257**
11.1 Formulation du quatrième ordre **258**
11.2 Étude de la formulation du quatrième ordre **260**
11.2.1 Une première approche 260
11.2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur 262
11.2.3 Étude de l'injectivité en 1D 264
11.3 Utilisation de la T-coercivité géométrique **266**
11.4 Bilaplacien avec conditions mixtes **271**
11.4.1 Le paradoxe de Sapongyan pour le cas σ positif 271
11.4.2 Étude dans le cas où σ change de signe 273
11.4.3 Résultats en dimension supérieure 280
11.4.4 Problème posé dans $H_0^1(\Delta)$ 285

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit le problème de transmission intérieur qui apparaît dans la théorie de la diffraction. Ce problème intervient lorsqu'on cherche à reconstruire le support d'une inclusion noyée dans un milieu homogène à partir de la mesure de champs lointains à fréquence fixée. On peut le résumer ainsi : pour une fréquence donnée, existe-t-il un champ incident tel que le champ réfléchi par l'inclusion soit nul ? Les fréquences pour lesquelles la réponse à cette question est positive posent problème pour les méthodes de reconstruction. Une question importante dans la théorie consiste donc à prouver le caractère discret de ces fréquences très particulières.

Lorsqu'on écrit la formulation variationnelle associée à ce problème de transmission intérieur, il apparaît un changement de signe dans la partie principale. Les techniques spectrales usuelles sont inopérantes et l'étude de ce problème n'est pas triviale. Pour faire face à cette difficulté du changement de signe, nous avons employé la technique de la T-coercivité. L'utilisation de cette approche se révèle très simple car les deux fonctions mises en jeu dans ce problème vivent sur le même domaine. Il n'est donc pas nécessaire de recourir aux opérateurs de transfert géométriques comme nous l'avons fait dans le Chapitre 1 relatif à l'étude du problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif. Cependant, le point important du travail que nous avons mené reste de tout de même l'analogie forte existant entre le problème de transmission intérieur

($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$) et le problème de transmission matériau positif/matériau négatif ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$), la frontière du domaine pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$) jouant le rôle d'interface pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$). Pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TI}}$), si nous modélisons le matériau de l'inclusion Ω par deux coefficients physiques A et n avec $\varepsilon = \varepsilon_0 n$, $\mu = \mu_0 A^{-1}$, le problème scalaire pour la composante E_z du champ électrique est bien posé au sens de Fredholm lorsque A est plus grand ou plus petit que l'identité au voisinage de $\partial\Omega$. Ceci est équivalent à imposer un contraste supérieur ou inférieur à -1 dans un voisinage de l'interface pour ($\mathscr{P}_{\mathrm{TPN}}$). Lorsque $A - \mathrm{Id}$ s'annule sur un ouvert non vide rencontrant l'interface, le problème de transmission intérieur n'est pas bien posé au sens de Fredholm en raison de singularités fortes localisées sur la frontière. Ceci empêche d'utiliser le théorème de Fredholm analytique pour prouver le caractère discret des valeurs propres de transmission.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas où A est identiquement égale à l'identité. Autrement dit, nous considérons que le matériau de l'inclusion diffère du matériau de référence uniquement par sa permittivité et non par sa perméabilité. Ce cas de figure semble pouvoir être rencontré en physique et l'intérêt de notre problème n'est pas simplement mathématique même si bien entendu, c'eût été suffisant ! Lorsque $\mathrm{A} = \mathrm{Id}$, pour obtenir un problème bien posé au sens de Fredholm, on peut modifier le cadre fonctionnel en écrivant une formulation du quatrième ordre pour le champ diffracté dans l'inclusion. Celui-ci est alors cherché dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$, fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme H^2 (cf. Section 11.1). Pour justifier la condition sur la frontière, rappelons que le champ diffracté doit être nul en dehors du support de l'inclusion Ω. La partie principale de l'opérateur associé à cette formulation est égale à $\Delta(n-1)^{-1}\Delta\cdot$. Lorsque n est plus petit ou plus grand que un sur tout le domaine, cet opérateur est elliptique et son étude s'effectue sans difficulté. Lorsque $n-1$ change de signe sur Ω, l'on voit apparaître un nouveau problème de transmission. La question du caractère discret des valeurs propres de transmission dans cette configuration est restée ouverte pendant longtemps. Récemment, dans [146], J. Sylvester a réalisé une jolie avancée en démontrant ce résultat lorsque $n-1$ est positif (ou négatif) dans un voisinage de la frontière. Son travail est basé sur une formulation encore différente. Dans ce chapitre, nous souhaitons nous concentrer sur l'étude du problème de bilaplacien avec changement de signe dans la partie principale.

Décrivons à présent le plan. Dans la Section 11.1, nous précisons les notations et introduisons la formulation du quatrième ordre. Dans un second temps, nous étudions cette formulation. Nous prouvons que l'opérateur de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ naturellement associé à cette formulation est toujours de type Fredholm lorsque $n-1 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ reste positif ou négatif dans un voisinage de la frontière et vérifie $(n-1)^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Ceci constitue un résultat surprenant car les hypothèses sont relativement faibles. En particulier, la quantité $n-1$ peut présenter les changements de signe les plus divers à l'intérieur du domaine. Dans la Section 11.3, en utilisant la T-coercivité géométrique, nous montrons le caractère discret des valeurs propres de transmission dans des cas où $n-1$ change de signe dans un voisinage de la frontière, complétant ainsi [146]. Malheureusement, le critère de validité de ce résultat n'est pas très explicite. Dans la dernière section, nous nous intéressons à un problème de bilaplacien avec changement de signe avec des conditions aux limites mixtes. Ce problème n'est pas en lien avec le problème de transmission intérieur mais présente des propriétés mathématiques amusantes.

11.1 Une formulation du quatrième ordre pour le problème de transmission intérieur

Commençons par introduire les notations que nous utiliserons dans ce chapitre. Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 0$, un domaine borné à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne connexe. De façon générale, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, nous notons indifféremment $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ et $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) := (\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))^d$, ainsi que $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées. L'espace $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ est défini comme la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme H^2. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on vérifie que

l'application $(u,v) \mapsto (u,v)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} := (\Delta u, \Delta v)_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Définissons $\|u\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} := \|\Delta u\|_\Omega$ pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$.

Reprenons le problème de transmission intérieur du chapitre précédent avec A identiquement égale à l'identité. Notons w le champ incident et u le champ total. Dans Ω, on a $\Delta u + k^2 n(\boldsymbol{x})u = 0$ et $\Delta w + k^2 w = 0$ où k désigne le nombre d'onde. Imposons à u de satisfaire les relations physiques de continuité du champ et de continuité du flux $[u]|_{\partial\Omega} = [\nu \cdot \nabla u]|_{\partial\Omega} = 0$. Ici, $[\cdot]|_{\partial\Omega}$ désigne un saut sur $\partial\Omega$, arbitrairement fixé. Si w est un champ qui ne rayonne pas, alors on a $u = w$ et $\nu \cdot \nabla u - \nu \cdot \nabla w = 0$ sur $\partial\Omega$. Ici, ν note la normale unitaire à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. En résumé, si w est tel que le champ diffracté est nul, le couple (u,w) vérifie le problème

$$\left|\begin{array}{lcll} \Delta u + k^2 n u & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ u - w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \cdot \nabla u - \nu \cdot \nabla w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{11.1}$$

Le coefficient n est un élément de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles tel que $n \neq 1$ dans Ω. Nous supposons de plus que $(n-1)^{-1}$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Le problème (11.1) est analogue à un problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif dans le cas d'un contraste dans la partie principale égal à -1. Cela vient du fait que nous avons choisi $A = \mathrm{Id}$. Nous savons que pour ce cas, H^1 ne constitue pas un « bon » cadre fonctionnel, les opérateurs associés à ces problèmes n'étant pas de type Fredholm. Ceci empêche l'utilisation du théorème de Fredholm analytique pour prouver le caractère discret des valeurs propres. Nous allons donc modifier ce cadre fonctionnel.

Définition 11.1.1 *Les éléments $k \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe une solution non triviale au problème*

$$\left|\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\textit{Trouver } (u,w) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega) \textit{ avec } u - w \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \textit{ tel que :}} \\ \Delta u + k^2 n u & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w & = & 0 & \textit{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{11.2}$$

sont appelés des valeurs propres de transmission.

Remarque 11.1.2 *Physiquement, il peut paraître étrange de travailler avec des champs appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et non à $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Est-ce simplement un artifice mathématique ? En réalité, les champs incidents w sont des superpositions d'ondes planes. Ils sont donc très réguliers. Mais il est possible de montrer des résultats de densité de cet « espace d'ondes planes » dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Autrement dit, toute fonction de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ ou $\mathrm{L}^2(\Omega)$ peut être approchée avec une précision arbitraire par une superposition d'ondes planes. Par conséquent, si k est une valeur propre de transmission, on peut toujours trouver une combinaison linéaire d'ondes planes qui rayonne « très peu », le « très peu » pouvant être choisi aussi petit que l'on veut. Le message important de cette remarque est donc le suivant. Pour mettre en place les méthodes de reconstruction, il suffit de savoir prouver que les valeurs propres de transmission forment un ensemble discret dénombrable, lesdites valeurs propres de transmission étant définies dans un cadre fonctionnel dans lequel l'espace des ondes planes est dense. Nous renvoyons le lecteur à [61] pour plus de détails concernant ce point.*

Écrivons à présent une formulation du quatrième ordre pour le problème (11.2). Considérons (u,w) un couple d'éléments vérifiant (11.2). Définissons $v := u - w$. Notons que v n'est rien d'autre que le champ diffracté dans l'inclusion. Il satisfait la relation $\Delta v + k^2 n v = k^2(1-n)w$ dans Ω. En divisant de part et d'autre de l'égalité par $(1-n)$ et en utilisant l'équation $\Delta w + k^2 w = 0$, on obtient, au sens des distributions,

$$(\Delta + k^2)\frac{1}{n-1}(\Delta v + k^2 n v) = 0.$$

On déduit que si le couple (u, w) satisfait le problème (11.2) alors $v = u - w$ vérifie le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{n-1}(\Delta v + k^2 n v)(\Delta\varphi + k^2\varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{11.3}$$

Réciproquement, on montre (voir [139, lemme 3.1] pour les détails) que si v est solution de (11.3) alors le couple $(u, w) := ((n-1)^{-1}(\Delta v + k^2 n v) - k^2 v, (n-1)^{-1}(\Delta v + k^2 n v))$ vérifie le problème (11.2). Sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$, définissons la forme sesquilinéaire

$$a_k(v, \varphi) \quad = \quad ((n-1)^{-1}(\Delta v + k^2 n v), (\Delta\varphi + k^2\varphi))_\Omega, \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega).$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur continu $A_k : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ associé à a_k tel que

$$(A_k v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = a_k(v, \varphi), \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega). \tag{11.4}$$

Supposons pour un court moment qu'il existe $k_0 \in \mathbb{C}$ tel que A_{k_0} définisse un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Pour tout $k \in \mathbb{C}$, il est aisé de prouver que A_k diffère de A_{k_0} d'une perturbation compacte. Avec le théorème de Fredholm analytique, on conclut alors, puisque A_{k_0} est injectif, que A_k est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est un ensemble discret dénombrable dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, pour montrer que l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable, il est suffisant de montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{C}$ tel que A_{k_0} soit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$.

Lorsque $n(\boldsymbol{x}) > 1$ p.p. sur Ω, la forme bilinéaire a_0 est coercive sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ et donc A_0 est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Dans cette configuration, le raisonnement précédent s'applique et l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable. Lorsque $0 < C_1 \leq n(\boldsymbol{x}) \leq C_2 < 1$, où C_1, C_2 sont des constantes, ce résultat est également vrai car $-a_0$ est coercive sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Ces résultats sont connus depuis [139]. Lorsque $n - 1$ change de signe, la forme a_k n'est ni coercive ni « coercive+compacte » sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Les valeurs propres du problème (11.3) constituent-elles encore un ensemble discret dénombrable dans ce cas de figure ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons nous concentrer sur la partie principale (la partie qui contient les dérivées d'ordre le plus élevé) de l'opérateur A_k. Introduisons la forme sesquilinéaire

$$b(v, \varphi) \quad := \quad ((n-1)^{-1}\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega, \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$$

ainsi que l'opérateur continu $B : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ associé tel que

$$(Bv, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = b(v, \varphi), \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega). \tag{11.5}$$

Pour simplifier la présentation, nous notons $\sigma := (n-1)^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

11.2 Étude de la formulation du quatrième ordre

Avant d'étudier l'opérateur B, intéressons-nous au problème obtenu en remplaçant dans (11.3) la condition « $\partial_\nu v = 0$ sur $\partial\Omega$ » par la condition « $\sigma\Delta v = 0$ sur $\partial\Omega$ ».

11.2.1 Une première approche

Pour $f \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$, considérons le problème

$$\left| \begin{array}{lcll} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) & & & \text{tel que :} \\ \Delta\sigma\Delta u & = & f & \\ \sigma\Delta u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{11.6}$$

Ici, nous imposons des conditions aux limites mixtes : la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est qualifiée d'*essentielle*, elle apparaît dans l'espace, tandis que la condition $\sigma\Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$ est dite *naturelle*. La trace $\sigma\Delta u = 0$ est définie au sens faible. Nous dirons que la fonction $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ telle que $\Delta v \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$ vérifie $v = 0$ sur $\partial\Omega$ si et seulement si on a

$$\langle \Delta v, v' \rangle_\Omega = \int_\Omega v \Delta v', \qquad \forall v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega),$$

la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ désignant ici le crochet de dualité $(\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^* \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Avec ces conditions aux limites, nous allons voir qu'il est très facile de résoudre le problème (11.6) en deux étapes. Pour fixer les idées, supposons Ω de classe $\mathscr{C}^2$ et donnons-nous $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Il existe un unique $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta v = f$. Notons ensuite u l'unique fonction vérifiant $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et $\Delta u = \sigma^{-1} v$. Puisque Ω est régulier, nous savons que u appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Cet élément satisfait donc le problème (11.6). Remarquons bien que pour obtenir ce résultat, les seules hypothèses faites sur σ sont $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Ainsi, σ peut très bien changer de signe. Cependant, ce changement de signe ne semble pas avoir les conséquences du changement de signe de σ pour l'opérateur $\mathrm{div}\,(\sigma\nabla\cdot) : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Précisons l'étude du problème (11.6).

Avec le théorème de Lax-Milgram, on montre que le produit scalaire $(u, v) \mapsto (u, v)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega$ que nous avons défini sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ constitue également un produit scalaire sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Introduisons la forme sesquilinéaire

$$\tilde{b}(v, \varphi) \quad := \quad (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega, \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega),$$

ainsi que l'opérateur continu de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ associé, défini par

$$(\tilde{B}v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = \tilde{b}(v, \varphi), \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega).$$

Nous allons voir qu'il est très facile de construire l'inverse de l'opérateur $\tilde{B}$.

Théorème 11.2.1 *Supposons l'ouvert Ω de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ tel que $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, l'opérateur $\tilde{B}$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$.*

Preuve. Définissons l'opérateur $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que, pour tout $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, $\mathtt{T}u$ est défini comme l'unique solution du problème « trouver $\mathtt{T}u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ satisfaisant $\Delta(\mathtt{T}u) = \sigma^{-1}\Delta u$ ». Puisque nous avons supposé Ω de classe $\mathscr{C}^2$, $\mathtt{T}u$ est bien un élément de $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Pour tout $u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, nous pouvons écrire

$$(\tilde{B}(\mathtt{T}u), v)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = (\sigma\Delta(\mathtt{T}u), \Delta v)_\Omega = (\Delta u, \Delta v)_\Omega.$$

Par conséquent, l'opérateur $\tilde{B} \circ \mathtt{T}$ est égal à l'identité de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Puisque $\tilde{B}$ est autoadjoint, on déduit que $\tilde{B}$ définit un isomorphisme avec $\tilde{B}^{-1} = \mathtt{T}$. ■

Proposons une autre preuve de ce résultat, légèrement différente, en revenant à la résolution du problème (11.6) en deux étapes. Cela constituera un avant goût de la fin de ce chapitre. Commençons par démontrer le

Lemme 11.2.2 *Supposons l'ouvert Ω de classe $\mathscr{C}^2$. Alors pour tout $f \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$, il existe une unique solution au problème*

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad \textit{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega v\Delta v' = \langle f, v' \rangle_\Omega, \qquad \forall v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \end{array} \right. , \tag{11.7}$$

la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ désignant le crochet de dualité $(\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^* \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Preuve. Considérons $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega v\Delta v' = 0$ pour tout $v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$. En testant avec v' l'unique solution du problème « trouver $v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que $\Delta v' = v$ », on déduit $\int_\Omega v^2 = 0$. Ainsi, le problème (11.7) possède au plus une solution. Maintenant, considérons $f \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega))^*$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $F \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega \Delta F\Delta v' = \langle f, v'\rangle_\Omega$ pour tout $v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$. La fonction $v = \Delta F \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ est alors une solution du problème (11.7). Ceci termine la preuve. ■

Preuve du Théorème 11.2.1 (bis). Considérons $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \sigma\Delta u\Delta v' = 0, \qquad \forall v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega).$$

D'après le Lemme 11.2.2, on a alors nécessairement $\sigma\Delta u = 0$ et donc $\Delta u = 0$. Ceci implique $u = 0$ et prouve que le problème (11.6) possède au plus une solution. Considérons ensuite $f \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega))^*$. D'après le Lemme 11.2.2, il existe un unique $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega v\Delta v' = \langle f, v'\rangle_\Omega, \qquad \forall v' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega).$$

Définissons alors u l'unique solution du problème « trouver $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ tel que $\Delta u = \sigma^{-1}v$ ». Cette fonction est une solution du problème (11.6). ■

Remarque 11.2.3 *Pour démontrer le Théorème 11.2.1, nous avons supposé Ω de classe $\mathscr{C}^2$. Bien entendu, cette hypothèse peut-être affaiblie. Il suffit en fait que l'ouvert Ω soit tel que l'opérateur Laplacien avec condition de Dirichlet homogène soit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. C'est par exemple le cas lorsque Ω est convexe à frontière lipschitzienne. Par contre, en 2D, lorsque Ω présente un ou plusieurs coins rentrants, le Laplacien avec condition de Dirichlet homogène n'est pas un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$. Dans ce cas, nous verrons dans la Section 11.4 que l'opérateur $\tilde{B} : \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ ne définit pas toujours un isomorphisme. Un noyau de dimension finie peut apparaître.*

11.2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur

Revenons à l'étude de l'opérateur B introduit en (11.5). Nous allons prouver qu'il est Fredholm d'indice zéro sous l'hypothèse

$(\mathscr{H}_\sigma)$ Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus que $\sigma(\boldsymbol{x}) \geq C_1 > 0$ p.p. sur $\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}$ ou $\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C_2 < 0$ p.p. sur $\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}$, où C_1, C_2 sont des constantes et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$.

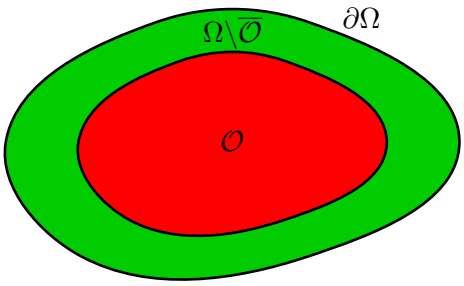


FIGURE 11.1 – La fonction σ est supposée uniformément positive ou uniformément négative dans la région verte $\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}$.

En d'autres termes, nous supposons qu'il existe un voisinage de $\partial\Omega$ sur lequel on a $n > 1$ presque partout ou $n < 1$ presque partout. Par contre, en dehors de ce voisinage, $n - 1$ peut changer de signe. Pour prouver que B définit un opérateur Fredholm d'indice zéro, nous allons construire une paramétrix à droite pour B, *i.e.* un opérateur borné $\mathtt{T}$ tel que $B \circ \mathtt{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$ où $\mathcal{I} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ est un isomorphisme et $\mathcal{K} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ un opérateur compact.

Théorème 11.2.4 *Supposons que σ satisfasse l'hypothèse $(\mathscr{H}_\sigma)$. Alors l'opérateur $B : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ vérifiant $(Bv, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega$, pour tout $(v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$, est Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. Présentons la preuve dans le cas $\sigma \geq C_1 > 0$ dans un voisinage de la frontière $\partial\Omega$. En travaillant sur l'opérateur $-B$ lorsque $\sigma \leq C_2 < 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$, on peut en effet se ramener à cette configuration. Introduisons $\zeta \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega, [0; 1])$ une fonction de troncature égale à 1 sur $\mathcal{O}$. Remarquons que $1 - \zeta$ est un élément de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ qui vaut 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Considérons à présent v un élément de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. La fonction $(1 - \zeta)v$ appartient à $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ et par définition, on a pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$,

$$(\sigma\Delta((1 - \zeta)v), \Delta\varphi)_\Omega = b((1 - \zeta)v, \varphi) = (B((1 - \zeta)v), \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)}.$$

Ceci permet d'écrire, en développant $\Delta((1 - \zeta)v)$,

$$((1 - \zeta)\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (B((1 - \zeta)v), \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} + (\sigma(2\nabla v \cdot \nabla\zeta + v\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \tag{11.8}$$

Sur le support de ζ, il faut procéder un peu différemment car σ change de signe. Définissons ψ l'unique élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta\psi = \sigma^{-1}\Delta v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Les résultats classiques de régularité intérieure (voir [88, théorème 2.1.3]) indiquent qu'on a, pour tout $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, $\chi\psi \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ avec l'estimation $\|\chi\psi\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} \leq C\|\sigma^{-1}\Delta v\|_\Omega \leq C\|v\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)}$. En particulier, la fonction $\zeta\psi$ appartient à $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ et dépend continûment de v. Puisque $(\sigma\Delta(\zeta\psi), \Delta\varphi)_\Omega = (B(\zeta\psi), \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)}$, l'on déduit, en développant $\Delta(\zeta\psi)$,

$$(\zeta\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (\sigma\zeta\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = (B(\zeta\psi), \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} - (\sigma(2\nabla\psi \cdot \nabla\zeta + \psi\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \tag{11.9}$$

Définissons l'opérateur $\mathtt{T} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ tel que $\mathtt{T}v = \zeta\psi + (1 - \zeta)v$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs $\mathcal{I} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ et $\mathcal{K} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ tels que, pour tout $(v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} &= ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega \\ (\mathcal{K}v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} &= (\sigma(2\nabla(\psi - v) \cdot \nabla\zeta + (\psi - v)\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Avec ces définitions, nous avons la relation $B \circ \mathtt{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$. On vérifie sans mal que $\mathcal{I} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ définit un isomorphisme car la forme $(v, \varphi) \mapsto ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega$ est coercive sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Le Lemme 11.2.5 ci-dessous indique que $\mathcal{K} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ est compact. Par conséquent, l'opérateur $\mathtt{T}$ définit bien une paramétrix à droite pour B. Puisque B est autoadjoint, nous déduisons que c'est un opérateur Fredholm d'indice zéro. ■

Lemme 11.2.5 *L'opérateur $\mathcal{K} : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ défini en (11.10) est compact.*

Preuve. Considérons (φ_n) une suite bornée d'éléments de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Montrons qu'on peut en extraire une sous-suite telle que $(\mathcal{K}\varphi_n)$ converge dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. D'après la définition (11.10) de l'opérateur $\mathcal{K}$, nous pouvons écrire

$$\|\mathcal{K}\varphi_n\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)}^2 \leq C\,\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} \left(\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + \|\psi_n\|_{\mathrm{H}^1(\operatorname{supp}\zeta)}\right).$$

Ci-dessus « $\operatorname{supp}\zeta$ » désigne le support de ζ. Rappelons qu'en vertu du résultat de régularité intérieure, on a l'estimation $\|\psi_n\|_{\mathrm{H}^2(\operatorname{supp}\zeta)} \leq C\,\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)}$. Puisque l'injection de $\mathrm{H}^2(\Omega)$ (resp. $\mathrm{H}^2(\operatorname{supp}\zeta)$) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (resp. $\mathrm{H}^1(\operatorname{supp}\zeta)$) est compacte, nous pouvons extraire de (φ_n) une sous-suite telle que (φ_n) et (ψ_n) convergent respectivement dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\mathrm{H}^1(\operatorname{supp}\zeta)$ fortement. Définissons $\varphi_{mn} := \varphi_m - \varphi_n$ pour tout m, $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'estimation

$$\|\mathcal{K}\varphi_{mn}\|^2_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} \leq C\,\|\varphi_{mn}\|_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)}\left(\|\varphi_{mn}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + \|\psi_{mn}\|_{\mathrm{H}^1(\operatorname{supp}\zeta)}\right),$$

nous déduisons que $(\mathcal{K}\varphi_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$. Par conséquent, $(\mathcal{K}\varphi_n)$ converge. ■

Pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur A_k défini en (11.4) diffère de B d'une perturbation compacte. Nous pouvons donc énoncer le

Corollaire 11.2.6 *Supposons que σ satisfasse l'hypothèse $(\mathscr{H}_\sigma)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur A_k défini en (11.4) est Fredholm d'indice zéro.*

Remarque 11.2.7 *De façon quelque peu surprenante, ces résultats indiquent que l'opérateur $\Delta\sigma\Delta\cdot$, contrairement à l'opérateur $\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot)$, n'est pas sensible aux changements de signe de σ tant que ceux-ci ont lieu à l'intérieur du domaine Ω. Notons que les changements de signe de σ peuvent s'effectuer de façon très irrégulière. Ainsi, supposons Ω divisé en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_1(\boldsymbol{x}) \geq C_1 > 0$ p.p. dans Ω_1 et $\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_2(\boldsymbol{x}) \leq C_2 < 0$ p.p. dans Ω_2. Définissons l'interface $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$. L'opérateur $\Delta\sigma\Delta\cdot$ reste de type Fredholm même lorsque Σ présente des coins ou des « cusps ». Maintenant, considérons un domaine symétrique par rapport à l'interface située, pour fixer les idées, en $y = 0$. Supposons qu'on ait $\sigma_1(x, y) = -\sigma_2(x, -y)$. Dans ce cas, on ne peut utiliser le principe de symétrie pour construire un noyau de dimension infinie pour l'opérateur $\Delta\sigma\Delta\cdot$ comme nous l'avons fait pour l'opérateur $\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot)$ (cf. Théorème 1.5.1). Le lecteur vérifiera en effet que les conditions de transmission à l'interface $[u]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = [\sigma\Delta u]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla(\Delta u)]|_\Sigma = 0$ sont trop « rigides ».*

Remarque 11.2.8 *Lorsque σ change de signe dans tout voisinage de $\partial\Omega$, il semble qu'il existe des configurations pour lesquelles l'opérateur B ne soit pas de type Fredholm en raison de l'existence de singularités ponctuelles qui « sortent » de H^2. Le calcul de ces singularités fait actuellement l'objet du stage de Jérémy Firozaly.*

11.2.3 Étude de l'injectivité en 1D

Dans ce paragraphe, nous souhaitons savoir si le résultat que nous venons d'obtenir est sous-optimal ou non. Plus précisément, nous avons prouvé que l'opérateur B est Fredholm d'indice 0 lorsque σ reste positif ou négatif dans un voisinage de $\partial\Omega$. Comme pour l'opérateur $\tilde{B}$, il se pourrait qu'on ait une propriété plus forte du type : B définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ dès lors que σ reste positif ou négatif dans un voisinage de $\partial\Omega$. Nous allons voir sur des exemples en 1D pour lesquels on peut effectuer tous les calculs explicitement que ceci n'est pas vrai.

◇ Exemple 1. Définissons les domaines $\Omega =]a; b[$, $\Omega_1 =]a; 0[$, $\Omega_2 =]0; b[$, avec $a < 0$ et $b > 0$. Introduisons la fonction σ telle que $\sigma = \sigma_1$ sur Ω_1, $\sigma = \sigma_2$ sur Ω_2. Ici, $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$ sont des constantes. On s'intéresse au problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^2_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ \Delta\sigma\Delta u = f \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega).\end{array}\right. \tag{11.11}$$

En utilisant la preuve du Théorème 11.2.4, on montre que l'opérateur borné de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ canoniquement associé à ce problème est Fredholm d'indice zéro. Pour savoir si c'est un isomorphisme, il est donc suffisant d'étudier la question de l'injectivité. Considérons donc u un élément de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ vérifiant le

problème (11.11) avec $f = 0$. Puisque $\Delta\Delta u = 0$ de part et d'autre de l'interface, en utilisant les conditions aux limites $u(a) = u(b) = u^{(1)}(a) = u^{(1)}(b) = 0$, on peut écrire

$$u_1(x) = A_1(x-a)^3 + B_1(x-a)^2 \text{ pour } x \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad u_2(x) = A_2(x-b)^3 + B_2(x-b)^2 \text{ pour } x \in \Omega_2.$$

Les conditions de transmission à l'interface $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1^{(1)}(0) = u_2^{(1)}(0)$, $\sigma_1 u_1^{(2)}(0) = \sigma_2 u_2^{(2)}(0)$ et $\sigma_1 u_1^{(3)}(0) = \sigma_2 u_2^{(3)}(0)$ imposent :

$$\begin{array}{rcl} -a^3A_1 + a^2B_1 & = & -b^3A_2 + b^2B_2 \ ; \\ \sigma_1(-6aA_1 + 2B_1) & = & \sigma_2(-6bA_2 + 2B_2) \ ; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3a^2A_1 - 2aB_1 & = & 3b^2A_2 - 2b^2B_2 \ ; \\ 6\sigma_1 A_1 & = & 6\sigma_2 A_2. \end{array}$$

On trouve qu'il existe une solution non nulle si et seulement si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ satisfait

$$\kappa_\sigma^2 + \left(-4(b/a) + 6(b/a)^2 - 4(b/a)^3\right)\kappa_\sigma + (b/a)^4 = 0.$$

On peut vérifier que le déterminant de ce polynôme est toujours positif pour $(b/a) \in \mathbb{R}_-^*$. Ainsi, pour tout $(b/a) \in \mathbb{R}_-^*$, il existe deux valeurs du contraste

$$\kappa_\sigma = \left(2 - 3(b/a) + 2(b/a)^2 \pm 2|(b/a) - 1|\sqrt{((b/a)^2 - (b/a) + 1)}\right)(b/a)$$

pour lesquelles il existe une solution non nulle au problème (11.11). Par un calcul de routine, on montre que ces deux racines sont strictement négatives pour $(b/a) \in \mathbb{R}_-^*$. Ceci est plutôt rassurant car la forme bilinéaire associée au problème (11.11) est coercive lorsque $\kappa_\sigma > 0$. Dans le cas d'un domaine symétrique par rapport à l'interface, *i.e.* pour $b = -a$, l'opérateur n'est pas injectif pour $\kappa_\sigma = -4 \pm \sqrt{3}$. Résumons l'idée apportée par ces calculs : à géométrie fixée, l'opérateur borné canoniquement associé au problème (11.11) est Fredholm d'indice 0 mais *n'est pas toujours injectif.*

◇ Exemple 2. Étudions à présent un problème plus proche de celui présenté dans le §11.2.2, avec un changement de signe de σ à l'intérieur du domaine. Définissons les ouverts $\Omega =]-1;1[$, $\Omega_1 =]-1;-\delta[\cup]\delta;1[$, $\Omega_2 =]-\delta;\delta[$, avec $0 < \delta < 1$. Introduisons la fonction σ telle que $\sigma = \sigma_1$ sur Ω_1, $\sigma = \sigma_2$ sur Ω_2. De nouveau, $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$ sont des constantes. D'après le Théorème 11.2.4, pour tout contraste $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^*$, l'opérateur borné de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ canoniquement au problème (11.11) est Fredholm d'indice zéro. En procédant comme dans l'Exemple 1, on prouve que c'est en fait un isomorphisme si et seulement si

$$\kappa_\sigma \notin \{\delta^3/(\delta^3 - 1), \delta/(\delta - 1)\}.$$

De nouveau, ceci montre que le résultat du paragraphe précédent n'est pas sous-optimal au sens où B n'est pas toujours un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$.

◇ Exemple 3. Reprenons la géométrie de l'Exemple 1 ci-dessus. Intéressons-nous au problème

$$\left|\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \ \text{ tel que :}} \\ \Delta\sigma\Delta u & = & f & \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \\ \sigma\Delta u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \ . \end{array}\right. \tag{11.12}$$

Étudions l'injectivité du problème (11.12). Considérons u un élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ vérifiant le problème (11.11) avec $f = 0$. En utilisant les conditions aux limites, nous pouvons écrire

$$u_1(x) = A_1(x-a)^3 + B_1(x-a) \text{ pour } x \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad u_2(x) = A_2(x-b)^3 + B_2(x-b) \text{ pour } x \in \Omega_2.$$

Les conditions de transmission à l'interface $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1^{(1)}(0) = u_2^{(1)}(0)$, $\sigma_1 u_1^{(2)}(0) = \sigma_2 u_2^{(2)}(0)$ et $\sigma_1 u_1^{(3)}(0) = \sigma_2 u_2^{(3)}(0)$ imposent :

$$\begin{array}{rcl} a^3A_1 + aB_1 & = & b^3A_2 + bB_2 \ ; \\ 6\sigma_1 aA_1 & = & 6\sigma_2 aA_2 \ ; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3a^2A_1 + aB_1 & = & 3b^2A_2 + bB_2 \ ; \\ 6\sigma_1 A_1 & = & 6\sigma_2 A_2. \end{array}$$

Ceci implique $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$. Par conséquent le problème (11.12) est toujours injectif. Ceci est cohérent avec le résultat du Théorème 11.2.1 qui indique que l'opérateur $\tilde{B}$ associé à ce problème constitue un isomorphisme.

Pour prouver le caractère discret des valeurs propres de transmission, nous avons besoin de savoir montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $A_k : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ défini en (11.4) constitue un isomorphisme (rappelons que $B = A_0$). La technique que nous avons développée dans ce paragraphe ne permet pas d'obtenir ce résultat. Nous renvoyons le lecteur à [146] pour une preuve basée sur l'étude d'une formulation équivalente à (11.2). Dans ce papier, l'auteur a besoin de l'hypothèse $n-1$ plus grand ou plus petit que zéro dans un voisinage de la frontière $\partial\Omega$.

Remarque 11.2.9 *Pour aller plus loin et montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que A_k soit injectif, sans hypothèse de signe de $n-1$, on peut imaginer utiliser la technique d'addition de variable permettant d'étudier les opérateurs à paramètre (cf. [1] ainsi que les preuves des Lemmes 3.1.11 et 8.3.6). L'idée consiste à remplacer le paramètre spectral k par une dérivée $i\partial_z$ par rapport à une nouvelle variable z. En établissant une estimation a priori en 3D, on peut alors prouver le résultat d'injectivité désiré en 2D. Nous travaillons actuellement sur cette méthode.*

Dans la prochaine section, nous allons étudier l'opérateur B en utilisant l'approche $\mathtt{T}$-coercivité géométrique du Chapitre 1. Cela permettra de prouver facilement l'injectivité pour B et donc le caractère discret des valeurs propres de transmission. Indiquons également que nous serons en mesure de démontrer ces résultats dans des configurations pour lesquelles $n-1$ change de signe sur la frontière. Malheureusement, le critère que nous allons devoir imposer à $n-1$ est difficile à vérifier *a priori*.

11.3 Utilisation de la $\mathtt{T}$-coercivité géométrique

Supposons Ω divisé en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Faisons l'hypothèse $\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_1(\boldsymbol{x}) \geq C_1 > 0$ p.p. dans Ω_1 et $\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_2(\boldsymbol{x}) \leq C_2 < 0$ p.p. dans Ω_2. Définissons l'interface $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$. Notons $\Gamma_1 := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ et $\Gamma_2 := \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$. Introduisons les constantes

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1 < \infty\,, \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2| < \infty\,, \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 > 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2| > 0.$$

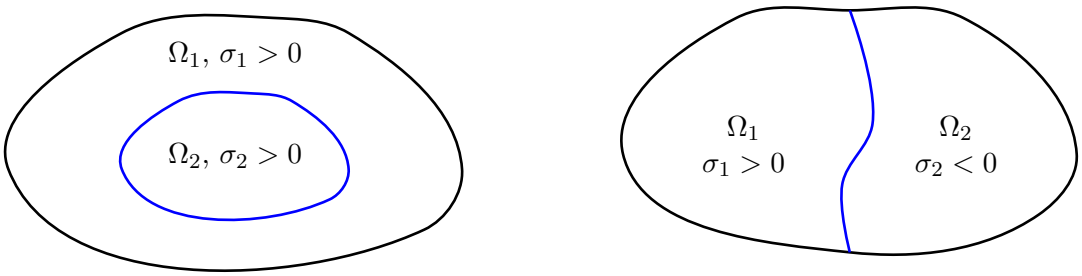


FIGURE 11.2 – Exemples de géométries considérées.

Cette fois-ci, nous avons à construire des isomorphismes $\mathtt{T}$ de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ tels que la forme $(v, \varphi) \to b(v, \mathtt{T}\varphi) = (\sigma\Delta v, \Delta(\mathtt{T}\varphi))_\Omega$ soit coercive sur $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Au niveau de l'interface, les éléments de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ se raccordent en trace et en trace normale. Plus précisément, si $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ alors on a $[u]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = 0$ où $[\cdot]|_\Sigma$ correspond au saut sur Σ. Ici, ν_Σ désigne le vecteur unitaire normal à Σ dirigé, pour fixer les idées, vers Ω_2. À cause de la condition de raccord de trace

normale, nous n'allons pas pouvoir utiliser les opérateurs du Chapitre 1.

Pour $k = 1, 2$, introduisons l'espace des restrictions des éléments de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ à Ω_k :

$$\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k},\, v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega) \right\}.$$

Nous notons $\mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2))$ l'espace des opérateurs bornés de $\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ dans $\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)$. L'espace $\mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1))$ est défini de façon analogue. De plus, si $R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2))$ et $R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1))$, nous définissons

$$\|R_1\| := \sup_{v \in \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1),\, \|\Delta v\|_{\Omega_1}=1} \|\Delta(R_1 v)\|_{\Omega_2} \quad \text{et} \quad \|R_2\| := \sup_{v \in \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2),\, \|\Delta v\|_{\Omega_2}=1} \|\Delta(R_2 v)\|_{\Omega_1}.$$

Introduisons les espaces d'« opérateurs de transfert »

$$\mathcal{R}_1 := \{R_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)) \,|\, R_1 v|_\Sigma = v|_\Sigma \text{ et } \nu_\Sigma \cdot \nabla(R_1 v)|_\Sigma = \nu_\Sigma \cdot \nabla v|_\Sigma,\ \forall v \in \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)\};$$
$$\mathcal{R}_2 := \{R_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2), \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)) \,|\, R_2 v|_\Sigma = v|_\Sigma \text{ et } \nu_\Sigma \cdot \nabla(R_2 v)|_\Sigma = \nu_\Sigma \cdot \nabla v|_\Sigma,\ \forall v \in \mathrm{H}^2_{0,\Gamma_2}(\Omega_2)\}.$$

Remarquons que ces espaces ne sont pas vides. Considérons par exemple l'opérateur R_1 qui à $\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$ fait correspondre l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } R_1\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega_2) \text{ tel que :}} \\ \Delta\sigma_2\Delta(R_1\varphi) & = & 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ R_1\varphi & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \nu \cdot \nabla(R_1\varphi) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ R_1\varphi & = & \varphi & \text{sur } \Sigma \\ \nu_\Sigma \cdot \nabla(R_1\varphi) & = & \nu_\Sigma \cdot \nabla\varphi & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{11.13}$$

De la même façon, notons R_2 l'opérateur qui à $\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$ fait correspondre l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } R_2\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega_1) \text{ tel que :}} \\ \Delta\sigma_1\Delta(R_2\varphi) & = & 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ R_2\varphi & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \nu \cdot \nabla(R_2\varphi) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ R_2\varphi & = & \varphi & \text{sur } \Sigma \\ \nu_\Sigma \cdot \nabla(R_2\varphi) & = & \nu_\Sigma \cdot \nabla\varphi & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{11.14}$$

On vérifie sans mal que R_1 appartient à $\mathcal{R}_1$ tandis que R_2 constitue un élément de $\mathcal{R}_2$. Maintenant, pour $R_1 \in \mathcal{R}_1$ et $R_2 \in \mathcal{R}_2$ fixés, définissons les opérateurs

$$\mathtt{T}_1\varphi := \left|\begin{array}{ll} \varphi_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ -\varphi_2 + 2R_1\varphi_1 & \text{sur } \Omega_2 \end{array}\right. \quad ; \quad \mathtt{T}_2\varphi := \left|\begin{array}{ll} \varphi_1 - 2R_2\varphi_2 & \text{sur } \Omega_1 \\ -\varphi_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{array}\right. .$$

Pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, on a $[\mathtt{T}_1\varphi]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla(\mathtt{T}_1\varphi)]|_\Sigma = 0$ et $[\mathtt{T}_2\varphi]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla(\mathtt{T}_2\varphi)]|_\Sigma = 0$. Par ailleurs, on note que $\mathtt{T}_1 \circ \mathtt{T}_1 = \mathtt{T}_2 \circ \mathtt{T}_2 = \mathrm{Id}$. Ceci prouve que $\mathtt{T}_1$ et $\mathtt{T}_2$ sont des isomorphismes de $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$. Par conséquent, nous avons les équivalences

$$\begin{array}{rl} & [v \text{ vérifie } b(v,\varphi) = l(\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)] \\ \Leftrightarrow & [v \text{ vérifie } b(v,\mathtt{T}_1\varphi) = l(\mathtt{T}_1\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)] \\ \Leftrightarrow & [v \text{ vérifie } b(v,\mathtt{T}_2\varphi) = l(\mathtt{T}_2\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)]\,. \end{array}$$

Évaluons à présent $b(v, \mathtt{T}_1 v)$ pour $v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$. Avec l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{array}{rcl} b(v,\mathtt{T}_1 v) & = & (\sigma_1\Delta v, \Delta v)_{\Omega_1} + (|\sigma_2|\Delta v, \Delta v)_{\Omega_2} - 2(|\sigma_2|\Delta v, \Delta(R_1 v))_{\Omega_2} \\ & \geq & ((\sigma_1 - \sigma_2^+\|R_1\|^2\eta^{-1})\Delta v, \Delta v)_{\Omega_1} + (|\sigma_2|(1-\eta)\Delta v, \Delta v)_{\Omega_2}. \end{array}$$

En calculant de la même façon $b(v, \mathtt{T}_2 v)$ pour $v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, nous pouvons alors énoncer le

Théorème 11.3.1 *Supposons* $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \inf_{R_1\in\mathcal{R}_1}\|R_1\|^2$ *ou* $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \inf_{R_2\in\mathcal{R}_2}\|R_2\|^2$. *Alors* $B : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ *définit un isomorphisme.*

Remarque 11.3.2 *Le résultat de ce théorème est plus riche que celui du Théorème 11.2.4 car ici, on obtient également l'injectivité de* B. *Par contre, bien entendu, les hypothèses sont plus fortes et surtout, ne sont pas vérifiables* a priori *car il est délicat d'évaluer les valeurs* $\inf_{R_1\in\mathcal{R}_1}\|R_1\|^2$ *et* $\inf_{R_2\in\mathcal{R}_2}\|R_2\|^2$.

En remarquant que l'opérateur A_k est inversible pour des k petits en valeur absolue et en utilisant le théorème de Fredholm analytique, on déduit le

Corollaire 11.3.3 *Supposons* $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \inf_{R_1\in\mathcal{R}_1}\|R_1\|^2$ *ou* $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \inf_{R_2\in\mathcal{R}_2}\|R_2\|^2$. *Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans* $\mathbb{C}$.

Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'approcher par une méthode éléments finis la solution, en supposant qu'elle est définie de façon unique, du problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \text{ tel que :}\\ \Delta\sigma\Delta u \;=\; f.\end{array}\right. \tag{11.15}$$

Nous prenons $\Omega := \{(x,y) \in]-5;5[\times]-3;3[\}$, $\Omega_2 := \{(x,y) \in]-2.5;2.5[\times]-1.5;1.5[\}$ et $\Omega_1 := \Omega\backslash\overline{\Omega_2}$. Nous fixons le terme source f tel que $f = 1$ sur Ω_1 et $f = 0$ sur Ω_2. Nous choisissons σ vérifiant $\sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 = 1$ et $\sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2$ constant. Rappelons que nous définissons le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. Introduisons le problème approché

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que :}\\ (\sigma\Delta u_h, \Delta v_h)_\Omega \;=\; (f, v_h)_\Omega, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,\end{array}\right. \tag{11.16}$$

où $\mathcal{V}_h$ est un espace d'approximation de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Nous utilisons l'élément fini de Morley qui est codé dans le logiciel *Freefem++*. Nous renvoyons le lecteur à [118, 32] pour une description de cet élément fini conforme. Pour la visualisation des résultats, nous utilisons les logiciels *Matlab* et *Paraview*.

D'après le Théorème 11.2.4, nous savons que l'opérateur B associé au problème (11.15) est Fredholm d'indice zéro. Par conséquent, en supposant B injectif, nous savons que le problème (11.15) possède une et une seule solution. Mais même sous cette hypothèse, en raison du caractère non fortement elliptique de l'opérateur B, il n'est pas évident de prouver que le problème approché (11.16) est bien posé, y compris pour h suffisamment petit. Nous laissons cette question de la justification de la méthode d'approximation de côté et supposons que l'on a bien convergence. Autrement dit, nous supposons que le problème (11.16) est bien posé pour h assez petit et que sa solution approche la solution du problème (11.15). Ici, nous souhaitons surtout avoir une idée de l'influence du changement de signe de σ dans le problème (11.15).

Sur la Figure 11.3, nous représentons la solution u_h du problème (11.16) dans la configuration $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$, *i.e.* dans le cas où $\kappa_\sigma = -1$. Nous n'observons pas de comportement singulier au voisinage de l'interface contrairement à ce que nous aurions obtenu en discrétisant le problème « trouver $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $(\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega$, pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ ». Ce résultat est en accord avec le caractère Fredholm de l'opérateur B. Lorsqu'on observe cette simulation numérique, il n'est pas évident de retrouver le changement de signe dans l'équation. Ceci vient du fait que la solution dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$, à l'interface, vérifie les conditions de raccord $[u]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = 0$. On n'observe donc pas la « cassure » caractéristique de la solution du problème « trouver $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $(\sigma\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega$, pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ », due à la relation de transmission $[\sigma\nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = 0$.

La Figure 11.4 montre une vue en coupe dans le plan d'équation $y = 0$ des solutions du problème (11.16) pour $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Il y a bien une différence entre ces deux solutions.
Sur la Figure 11.5, on trace la norme $\|\Delta u_h\|_\Omega$ de la solution du problème (11.16) en fonction du contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. Plus précisément, on fixe $\sigma_1 = 1$ et on fait varier σ_2. On remarque la présence de pics laissant penser que l'opérateur B n'est pas toujours injectif. Ceci concorde avec les calculs menés en 1D dans le §11.2.3. Pour nous assurer que le calcul n'est pas complètement faux, nous avons affiché la norme de u_h pour des contrastes positifs (Figure 11.5, en haut). Pour de telles valeurs de κ_σ, le problème (11.15) est bien posé et il n'y a pas de pics. La dernière remarque concerne l'intervalle de contrastes dans lequel se situe les pics. Dans le §11.3, nous avons prouvé que l'opérateur B est un isomorphisme pour $\kappa_\sigma << -1$ et $\kappa_\sigma^{-1} << -1$. Encore une fois, les deux courbes de la Figure 11.5 sont en accord avec ce résultat.

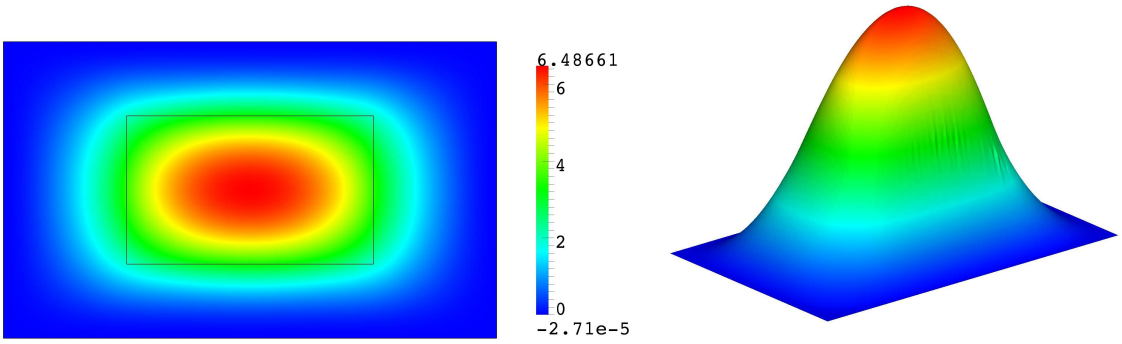


FIGURE 11.3 – Approximation numérique de la solution du problème (11.15) pour $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$.

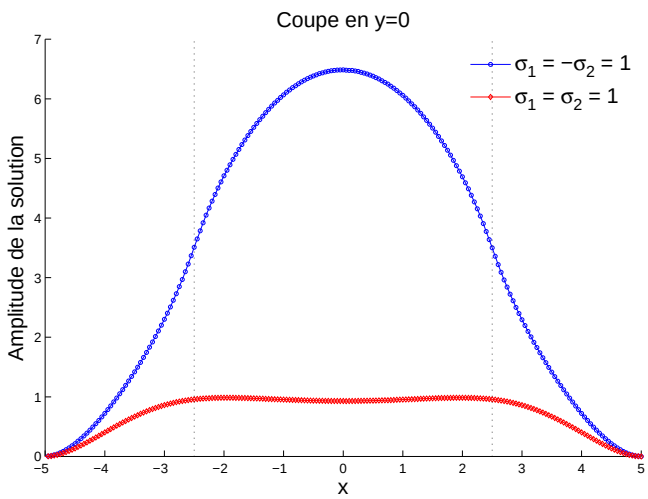


FIGURE 11.4 – Vue en coupe dans le plan d'équation $y = 0$ des solutions du problème (11.16) pour $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ (en bleu) et $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ (en rouge).

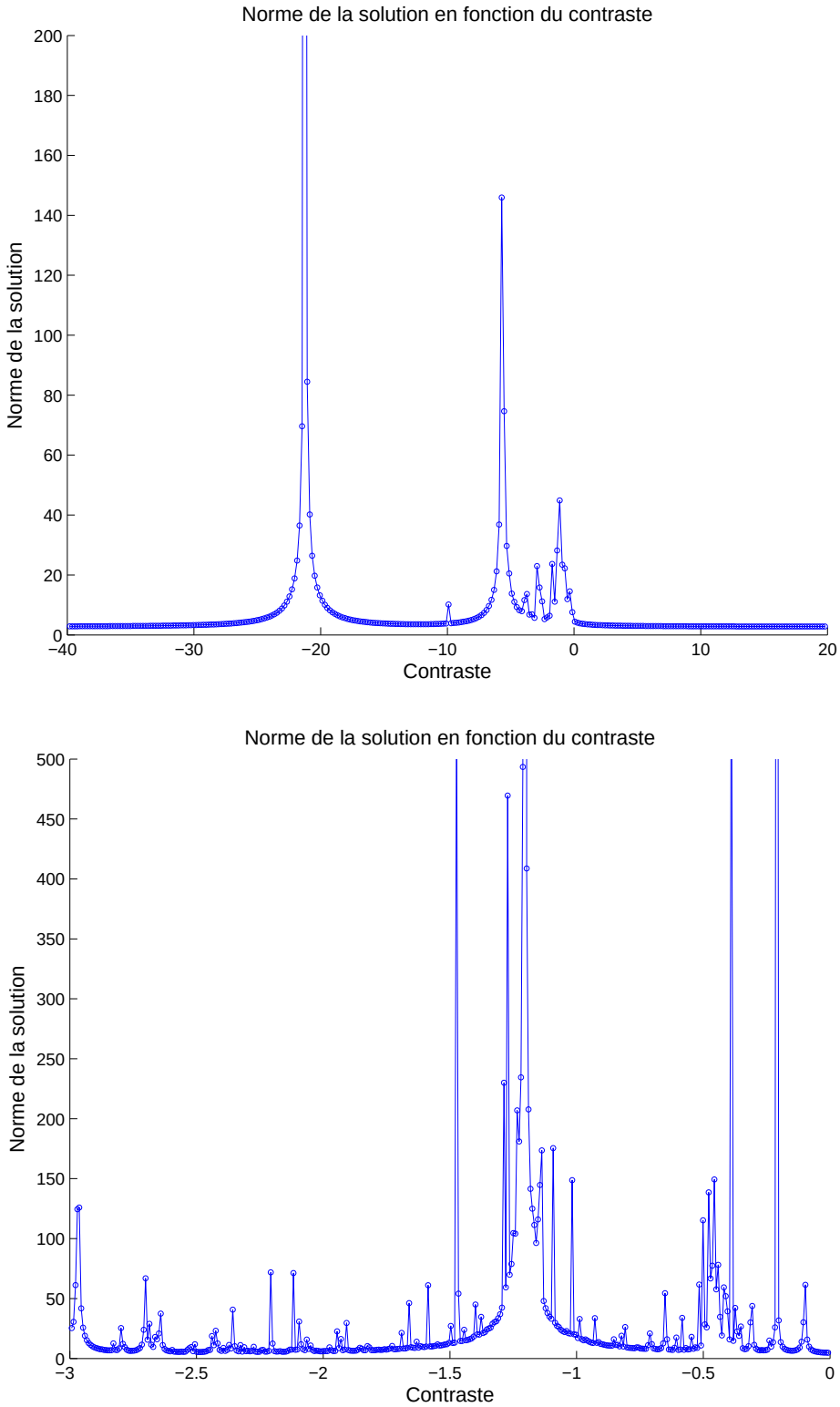


FIGURE 11.5 – Approximation numérique de la solution du problème (11.15) en fonction du contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$. On fixe $\sigma_1 = 1$ et on fait varier σ_2. En haut, $\sigma_2 \in [-40; 20]\backslash\{0\}$. En bas, on fait un zoom pour $\sigma_2 \in [-3; 0[$.

11.4 Étude du problème de bilaplacien avec changement de signe avec conditions mixtes

Revenons à l'étude du problème de bilaplacien avec conditions aux limites mixtes, posé dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) & & & \text{tel que :} \\ \Delta\sigma\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega \\ \sigma\Delta u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. . \tag{11.17}$$

Pour $f \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$, nous avons prouvé avec le Théorème 11.2.1 que ce problème est bien posé quand Ω est convexe ou de classe $\mathscr{C}^2$, et lorsque $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Nous voulons dans cette partie étudier d'autres configurations, notamment des situations dans lesquelles Ω n'est ni de classe $\mathscr{C}^2$ ni convexe. Nous supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert à frontière $\partial\Omega$ polygonale.

De nouveau, nous munirons $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ du produit scalaire $(u, v) \mapsto (u, v)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega$. En intégrant par parties, on prouve l'estimation *a priori* (voir [88, théorème 2.2.3] ou [96, 110]) :

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \leq C \, \|\Delta u\|_\Omega, \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$$

où C est une constante qui ne dépend que du domaine Ω. Cette estimation apporte beaucoup d'informations. Elle montre que l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est injectif à image fermée (c'est un monomorphisme). On peut ensuite caractériser l'orthogonal de l'image de l'opérateur Δ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Le théorème 2.3.7 de [88] indique qu'il est de dimension finie N où N est le nombre de sommets de $\partial\Omega$ dont l'ouverture est plus grande que π. Ainsi, Δ est un opérateur injectif de type Fredholm d'indice $-N$. Lorsqu'il n'y a pas de coin rentrant, *i.e.* lorsque Ω est convexe, on retrouve le fait que le Laplacien avec condition de Dirichlet homogène définit un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Dans le paragraphe 11.2.1, nous avons défini la forme sesquilinéaire

$$\tilde{b}(v, \varphi) \quad = \quad (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega, \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$$

et l'opérateur continu de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ associé tel que

$$(\tilde{B}v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = \tilde{b}(v, \varphi), \qquad \forall (v, \varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega). \tag{11.18}$$

11.4.1 Le paradoxe de Sapongyan pour le cas σ positif

Supposons dans ce paragraphe qu'il existe une constante C telle que $\sigma \geq C > 0$ p.p. dans Ω. Dans ce cas, la forme $\tilde{b}$ est coercive sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ que le domaine Ω soit convexe ou non. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (11.17) possède une unique solution et $\tilde{B}$ constitue un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Maintenant cherchons à résoudre en deux étapes le problème (11.17). Pour simplifier, supposons ici que f appartient à $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Notons $v_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ la fonction telle que $\Delta v_0 = f$. Introduisons ensuite u_0 l'élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ satisfaisant $\Delta u_0 = \sigma^{-1} v_0$. Lorsque Ω est convexe, on a $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Dans ce cas, u_0 vérifie le problème (11.17). Puisque celui-ci est bien posé, on déduit $u_0 = u$. Quand Ω n'est pas convexe, il peut arriver qu'on ait $u_0 \notin \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Dans cette situation, on a $\Delta\sigma\Delta u_0 = f$ dans Ω et $u_0 = \sigma\Delta u_0 = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ mais u_0 n'est pas la solution du problème (11.17). C'est ce que S.A. Nazarov et G.H. Sweers appellent, dans les articles très instructifs [120, 121, 122], le *paradoxe de Sapongyan*. Ce dernier, mathématicien russe du début du XIXième siècle, obtenait, grâce à des techniques de transformations conformes, une solution qui n'était pas d'énergie mécanique finie. Puisqu'il n'avait pas d'explication, il a qualifié ce phénomène de paradoxe.

Néanmoins, et c'est l'objet des articles [120, 121, 122], il existe un moyen de résoudre le problème de bilaplacien (11.17) en deux étapes tout en obtenant bien la solution d'énergie finie, c'est-à-dire celle dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Pour simplifier, nous commençons par supposer que Ω ne présente qu'un seul coin rentrant O dont l'ouverture est égale à $\alpha \in]\pi; 2\pi[$ (cf. Figure 11.6). La méthode consiste à résoudre de façon intelligente les deux problèmes de Laplacien avec condition de Dirichlet homogène qui apparaissent dans le problème (11.17). Avant d'aller plus loin, nous devons rappeler quelques éléments classiques de la théorie des singularités pour le problème du Laplacien dans un polygone non convexe.

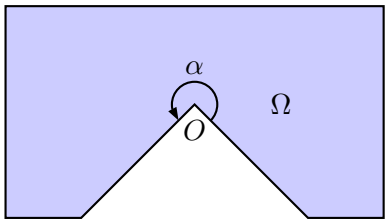


FIGURE 11.6 – Frontière polygonale non convexe présentant un seul coin rentrant – $N = 1$.

Introduisons ζ telle que

$$\zeta(\boldsymbol{x}) = r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) + \tilde{\zeta}(\boldsymbol{x}). \tag{11.19}$$

où $\tilde{\zeta}$ est l'unique fonction de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta\tilde{\zeta} = 0$ p.p. dans Ω et $\tilde{\zeta} = -r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ici, (r, θ) désignent les coordonnées polaires centrées en O avec $\boldsymbol{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Nous supposons Ω non convexe en O. Ceci impose $0 < \pi/\alpha < 1$. Par un calcul direct, on montre alors que $\boldsymbol{x} \mapsto r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$. Cela prouve que ζ n'est pas nulle. Résumons les propriétés vérifiées par ζ. On a $\zeta \neq 0$, $\zeta \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\Delta\zeta = 0$ p.p. dans Ω et $\zeta = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. En fait, ζ constitue une base de l'espace des fonctions présentant de telles propriétés. Avec le lemme 2.3.6 de [88], on prouve la

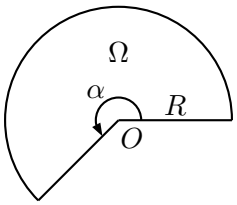
Proposition 11.4.1 *Soit $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ une fonction telle que $\Delta\varphi = 0$ p.p. dans Ω et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante a telle que $\varphi = a\zeta$.*

On déduit que toute fonction $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta v = f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et $v = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, admet la décomposition

$$v(\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}) + a\,\zeta(\boldsymbol{x}), \tag{11.20}$$

avec $v_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta v_0 = f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, a constante. Autrement dit, l'ensemble des fonctions de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ telles que $\Delta v = f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et $v = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ est un espace affine de dimension un.

Remarque 11.4.2 *Pour le domaine particulier $\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < R,\, 0 < \theta < \alpha\}$, avec $R > 0$ et $\alpha \in]\pi; 2\pi[$, on a $\zeta(\boldsymbol{x}) = (r^{-\pi/\alpha} - R^{-2\pi/\alpha} r^{\pi/\alpha}) \sin(\pi\theta/\alpha)$.*



Présentons ensuite un résultat de décomposition en partie singulière/partie régulière des éléments de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ à Laplacien dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Proposition 11.4.3 *Considérons $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta\varphi = g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors φ admet la décomposition*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = c\, r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) + \tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}), \tag{11.21}$$

avec $\tilde{\varphi} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$. Par ailleurs, le coefficient de singularité c dans (11.21) est donné par l'expression

$$c = -(\pi)^{-1}(g, \zeta)_\Omega.$$

Remarque 11.4.4 *Pour montrer la deuxième partie de cette proposition, on travaille exactement comme dans la Proposition 5.3.3 du Chapitre 5 : on intègre par parties dans* $(\Delta\varphi, \zeta)_{\Omega_\delta}$ *où* $\Omega_\delta := \Omega \backslash \overline{B(0,\delta)}$*, on utilise la relation* $\Delta\zeta = 0$ *p.p. dans* Ω*, puis on fait tendre* δ *vers* 0*.*

En remarquant que $\boldsymbol{x} \mapsto r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$ appartient à $\mathrm{H}^1(\Omega)\backslash\mathrm{H}^2(\Omega)$ (car $\pi/\alpha < 1$), on déduit le

Corollaire 11.4.5 *Soit* $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *telle que* $\Delta\varphi = g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$*. Alors* $\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ *si et seulement si* $(g, \zeta)_\Omega = 0$*.*

Nous disposons maintenant de tous les outils pour résoudre le problème (11.17) en deux étapes. Considérons $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et définissons $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ comme en (11.20). D'après le Corollaire 11.4.5, pour que la fonction $u_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\Delta u_0 = \sigma^{-1} v$ soit dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$, il faut bien choisir v, grâce au degré de liberté que l'on a dans (11.20). Plus précisément, dans (11.20), il faut prendre a tel que

$$\begin{aligned} & 0 = (\sigma^{-1} v, \zeta)_\Omega = (\sigma^{-1} v_0, \zeta)_\Omega + a\,(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \\ \Leftrightarrow \quad & a = -(\sigma^{-1} v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Résumons le processus pour obtenir la solution dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ du problème (11.17) :

- ◇ 1. On considère $v_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ la fonction vérifiant $\Delta v_0 = f$.
- ◇ 2. On introduit $v = v_0 + a\zeta$ avec ζ définie par (11.19) et a constante.
- ◇ 3. On choisit $a = -(\sigma^{-1} v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$ de sorte que $(\sigma^{-1} v, \zeta)_\Omega = 0$.
- ◇ 4. La fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\Delta u = \sigma^{-1} v$ est alors la solution de (11.17) car elle appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$.

11.4.2 Étude dans le cas où σ change de signe

Lorsque σ change de signe, la forme sesquilinéaire $\tilde{b}$ associée au problème (11.17) n'est bien sûr plus coercive. Lorsque le domaine Ω est convexe ou de classe $\mathscr{C}^2$, en utilisant la technique de la T-coercivité, nous avons montré dans le Théorème 11.2.1 que le problème (11.17) est bien posé. D'autre part, dans la deuxième preuve du Théorème 11.2.1, nous avons prouvé que sous ces hypothèses, le problème de bilaplacien (11.17) peut également se résoudre en deux étapes. Nous souhaitons maintenant étudier le cas où Ω n'est ni convexe ni de classe $\mathscr{C}^2$. Rappelons que nous avons supposé la frontière $\partial\Omega$ polygonale. Nous allons prouver que le problème (11.17) est bien posé au sens de Fredholm. Cependant, et c'est la nouveauté par rapport au cas Ω convexe ou de classe $\mathscr{C}^2$, selon les valeurs de σ, il peut apparaître un noyau (et un conoyau) dont la dimension est inférieure ou égale au nombre de coins rentrants du domaine.

Frontière présentant un seul coin rentrant

Pour débuter, nous supposons que $\partial\Omega$ ne présente qu'un coin rentrant situé en O, d'ouverture $\alpha \in]\pi; 2\pi[$. Pour nous donner une intuition, étudions le noyau de l'opérateur $\tilde{B}$. Si u vérifie le problème (11.17) avec $f = 0$, nous savons d'après la Proposition 11.4.1 qu'il existe une constante a telle que $\Delta u = a\,\sigma^{-1}\zeta$. Puisque $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, en vertu du Corollaire 11.4.5, on a alors nécessairement la relation

$$a(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0. \tag{11.23}$$

Ceci nous amène à considérer deux cas : ou bien σ est tel que $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ ou bien σ est tel que $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆

CAS $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$

⋆⋆⋆⋆⋆

Supposons d'abord $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$. On a alors la

Proposition 11.4.6 *Supposons que la frontière de Ω soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$, où ζ est définie en (11.19). Alors pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (11.17) possède une unique solution avec l'estimation de continuité*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Preuve. ⋆ INJECTIVITÉ. Soit u un élément du noyau de $\tilde{B}$. Nous venons de voir qu'il doit satisfaire la relation $\Delta u = a\,\sigma^{-1}\zeta$ avec a telle que $a(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega = 0$. Lorsque $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$, nous déduisons $\Delta u = 0$. Puisque l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est injectif, ceci entraîne $u = 0$.
⋆ SURJECTIVITÉ. En reprenant la démarche du paragraphe précédent, on observe que lorsque $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$, on peut continuer à exploiter le degré de liberté dans (11.22) pour construire une solution dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ au problème (11.17). Plus précisément, pour $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, on considère $v_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ la fonction vérifiant $\Delta v_0 = f$. On introduit $v = v_0 + a\zeta$ avec ζ définie par (11.19) et $a = -(\sigma^{-1}v_0,\zeta)_\Omega/(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega$. La fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\Delta u = \sigma^{-1}v$ est alors une solution de (11.17) car elle appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$. On a de plus les estimations suivantes, avec C constante variant d'une ligne à l'autre,

$$\begin{array}{rcl}
\|u\|_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} & \leq & C\,\|\sigma^{-1}v\|_\Omega \\
& \leq & C\,(\|v_0\|_\Omega + |a|) \\
& \leq & C\,(\|v_0\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + |(\sigma^{-1}v_0,\zeta)_\Omega/(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega|) \\
& \leq & C\,\|v_0\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}.
\end{array}$$

Ceci termine la preuve. ■

Pour la forme, montrons ce résultat avec la technique de la $\mathtt{T}$-coercivité.

Proposition 11.4.7 *Supposons que la frontière de Ω soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$, où ζ est définie en (11.19). Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Preuve. Introduisons l'opérateur $\mathtt{T}$ qui à $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ associe la fonction $\mathtt{T}u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\Delta(\mathtt{T}u) = \sigma^{-1}(\Delta u + a\,\zeta)$ avec $a = -(\sigma^{-1}\Delta u,\zeta)_\Omega/(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega$. Puisque $(\sigma^{-1}(\Delta u + a\,\zeta),\zeta)_\Omega = 0$, nous savons que $\mathtt{T}u$ appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$ d'après le Corollaire 11.4.5. Ainsi, $\mathtt{T}$ constitue un opérateur continu de $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Pour tout $(u,v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, on calcule alors

$$\begin{array}{rcrcl}
(\tilde{B}(\mathtt{T}u),v)_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} & = & \tilde{b}(\mathtt{T}u,v) & = & (\sigma\,\Delta(\mathtt{T}u),\Delta v)_\Omega \\
& & & = & (\Delta u + a\zeta,\Delta v)_\Omega \\
& & & = & (\Delta u,\Delta v)_\Omega = (u,v)_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)}.
\end{array}$$

Le passage à la dernière ligne s'obtient en remarquant que $(\zeta,\Delta v)_\Omega = 0$ car $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ (Corollaire 11.4.5). Ainsi, nous avons $\tilde{B} \circ \mathtt{T} = \mathrm{Id}$. Puisque $\tilde{B}$ est autoadjoint, nous déduisons que $\tilde{B}$ constitue un isomorphisme avec $\tilde{B}^{-1} = \mathtt{T}$. ■

Remarque 11.4.8 *Le résultat de la Proposition 11.4.7 est un peu plus général que celui de la Proposition 11.4.6 car il indique que le problème (11.17) est bien posé pour un second membre dans $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$, espace plus gros que $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.*

Arrêtons là l'étude du cas $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega \neq 0$ et intéressons-nous à la situation $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆

CAS $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega = 0$

⋆⋆⋆⋆⋆

Nous n'allons plus pouvoir utiliser ce fameux degré de liberté pour construire une solution au problème (11.22) dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$ et il va apparaître un noyau ainsi qu'un conoyau.
Notons ψ la fonction de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ satisfaisant

$$\Delta\psi = \sigma^{-1}\zeta. \tag{11.24}$$

Puisque $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega = 0$, le Corollaire 11.4.5 indique que ψ appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Par conséquent, ψ constitue un élément de $\ker\tilde{B}$. Pour caractériser le conoyau associé au problème (11.17), introduisons la fonction $\xi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que

$$(\nabla\xi,\nabla\xi')_\Omega = (\sigma^{-1}\zeta,\xi')_\Omega, \qquad \forall\xi'\in\mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{11.25}$$

On a alors la

Proposition 11.4.9 *Supposons que la frontière de Ω soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que $\sigma\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1}\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $(\sigma^{-1}\zeta,\zeta)_\Omega = 0$. Alors pour tout $f\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (11.17) possède une solution si et seulement si $\langle f,\xi\rangle_\Omega = 0$. Dans ce cas, la solution est définie à la droite* $\mathrm{vect}(\psi)$ *près.*
Dans cet énoncé, les fonctions ζ, ξ et ψ sont respectivement définies en (11.19), (11.25) et (11.24).

Preuve. ⋆ NOYAU. Si u appartient à $\ker\tilde{B}$ alors, d'après (11.23), on a $\sigma\,\Delta u = a\zeta$ où a est une constante. Ainsi, $\ker\tilde{B}\subset\mathrm{vect}(\psi)$. Comme indiqué précédemment, on a $\psi\in\ker\tilde{B}$ et donc $\ker\tilde{B} = \mathrm{vect}(\psi)$.
⋆ CONOYAU. Considérons $f\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que $\langle f,\xi\rangle_\Omega = 0$. Dans ce cas, la fonction $v_0\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que $\Delta v_0 = f$ satisfait la relation de compatibilité $(\sigma^{-1}v_0,\zeta)_\Omega = 0$. Par conséquent, toujours en vertu du Corollaire 11.4.5, la fonction $u\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = \sigma^{-1}v_0$ est dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ et constitue donc une solution du problème (11.17). Maintenant considérons $f\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que $\langle f,\xi\rangle_\Omega\neq 0$. Supposons qu'il existe une solution u au problème (11.17). Alors, on a $\sigma\Delta u = v_0 + a\,\zeta$, où $v_0\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ satisfait $\Delta v_0 = f$ et a est une constante. Ceci impose, $(\sigma^{-1}v_0,\zeta)_\Omega = 0$. Mais l'on a $(\sigma^{-1}v_0,\zeta)_\Omega = \langle f,\xi\rangle_\Omega$. Nous sommes donc conduits à une absurdité. Ceci montre qu'il existe une solution au problème (11.17) si et seulement si $\langle f,\xi\rangle_\Omega = 0$. ■

Frontière présentant plusieurs coins rentrants

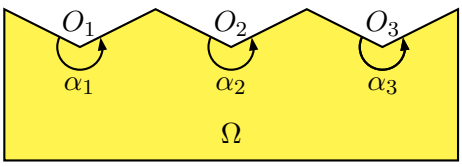


FIGURE 11.7 – Frontière polygonale non convexe présentant trois coins rentrants – $N = 3$.

Supposons que la frontière $\partial\Omega$ présente N coins rentrants O_i d'ouverture $\alpha_i\in]\pi;2\pi[$, $i = 1\dots N$ (voir Figure 11.7). Nous notons (r_i,θ_i) les coordonnées polaires associées à O_i. Commençons par rappeler quelques résultats de la théorie des singularités pour le problème du Laplacien dans un polygone comportant plusieurs coins rentrants.

Pour $i = 1 \dots N$, introduisons $\zeta_i \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$ la fonction telle que

$$\zeta(\boldsymbol{x}) = r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i) + \tilde{\zeta}_i(\boldsymbol{x}). \tag{11.26}$$

où $\tilde{\zeta}_i$ est l'unique élément de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta\tilde{\zeta}_i = 0$ p.p. dans Ω et $\tilde{\zeta}_i = -r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$ p.p. sur $\partial\Omega$. Notons que $\zeta_i \neq 0$, $\zeta_i \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\Delta\zeta_i = 0$ p.p. dans Ω et $\zeta_i = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Le résultat suivant généralise la Proposition 11.4.1 au cas où il y a plusieurs coins rentrants dans la frontière $\partial\Omega$.

Proposition 11.4.10 *La famille $(\zeta_i)_{i=1}^N$ constitue une base de l'espace $\{\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, \Delta\varphi = 0$ p.p. dans Ω et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega\}$.*

Preuve. Avec le lemme 2.3.6 de [88], on montre que si $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ est une fonction telle que $\Delta\varphi = 0$ p.p. dans Ω et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, alors il existe N constantes $a_1, \dots, a_N$ telles que $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i\,\zeta_i$. Ainsi, $(\zeta_i)_{i=1}^N$ est une famille génératrice de $\{\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, \Delta\varphi = 0$ p.p. dans Ω et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega\}$. D'autre part, si $\sum_{i=1}^N a_i\,\zeta_i = 0$ p.p. dans Ω, puisque les fonctions $\boldsymbol{x} \mapsto r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$ ne sont pas H^1 localement au voisinage de O_i, on déduit $a_1 = \dots = a_N = 0$. La famille $(\zeta_i)_{i=1}^N$ est donc libre. ■

La Proposition 11.4.10 montre que toute fonction $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta v = f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et $v = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, admet la décomposition

$$v(\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^N a_i\,\zeta_i(\boldsymbol{x}). \tag{11.27}$$

Ci-dessus, $v_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est la fonction vérifiant $\Delta v_0 = f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tandis que $a_1, \dots, a_N$ sont des constantes.

En présence de N coins rentrants dans la frontière, le résultat de décomposition en partie singulière/partie régulière des éléments de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ à Laplacien dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ devient (cf. théorème 6.4.4 et paragraphe 6.6.1. de [102]) :

Proposition 11.4.11 *Considérons $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta\varphi = g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors φ admet la décomposition*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^N c_i\, r_i^{\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i) + \tilde{\varphi}_i(\boldsymbol{x}), \tag{11.28}$$

avec $\tilde{\varphi}_i \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, $i = 1 \dots N$. Par ailleurs, le coefficient de singularité c_i dans (11.28) est donné par la formule

$$c_i = -(\pi)^{-1}(g, \zeta_i)_\Omega.$$

En remarquant que $\boldsymbol{x} \mapsto r_i^{\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$ appartient à $\mathrm{H}^1(\Omega)\backslash\mathrm{H}^2(\Omega)$, on déduit le

Corollaire 11.4.12 *Soit $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta\varphi = g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors $\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ si et seulement si $(g, \zeta_i)_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots N$.*

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'étude du problème (11.17). De nouveau, pour nous faire une idée, considérons u une solution de (11.17) avec $f = 0$. D'après la Proposition 11.4.10, on a alors $\sigma\,\Delta u = \sum_{i=1}^N a_i\,\zeta_i$ où $a_1, \dots, a_N$ sont des constantes. Puisque $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, on doit avoir $(\sum_{i=1}^N a_i\,\sigma^{-1}\,\zeta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Ceci nous conduit à introduire la matrice

$$\mathbb{M} := \begin{pmatrix} (\sigma^{-1}\zeta_1, \zeta_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\zeta_1, \zeta_N)_\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma^{-1}\zeta_N, \zeta_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\zeta_N, \zeta_N)_\Omega \end{pmatrix}. \tag{11.29}$$

Divisons notre étude en deux cas selon la dimension du noyau de $\mathbb{M}$.

⋆⋆⋆⋆⋆

CAS $\mathbb{M}$ INVERSIBLE

⋆⋆⋆⋆⋆

Supposons la matrice $\mathbb{M}$ inversible. Construisons une base duale de $\mathrm{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ qui nous servira dans la suite.

Lemme 11.4.13 *Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus σ tel que la matrice $\mathbb{M}$ soit inversible. Alors il existe N fonctions λ_i, $i = 1 \dots N$, appartenant à $\mathrm{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$, telles que*

$$(\sigma^{-1}\lambda_i, \zeta_j)_\Omega = \delta_{ij}, \qquad \text{pour } i,\, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Preuve. Soit $\mathbb{A}$ l'inverse de $\mathbb{M}$. Il suffit de prendre $\lambda_i := \sum_{k=1}^N \mathbb{A}_{ik}\zeta_k$. ■

On peut alors prouver la

Proposition 11.4.14 *Soit Ω un polygone comportant N coins rentrants. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus σ tel que la matrice $\mathbb{M}$ définie en (11.29) soit inversible. Alors pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (11.17) possède une unique solution avec l'estimation de continuité*

$$\|u\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} \le C\, \|f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Preuve. ⋆ INJECTIVITÉ. Si u est un élément de $\ker \tilde{B}$, on a $\sigma\Delta u = \sum_{i=1}^N a_i\zeta_i$ où les a_i sont des constantes. Puisque u appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$, les relations de compatibilité impliquent $(\sum_{i=1}^N a_i\, \sigma^{-1}\, \zeta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Ceci implique $a_1 = \dots = a_N = 0$ car la matrice $\mathbb{M}$ est inversible. Ainsi, nous pouvons écrire $\Delta u = 0$. Une nouvelle fois, on déduit $u = 0$ car l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est injectif.
⋆ SURJECTIVITÉ. Considérons $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Introduisons $v_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta v_0 = f$. Définissons ensuite $v := v_0 - \sum_{i=1}^N a_i\, \lambda_i$ avec, pour $i = 1 \dots N$, $a_i := (\sigma^{-1}v_0, \zeta_i)_\Omega$. La fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta u = \sigma^{-1}v$ est alors dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ car le second membre vérifie les conditions de compatibilité. Ceci termine la preuve. ■

Prouvons ce résultat avec la méthode de la $\mathtt{T}$-coercivité.

Proposition 11.4.15 *Soit Ω un polygone comportant N coins rentrants. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus σ tel que la matrice $\mathbb{M}$ définie en (11.29) soit inversible. Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Preuve. Introduisons l'opérateur $\mathtt{T}$ qui à $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ associe la fonction $\mathtt{T}u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta(\mathtt{T}u) = \sigma^{-1}(\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i\, \lambda_i)$ avec, pour $i = 1 \dots N$, $a_i = -(\sigma^{-1}\Delta u, \zeta_i)_\Omega$. Puisque $(\sigma^{-1}(\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i\, \lambda_i), \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots N$, on a $\mathtt{T}u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ d'après le Corollaire 11.4.12. Ainsi, $\mathtt{T}$ est un opérateur continu de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. On vérifie alors comme dans la preuve de la Proposition 11.4.7 l'égalité $\tilde{B} \circ \mathtt{T} = \mathrm{Id}$. Ceci montre que $\tilde{B}$ et $\mathtt{T}$ sont des isomorphismes de $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ avec $\tilde{B}^{-1} = \mathtt{T}$. ■

Remarque 11.4.16 *L'hypothèse « $\mathbb{M}$ inversible » porte uniquement sur les valeurs de σ en fonction de la géométrie du domaine. En effet, les singularités ζ_i, $i = 1 \dots N$, ne dépendent que de la géométrie de Ω.*

Remarque 11.4.17 *Lorsqu'il n'y a qu'un coin rentrant dans $\partial\Omega$, la matrice $\mathbb{M}$, un scalaire dans ce cas, est inversible si et seulement si $(\sigma^{-1}\zeta_1, \zeta_1)_\Omega \neq 0$. On retrouve ainsi le résultat de la Proposition 11.4.6.*

Remarque 11.4.18 *Lorsque $\sigma \geq C > 0$, la matrice $\mathbb{M}$ est toujours inversible. En effet, si $(a_1 \dots a_N)^t \in \ker \mathbb{M}$, alors la fonction $\tau := \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i$ vérifie $(\sigma^{-1}\tau, \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots N$, et donc $(\sigma^{-1}\tau, \tau)_\Omega = 0$. Cela implique $\tau = 0$. Puisque la famille $(\zeta_i)_{i=1}^N$ est libre, on déduit $a_1 = \dots = a_N = 0$. Ceci est cohérent avec le fait que $\tilde{b}$ est coercive sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ lorsque $\sigma \geq C > 0$.*

⋆⋆⋆⋆⋆

Cas $\mathbb{M}$ non inversible

⋆⋆⋆⋆⋆

Supposons à présent que la matrice $\mathbb{M}$ définie en (11.29) possède un noyau de dimension $M > 0$. Introduisons $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_M$ une base de ce noyau avec $\boldsymbol{b}_m = (b_{m1} \dots b_{mN})^t$ pour $m = 1 \dots M$. Définissons ensuite les fonctions

$$\beta_m := \sum_{i=1}^N b_{mi} \zeta_i. \tag{11.30}$$

Lemme 11.4.19 *La famille $(\beta_1, \dots, \beta_M)$ constitue une famille libre de vect$(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$.*

Preuve. Supposons $\sum_{i=1}^M a_i \beta_i = 0$. Ceci implique

$$0 = \sum_{i=1}^M a_i \Big(\sum_{j=1}^N b_{ij} \zeta_j \Big) = \sum_{j=1}^N \Big(\sum_{i=1}^M a_i b_{ij} \Big) \zeta_j = 0.$$

Puisque la famille $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ est libre, on déduit $\sum_{i=1}^M a_i b_{ij} = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Autrement dit, on a $\sum_{i=1}^M a_i \boldsymbol{b}_i = 0$. Puisque $\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_M$ est une base de $\ker \mathbb{M}$, on a nécessairement $a_1 = \dots = a_M = 0$. Cela termine la preuve de ce lemme. ■

Introduisons alors $N - M$ fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M}$ telles que

$$\mathrm{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \mathrm{vect}(\beta_1, \dots, \beta_M) \oplus \mathrm{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M}).$$

Prouvons l'existence d'une base duale sur $\mathrm{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$.

Lemme 11.4.20 *Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus σ tel que la matrice $\mathbb{M}$ définie en (11.29) possède un noyau de dimension $M > 0$. Alors il existe $N - M$ fonctions λ_i, $i = 1 \dots N - M$, appartenant à $\mathrm{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$, telles que*

$$(\sigma^{-1}\lambda_i, \gamma_j)_\Omega = \delta_{ij}, \qquad \textit{pour } i, j \in \{1, \dots, N - M\}.$$

Preuve. Définissons la matrice

$$\tilde{\mathbb{M}} := \begin{pmatrix} (\sigma^{-1}\gamma_1, \gamma_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\gamma_1, \gamma_{N-M})_\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma^{-1}\gamma_{N-M}, \gamma_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\gamma_{N-M}, \gamma_{N-M})_\Omega \end{pmatrix}. \tag{11.31}$$

Prouvons que cette matrice est inversible. Pour $(a_1, \dots a_{N-M})^t \in \ker \tilde{\mathbb{M}}$, définissons la fonction $\tau = \sum_{i=1}^{N-M} a_i \gamma_i$. Pour tout $j = 1 \dots N - M$, on a $(\sigma^{-1}\tau, \gamma_j) = 0$. Puisque $(\sigma^{-1}\tau, \beta_j) = 0$ pour $j = 1 \dots M$, on déduit $(\sigma^{-1}\tau, \zeta_j) = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Ainsi, $\tau \in \mathrm{vect}(\beta_1, \dots, \beta_N)$. Puisque, par définition, on a également $\tau \in \mathrm{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$, on déduit $\tau = \sum_{i=1}^{N-M} a_i \gamma_i = 0$. Or la famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$ est libre. Par conséquent, $a_1 = \dots = a_{N-M} = 0$. Ceci montre que $\tilde{\mathbb{M}}$ est inversible. Soit alors $\tilde{\mathbb{A}}$ l'inverse de $\tilde{\mathbb{M}}$. Il ne reste plus qu'à définir $\lambda_i := \sum_{k=1}^{N-M} \mathbb{A}_{ik} \gamma_k$. ■

Lorsque la matrice $\mathbb{M}$ présente un noyau de dimension M, il va apparaître un noyau et un conoyau de dimensions M pour le problème (11.17).
Pour caractériser le noyau de $\tilde{B}$, introduisons, pour $i = 1 \dots M$, la fonction $\psi_i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ vérifiant

$$\Delta\psi_i = \sigma^{-1}\beta_i. \tag{11.32}$$

Puisque $(\sigma^{-1}\beta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots M$, nous savons d'après le Corollaire 11.4.12 que ψ_i appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Par conséquent, ψ_i constitue un élément de $\ker \tilde{B}$. Pour caractériser le conoyau associé au problème (11.17), introduisons, pour $i = 1 \dots M$ la fonction $\xi_i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telle que

$$(\nabla\xi_i, \nabla\xi')_\Omega = (\sigma^{-1}\beta_i, \xi')_\Omega, \qquad \forall \xi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{11.33}$$

On a alors la

Proposition 11.4.21 *Soit Ω un polygone comportant N coins rentrants. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons de plus σ tel que la matrice $\mathbb{M}$ définie en (11.29) possède un noyau de dimension $M > 0$. Alors pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (11.17) possède une solution si et seulement si $\langle f, \xi_i\rangle_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots M$. Dans ce cas, la solution est définie à $\mathrm{vect}(\psi_1, \dots, \psi_M)$ près.*
Dans cet énoncé, la matrice $\mathbb{M}$ et les fonctions ξ_i, ψ_i sont respectivement définies en (11.29), (11.33) et (11.32).

Preuve. ⋆ Noyau. Si u appartient à $\ker \tilde{B}$ alors, d'après (11.23), $\sigma\Delta u = \sum_{j=1}^N a_j\zeta_j$ où les $a_1, \dots, a_N$ sont des constantes. Puisque $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, on a nécessairement $(\sum_{j=1}^N a_j\sigma^{-1}, \zeta_j)_\Omega = 0$ pour $j = 1 \dots N$. Ceci implique $(a_1 \dots a_N)^t \in \ker \mathbb{M} = \mathrm{vect}(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_M)$. Autrement dit, il existe des constantes c_i, $i = 1 \dots M$, telles que $(a_1 \dots a_N)^t = \sum_{i=1}^M c_i\boldsymbol{b}_i$. On déduit

$$\sigma\Delta u = \sum_{j=1}^N a_j\zeta_j = \sum_{j=1}^N \Big(\sum_{i=1}^M c_i b_{ij}\Big)\zeta_j = \sum_{i=1}^M c_i\Big(\sum_{j=1}^N b_{ij}\zeta_j\Big) = \sum_{i=1}^M c_i\beta_i.$$

On peut alors écrire $u = \sum_{i=1}^M c_i\beta_i$. Ceci montre la relation $\ker \tilde{B} \subset \mathrm{vect}(\psi_1, \dots, \psi_M)$. Puisque, l'inclusion réciproque est vraie, on déduit $\ker \tilde{B} = \mathrm{vect}(\psi_1, \dots, \psi_M)$.

⋆ Conoyau. Considérons $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que $\langle f, \xi_i\rangle_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots M$. Introduisons la fonction $v_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ vérifiant $\Delta v_0 = f$. Définissons ensuite $v := v_0 - \sum_{i=1}^{N-M} a_i\,\lambda_i$ avec, pour $i = 1 \dots N-M$, $\alpha_i := (\sigma^{-1}v_0, \zeta_i)_\Omega$. On a $(\sigma^{-1}v, \gamma_i)_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots N-M$. Mais l'on a également $(\sigma^{-1}v, \beta_i)_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots M$. En effet, d'une part, on $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = (\nabla v_0, \nabla\xi_i)_\Omega = \langle f, \xi_i\rangle_\Omega = 0$. D'autre part, $(\sigma^{-1}\lambda_j, \beta_i)_\Omega = 0$ pour tout $i = 1 \dots N-M$, $j = 1 \dots M$. Ceci prouve $(\sigma^{-1}v, \zeta_i)_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots N$. La fonction u est donc dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ d'après le Corollaire 11.4.12 et constitue une solution du problème (11.17).
Maintenant considérons $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que $\langle f, \xi_i\rangle_\Omega \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \dots, M\}$. Supposons qu'il existe une solution u au problème (11.17). Alors, on a $\sigma\Delta u = v_0 + \sum_{j=1}^N a_j\zeta_j$. Ici, $v_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ satisfait $\Delta v_0 = f$ et les $a_1, \dots, a_N$ sont des constantes. On a alors nécessairement $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots M$. Mais puisque $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = (\nabla v_0, \nabla\xi_i)_\Omega = \langle f, \xi_i\rangle_\Omega$, nous sommes conduits à une absurdité. Ceci montre qu'il existe une solution au problème (11.17) si et seulement si $\langle f, \xi_i\rangle_\Omega = 0$ pour $i = 1 \dots M$. ■

◇ Exemple. Considérons l'ouvert Ω décrit par la Figure 11.8 qui présente la particularité d'être symétrique par rapport à l'axe (Ox). On choisit également de placer les sommets des coins rentrants sur l'axe (Ox). Dans cette configuration, il est aisé de montrer que les singularités ζ_1 et ζ_2 sont symétriques par rapport à l'axe (Ox). En effet, pour $i = 1, 2$, la fonction $\hat{\zeta}_i : (x, y) \mapsto \zeta_i(x, -y)$ vérifie $\hat{\zeta}_i \neq 0$, $\hat{\zeta}_i \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\Delta\hat{\zeta}_i = 0$ p.p. dans Ω et $\hat{\zeta}_i = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. La Proposition 11.4.10 et le comportement de $\hat{\zeta}_i$ en O_i imposent alors $\hat{\zeta}_i = \zeta_i$ pour $i = 1, 2$.
Par conséquent, lorsque σ est antisymétrique par rapport à l'axe (Ox), *i.e.* lorsque $\sigma(x, y) = -\sigma(x, -y)$ p.p. dans Ω, la matrice $\mathbb{M}$ est égale à la matrice nulle. Dans cette situation, le problème (11.17) possède un noyau et un conoyau tous deux de dimension 2.

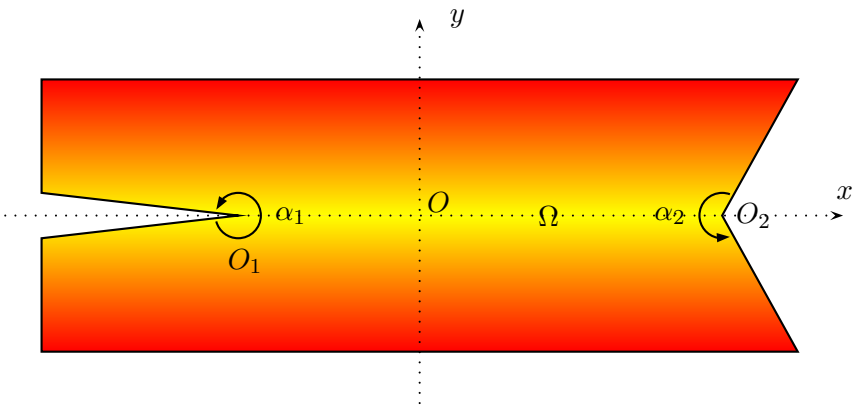


FIGURE 11.8 – Domaine à frontière polygonale symétrique par rapport à l'axe (Ox). Ici, Ω présente deux coins rentrants – $N = 2$.

11.4.3 Résultats en dimension supérieure

Présentons maintenant quelques résultats pour le problème (11.17) posé dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d > 0$. Comme nous l'avons vu, la nature de ce problème dépend de façon cruciale des propriétés de l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$. En 2D, pour un ouvert polygonal, on a les résultats suivants. Ou bien le domaine Ω est convexe et alors $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ constitue un isomorphisme. Ou bien, Ω présente des coins rentrants et alors $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est Fredholm injectif avec un conoyau de dimension finie égale au nombre de coins rentrants. En dimension $d > 0$ quelconque, les propriétés de $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ sont plus variées.

Domaines réguliers en dimension d

Lorsque Ω est de classe $\mathscr{C}^2$ ([83, théorème 8.12]) ou convexe ([87, théorème 3.2.1.2]), pour tout $d > 0$, l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme. Dans ce cas, avec la technique de la T-coercivité, on montre comme en 2D la

Proposition 11.4.22 *Supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 0$, de classe $\mathscr{C}^2$ ou convexe. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Lorsque Ω n'est ni de classe $\mathscr{C}^2$ ni convexe, les choses se corsent quelque peu.

Pointes coniques non convexes en dimension d

Intéressons-nous d'abord aux « singularités géométriques non convexes » de dimension 0. Autrement dit, nous étudions les domaines comportant des *pointes coniques* concaves. Pour simplifier la présentation, nous supposons que Ω ne présente qu'une telle singularité : $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est à frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$ mis à part en O. En ce point, Ω coïncide localement avec un cône. Précisons cette notion en introduisant des notations qui serviront à étudier l'opérateur $\tilde{B}$. Considérons ω un domaine de $\mathbb{S}^{d-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Définissons $K^R_\omega := \{r\,\boldsymbol{\theta} \,|\, 0 < r < R, \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$. Nous supposons qu'il existe $R > 0$ et $\omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$ de classe $\mathscr{C}^2$ tels que $\Omega \cap B(R, O) = K^R_\omega$. Ici, nous définissons $B(R, O) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, |\boldsymbol{x}| < R\}$.

Nous savons que le caractère bien posé du problème (11.17) dépend des propriétés de $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$. En vertu du théorème de Lax-Milgram, cet opérateur est injectif en toute dimension. Le travail se résume donc à obtenir des informations sur son conoyau. D'après [100], nous savons qu'un bon point de départ consiste à déterminer les fonctions non triviales de la forme

$$u(\boldsymbol{x}) = r^\Lambda \Phi(\boldsymbol{\theta}) \tag{11.34}$$

vérifiant le problème

$$\Delta u = 0 \text{ p.p. dans } K_\omega^\infty \qquad \text{et} \qquad u = 0 \text{ p.p. sur } \partial K_\omega^\infty.$$

Ici, nous avons noté $K_\omega^\infty := \{r\,\boldsymbol{\theta}\,|\,0 < r,\, \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$. Cette recherche de solutions à variables séparées du problème homogène s'apparente au calcul des modes dans les guides d'ondes. En coordonnées sphériques, l'opérateur Laplacien s'écrit formellement

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\tilde{\Delta},$$

où $\tilde{\Delta}$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité. On peut alors obtenir les expressions des exposants de singularité dans (11.34) :

$$\Lambda_k^\pm := 1 - \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 + \mu_k}. \tag{11.35}$$

Ici, μ_k, est la $k^{\text{ième}}$ valeur propre du problème

$$\left| \begin{array}{rcll} -\tilde{\Delta}\Phi(\boldsymbol{\theta}) & = & \mu\,\Phi(\boldsymbol{\theta}) & \text{dans } \omega \\ \Phi(\boldsymbol{\theta}) & = & 0 & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. , \tag{11.36}$$

et les fonctions Φ dans (11.34) sont égales aux fonctions propres du problème (11.36). L'opérateur de Laplace-Beltrami est autoadjoint défini-positif. Par conséquent, les valeurs propres du problème (11.36) forment la suite

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \qquad \text{avec } \mu_k \to \infty \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Classiquement, la première valeur propre μ_1 est simple (cf. [93, théorème 1.2.5]). Les exposants positifs de (11.34) vérifient alors

$$0 < \Lambda_1^+ < \Lambda_2^+ \leq \Lambda_3^+ \leq \dots \qquad \text{avec } \Lambda_k^+ \to \infty \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Les exposants négatifs sont eux donnés par $\Lambda_k^- = 2 - d - \Lambda_k^+$.

Introduisons maintenant des espaces adaptés pour mesurer les singularités (11.34). Notons $\mathscr{C}_0^\infty(\overline{\Omega}\backslash O) := \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})\,|\,\text{supp}(\varphi) \cap B(O,\delta) = \emptyset \text{ pour un certain } \delta > 0\}$. Pour $l \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, définissons alors l'espace $\mathrm{V}_\beta^l(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\overline{\Omega}\backslash O)$ pour la norme

$$\|\varphi\|_{\mathrm{V}_\beta^l(\Omega)} := \Big(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq l} \int_\Omega r^{2(\beta - l + |\boldsymbol{\alpha}|)} |\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi|^2 \, d\boldsymbol{x} \Big)^{1/2}. \tag{11.37}$$

Dans la définition ci-dessus, pour le multi-indice $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous avons utilisé les notations $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$. Attention, les α ici n'ont pas de rapport avec l'ouverture du cône en O. Dans la suite, il n'y aura pas de confusion possible. Pour $l \geq 1$, on peut définir la trace des éléments de $\mathrm{V}_\beta^l(\Omega)$ sur $\partial\Omega$. Celle-ci n'a aucune raison d'être nulle. Pour prendre en compte la condition de Dirichlet homogène, introduisons, pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, l'espace $\mathring{\mathrm{V}}_\beta^l(\Omega)$, fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme (11.37).

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, nous pouvons alors définir les opérateurs

$$\begin{array}{rccl} A_\beta^l : & \mathrm{V}_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{\beta-l}^1(\Omega) & \to & \mathrm{V}_\beta^{l-1}(\Omega) \\ & \varphi & \mapsto & A_\beta^l \varphi = \Delta\varphi \end{array} . \tag{11.38}$$

On a le théorème fondamental (voir notamment [100, 102, 119, 114, 70, 71]

Théorème 11.4.23 *Soit Λ_1^+ défini en (11.35). Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $A_\beta^l : \mathrm{V}_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{\beta-l}^1(\Omega) \to \mathrm{V}_\beta^{l-1}(\Omega)$ constitue un isomorphisme si et seulement si*

$$1 - \Lambda_1^+ < \beta - l + \frac{d}{2} < d - 1 + \Lambda_1^+. \tag{11.39}$$

Plus précisément,
i) si $\beta - l + d/2 < 1 - \Lambda_1^+$, A_β^l est de type Fredholm injectif mais pas surjectif ;
ii) si $\beta - l + d/2 > d - 1 + \Lambda_1^+$, A_β^l est de type Fredholm surjectif mais pas injectif ;
iii) si $\beta - l + d/2 = 1 - \Lambda_1^+$ ou si $\beta - l + d/2 = d - 1 + \Lambda_1^+$, l'opérateur A_β^l n'est pas de type Fredholm car son image n'est pas fermée dans $\mathrm{V}_\beta^{l-1}(\Omega)$.

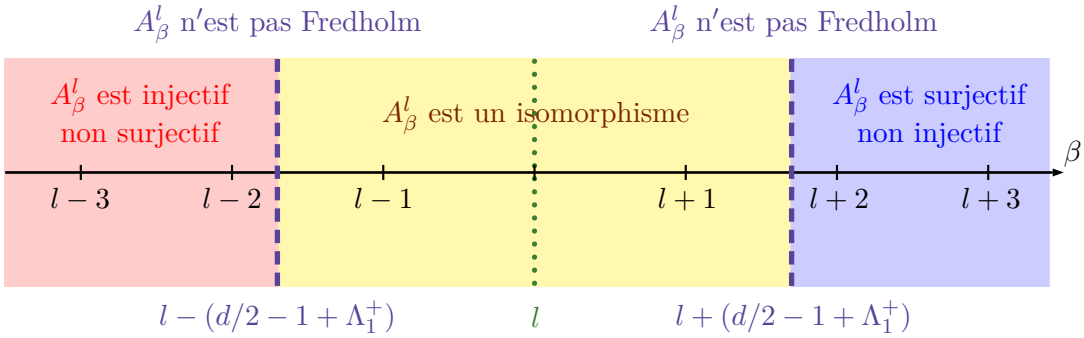


FIGURE 11.9 – Propriétés de l'opérateur $A_\beta^l : \mathrm{V}_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{\beta-l}^1(\Omega) \to \mathrm{V}_\beta^{l-1}(\Omega)$ en fonction de β, d étant la dimension de l'espace.

Pour notre problème, nous nous intéressons à l'opérateur A_0^1, *i.e.* A_β^l avec $l = 1$ et $\beta = 0$. En effet, on remarque que $\mathrm{V}_0^0(\Omega) = \mathrm{L}^2(\Omega)$. D'autre part, on peut montrer (voir [121, lemme 3.4]) le

Lemme 11.4.24 *On a $\mathrm{V}_0^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{-1}^1(\Omega) = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$.*

Remarque 11.4.25 *L'injection $\mathrm{V}_0^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{-1}^1(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ est directe. L'autre sens se montre en utilisant une inégalité de Hardy et l'inégalité de Poincaré sur $\omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$.*

⋆⋆⋆⋆⋆

POINTES CONIQUES EN DIMENSION $d \geq 4$

⋆⋆⋆⋆⋆

Le Théorème 11.4.23 indique que l'opérateur $A_0^1 : \mathrm{V}_0^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{V}}_{-1}^1(\Omega) \to \mathrm{V}_0^0(\Omega)$ constitue un isomorphisme si et seulement si

$$1 - \Lambda_1^+ < 0 - 1 + d/2 < d - 1 + \Lambda_1^+ \quad \Leftrightarrow \quad d > 4 - 2\Lambda_1^+.$$

Ceci est toujours vrai en dimension $d \geq 4$. En vertu, du Lemme 11.4.24, on déduit que l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme. En procédant comme dans la preuve du Théorème 11.2.1, avec la technique de la T-coercivité, on montre alors sans difficulté la

Proposition 11.4.26 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 4$, un domaine dont la frontière est de classe $\mathscr{C}^2$ mis à part en un nombre fini de points où il coïncide localement avec un cône non convexe. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

⋆⋆⋆⋆⋆

POINTES CONIQUES EN DIMENSION $d = 3$

⋆⋆⋆⋆⋆

En dimension $d = 3$, on n'a pas nécessairement $d > 4 - 2\Lambda_1^+$. Cela dépend de la valeur de Λ_1^+, donc de celle de μ_1, la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la portion de sphère ω.

La valeur propre $\mu_1(\omega)$ dépend continûment du domaine ω (voir [98, 93]) et, d'après le principe du *min-max* si $\omega_a \subset \omega_b$, on a $\mu_1(\omega_a) > \mu_1(\omega_b)$. Par conséquent, lorsque Ω est convexe, on a $\mu_1(\omega) > \mu_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{S}^2) = 2$. Cela implique $\Lambda_1^+ > 1$. Ainsi, lorsque la pointe conique est convexe, on a $d > 4 - 2\Lambda_1^+$ dès lors que $d \geq 2$ et l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ constitue un isomorphisme. Ceci est en accord avec le théorème 3.2.1.2 de [87] que nous avons utilisé et qui indique que $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est un isomorphisme en dimension quelconque dès lors que le domaine Ω est convexe. Ce résultat reste vrai quand la pointe conique est non convexe avec $\Lambda_1^+ > 1/2 \Leftrightarrow \mu_1 > 3/4$. Ceci permet d'énoncer la

Proposition 11.4.27 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine dont la frontière est de classe $\mathscr{C}^2$ mis à part en un en point O où il coïncide avec un cône d'ouverture $\omega \subset \mathbb{S}^2$. Supposons ω tel que $\mu_1(\omega)$, la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami définie en (11.36), vérifie $\mu_1(\omega) > 3/4$. Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Remarque 11.4.28 *Ce résultat n'est pas vide ! En effet, il existe des pointes coniques non convexes pour lesquelles $\mu_1(\omega) > 3/4$. Pour se persuader de cela, il suffit de se souvenir que $\mu_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{S}^2) = 2$ et que $\mu_1(\omega)$ dépend continûment de ω.*

Comme indiqué dans le lemme 5.1 de [121], il existe des pointes coniques telles que $\mu_1(\omega) < 3/4$. Ceci implique l'existence de points coniques pour lesquelles $\mu_1(\omega) = 3/4$ (cf. [68, 54, 4]). Pour ces dernières, d'après le Théorème 11.4.23, l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ n'est pas de type Fredholm car son image n'est pas fermée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. L'on ne peut alors pas utiliser le procédé de résolution itérative pour montrer que le problème (11.17) est bien posé. Pour de telles pointes coniques, l'exemple 5.3.2 de [121] montre que l'opérateur $\tilde{B}$ n'est pas de type Fredholm pour $\sigma = 1$. Laissons ces cas de côté et supposons maintenant Ω tel que $\mu_1(\omega) < 3/4$.

Le lemme 5.2 de [121] indique que $\Lambda_2^+ > 1$. Par conséquent le conoyau de $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est de dimension égale à un. Nous allons pouvoir remettre en place la démarche qui a permis de démontrer les Propositions 11.4.15 et 11.4.21.

Introduisons la fonction ζ telle que

$$\zeta(\boldsymbol{x}) = r^{-1-\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta}) + \tilde{\zeta}(\boldsymbol{x}), \tag{11.40}$$

où $\tilde{\zeta}$ est l'unique élément de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta\tilde{\zeta} = 0$ p.p. dans Ω et $\tilde{\zeta} = -r^{-1-\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta})$ p.p. sur $\partial\Omega$. Considérons ensuite la fonction $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que

$$\Delta\psi = \sigma^{-1}\zeta. \tag{11.41}$$

Lorsque σ change de signe, il peut arriver que $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$. Dans ce cas, on montre comme en 2D que $\psi \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et donc $\psi \in \ker \tilde{B}$. De plus, dans cette situation, le problème (11.17) possède un conoyau. Pour caractériser ce dernier, introduisons la fonction $\xi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que

$$(\nabla\xi, \nabla\xi')_\Omega = (\sigma^{-1}\zeta, \xi')_\Omega, \qquad \forall \xi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \tag{11.42}$$

Nous pouvons énoncer à présent la

Proposition 11.4.29 *Supposons le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^2$ mis à part en un point O où il coïncide avec un cône d'ouverture $\omega \subset \mathbb{S}^2$. Supposons ω tel que $\mu_1(\omega)$, la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami définie en (11.36), vérifie $\mu_1(\omega) < 3/4$.*

Si $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$. Alors $\tilde{B} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme.

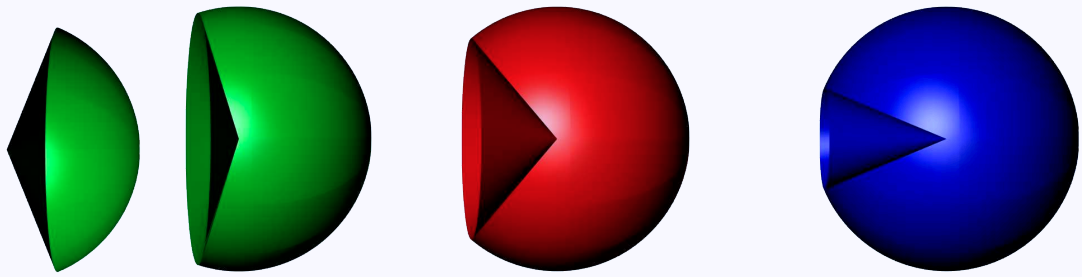
Si $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ vérifie $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$. Alors pour tout $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, le problème (11.17) possède une solution si et seulement si $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$. Dans ce cas, la solution est définie à la droite $\mathrm{vect}(\psi)$ près.

Dans cet énoncé, les fonctions ζ, ξ et ψ sont respectivement définies en (11.40), (11.42) et (11.41).

◇ Exemple. Introduisons les coordonnées sphériques définies par les relations $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi)$. Pour $R > 0$ et $0 < \alpha < \pi$ considérons le domaine

$$\Omega := \{(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi),\ 0 < r < R,\ 0 \leq \theta < \alpha,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Pour $\alpha \in]\pi/2; \pi[$, on a $\zeta(\boldsymbol{x}) = r^{-1-\Lambda_1^+}\Phi_1(\boldsymbol{\theta}) - R^{-1-\Lambda_1^+}(r/R)^{\Lambda_1^+}\Phi_1(\boldsymbol{\theta})$. Appelons $\alpha_c > \pi/2$ la valeur de α pour laquelle on a $\mu_1(\omega) = 3/4$.



Lorsque $0 < \alpha < \alpha_c$, l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ définit un isomorphisme. Par conséquent, $\tilde{B} : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ constitue un isomorphisme.

Lorsque $\alpha = \alpha_c$, l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ n'est pas de type Fredholm. Par conséquent, même pour $\sigma = 1$, $\tilde{B}$ n'est pas de type Fredholm.

Lorsque $\alpha > \alpha_c$, si σ vérifie $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$, $\tilde{B}$ est un isomorphisme. Si σ vérifie $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$, (11.17) possède une solution si et seulement si $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$. Dans ce cas, la solution est définie à $\mathrm{vect}(\psi)$ près.

Arêtes non convexes en dimension $d = 3$

Le cas des « singularités géométriques non convexes » de dimension supérieure ou égale à 1 présente des difficultés supplémentaires. La Figure 11.10 montre des arêtes en dimension 3 (singularités géométriques non convexes de dimension 1). Effectuons quelques remarques concernant cette configuration. Dans une telle géométrie, l'opérateur injectif $\Delta : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ n'est pas de type Fredholm. Pour faire court, cela vient du fait que les *coefficients* devant les singularités sont remplacés par des *fonctions*. Le conoyau de Δ, égal à $\mathrm{vect}(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ en 2D (cf. Proposition 11.4.10) est maintenant un espace fonctionnel de dimension infinie. Lorsque $\sigma = 1$, dans [120], les auteurs parviennent tout de même à montrer que le problème (11.17) est bien posé en étendant l'idée du cas 2D. Cette fois-ci les relations de compatibilité sont écrites contre des espaces fonctionnels tout entier. On peut imaginer dérouler la même démarche pour étudier le problème (11.17). On obtiendrait un résultat du type : le problème (11.17) est bien posé si σ vérifie une infinité de relations

d'« orthogonalité ». Lorsque ce n'est pas le cas, on peut penser qu'il existe des configurations pour lesquelles l'opérateur $\tilde{B}$ associé au problème (11.17) n'est pas de type Fredholm.

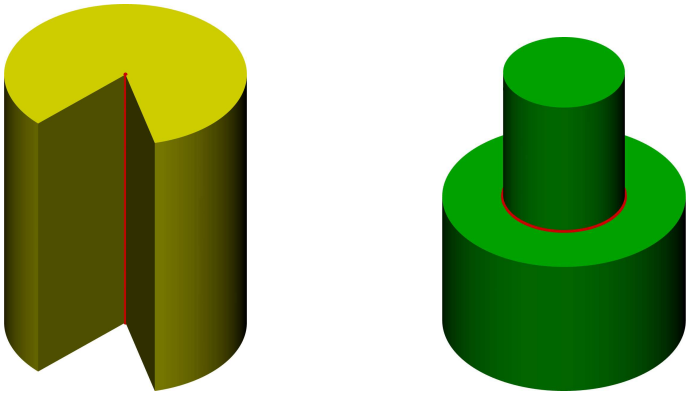


FIGURE 11.10 – Arêtes non convexes (en rouge).

11.4.4 Problème posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Delta)$

Jusqu'à présent dans cette section, nous avons imposé de façon faible la condition $\sigma\Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$ en travaillant avec la formulation

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \ \text{ tel que :}\\ \displaystyle\int_\Omega \sigma\Delta u \Delta\varphi = \langle f, \varphi\rangle_\Omega\,, \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega).\end{array}\right.$$

Notons que cette formulation variationnelle a encore un sens, pour un terme source suffisamment régulier, lorsque les fonctions u, φ sont choisies dans l'espace des éléments de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dont le Laplacien appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier une telle formulation. Dans cette optique, introduisons $\mathrm{H}_0^1(\Delta) := \{\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \,|\, \Delta\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}$. D'après le théorème de Lax-Milgram, on a $\|\varphi\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\,\|\Delta\varphi\|_\Omega$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)$. Par conséquent, $(u,v) \mapsto (u,v)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}_0^1(\Delta)$. Pour $f \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)^*$, considérons le problème

$$\left|\begin{array}{lll}\text{Trouver } u^\sharp \in \mathrm{H}_0^1(\Delta) \ \text{ tel que :} & & \\ b^\sharp(u^\sharp, \varphi) & = & \langle f, \varphi\rangle_\Omega\,, \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)\end{array}\right. \tag{11.43}$$

avec

$$b^\sharp(v,\varphi) \quad = \quad (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega, \qquad \forall(v,\varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Delta) \times \mathrm{H}_0^1(\Delta).$$

Introduisons l'opérateur continu de $\mathrm{H}_0^1(\Delta)$ associé tel que

$$(B^\sharp v, \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = b^\sharp(v,\varphi), \qquad \forall(v,\varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Delta) \times \mathrm{H}_0^1(\Delta). \tag{11.44}$$

On a alors la

Proposition 11.4.30 *Supposons $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ avec $\sigma^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Alors $B^\sharp : \mathrm{H}_0^1(\Delta) \to \mathrm{H}_0^1(\Delta)$ définit un isomorphisme.*

Preuve. Introduisons l'opérateur $\mathtt{T}$ qui à $v \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)$ associe la fonction $\mathtt{T}v \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)$ telle que $\Delta(\mathtt{T}v) = \sigma^{-1}\Delta v$. La continuité de $\mathtt{T}$ ne souffre d'aucune contestation. Pour tout $(v,\varphi) \in \mathrm{H}_0^1(\Delta) \times \mathrm{H}_0^1(\Delta)$, on a

$$(B^\sharp(\mathtt{T}v), \varphi)_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} = b^\sharp(\mathtt{T}v, \varphi) = (\sigma\Delta(\mathtt{T}v), \Delta\varphi)_\Omega = (\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega.$$

Par conséquent, nous avons $B^\sharp \circ \mathtt{T} = \mathrm{Id}$. Puisque $B^\sharp$ est autoadjoint, nous déduisons que $B^\sharp$ constitue un isomorphisme d'inverse égal à $\mathtt{T}$. ■

Intéressons-nous à la régularité de la solution $u^\sharp$ du problème (11.43). On a $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Delta) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et donc $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Delta)^* \subset (\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))^*$. Considérons $f \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)^*$. Réécrivons le problème (11.17).

$$\left| \begin{array}{lll} \text{Trouver } \tilde{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) & \text{tel que :} & \\ \tilde{b}(\tilde{u}, \varphi) & = & \langle f, \varphi \rangle_\Omega \,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{11.45}$$

Nous voulons comparer $u^\sharp$ à la solution $\tilde{u}$ du problème (11.45) lorsque cette dernière est bien définie.

Dès lors que le domaine Ω est tel que l'opérateur $\Delta : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ constitue un isomorphisme, on a $\mathrm{H}_0^1(\Delta) = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Dans ce cas, par exemple lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est convexe, de classe $\mathscr{C}^2$ ou égale à une pointe conique en dimension $d \geq 4$, on a $u^\sharp = \tilde{u}$.

Étudions maintenant une situation dans laquelle, $\mathrm{H}_0^1(\Delta) \neq \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Plaçons-nous en dimension 2, dans un domaine Ω présentant, pour fixer les idées, un seul coin rentrant situé en O. Réintroduisons la fonction ζ définie en (11.19) vérifiant $\zeta \neq 0$, $\zeta \in \mathrm{L}^2(\Omega) \backslash \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\Delta\zeta = 0$ p.p. dans Ω et $\zeta = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Comme en (11.24), définissons $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ la fonction telle que $\Delta\psi = \sigma^{-1}\zeta$. Puisque $\zeta \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on a $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)$ et donc $b^\sharp(u^\sharp, \psi) = \langle f, \psi \rangle_\Omega$. Ceci s'écrit également $(\Delta u^\sharp, \zeta)_\Omega = \langle f, \psi \rangle_\Omega$. Ainsi, en vertu du Corollaire 11.4.5, on a $u^\sharp \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ si et seulement si $\langle f, \psi \rangle_\Omega = 0$. Distinguons alors deux cas.

- Si $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$, alors le problème (11.45) est bien posé d'après la Proposition 11.4.7. Par conséquent, la solution $\tilde{u}$ du problème (11.45) est définie de façon unique.
  - Si $\langle f, \psi \rangle_\Omega = 0$, alors $u^\sharp$ vérifie le même problème que $\tilde{u}$. On déduit $u^\sharp = \tilde{u}$ dans cette configuration.
  - Si $\langle f, \psi \rangle_\Omega \neq 0$, alors $u^\sharp \notin \mathrm{H}^2(\Omega)$ et donc $u^\sharp \neq \tilde{u}$. Plus précisément, puisque $(\sigma\Delta(\tilde{u} - u^\sharp), \Delta\varphi)_\Omega = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, on déduit $\Delta(u^\sharp - \tilde{u}) = a\,\sigma^{-1}\zeta$, où a est une constante. En multipliant par ζ, en intégrant sur Ω et en utilisant le fait que $\tilde{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, on déduit $a = (\Delta u^\sharp, \zeta)/(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = \langle f, \psi \rangle_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$. Ainsi, dans cette configuration, on a
$$u^\sharp - \tilde{u} = \frac{\langle f, \psi \rangle_\Omega}{(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega}\, \psi$$
- Si $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$, alors, d'après la Proposition 11.4.9, le problème (11.45) possède une solution si et seulement si $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$, en supposant pour simplifier $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Supposons donc cela vérifié. On a alors $u^\sharp \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Expliquons pourquoi ψ appartient à $\ker \tilde{B}$ mais pas à $\ker B^\sharp$. Pour constituer un élément du noyau de $\tilde{B}$, il suffit de vérifier $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Puisque $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = (\zeta, \Delta\varphi)_\Omega$, on a bien $\psi \in \ker \tilde{B}$. Par contre, $\psi \in \ker B^\sharp$ si et seulement si on a $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Delta)$. En testant avec φ tel que $\Delta\varphi = \zeta$, on voit que ψ n'est pas un élément de $\ker B^\sharp$. Bien sûr, un tel φ n'appartient pas à $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ car $(\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$.

Conclusions et perspectives

Terminons ce travail en présentant quelques points qui paraissent intéressants à développer. Nous commencerons par exposer les questions découlant naturellement de l'étude que nous avons menée. Dans un second temps, nous tâcherons de prendre un peu de hauteur en décrivant quelques perspectives plus générales.

Conclusions

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons étudié le problème scalaire auquel on peut réduire les équations de Maxwell lorsque la géométrie et les données présentent une invariance dans une direction. La question du caractère Fredholm de l'opérateur associé à ce problème est maintenant claire en 2D. En 3D, cependant, en raison du nombre important de configurations, les résultats sont moins limpides. Il serait intéressant de pouvoir calculer les singularités pour certaines géométries (pour la pointe conique et le coin de Fichera notamment) pour savoir si le critère obtenu de façon variationnelle est optimal ou non. D'autre part, pour les intersections d'arêtes, mis à part pour le coin de Fichera, nous n'avons aucune méthode pour déterminer le « bon » opérateur de transfert permettant de construire l'isomorphisme $\mathtt{T}$ de la $\mathtt{T}$-coercivité. Dans ce travail, nous ne nous sommes pas réellement penchés sur la question de l'injectivité du problème lorsque celui-ci est bien posé au sens de Fredholm. Nous avons élucidé ce point pour la cavité en 2D et en 3D mais dans le cas général, nous n'avons pas de résultat si ce n'est une condition abstraite. Peut-on trouver un critère liant le contraste et la géométrie du domaine (probablement le rapport du volume du domaine occupé par le matériau positif sur le volume du domaine occupé par le matériau négatif) pour assurer que l'opérateur associé à ce problème scalaire constitue un isomorphisme ? Il y a sans doute des choses à faire en utilisant les outils de l'analyse complexe. Dans le Chapitre 2, nous nous sommes intéressés à des questions d'approximation de la solution du problème scalaire lorsque celui est bien posé. Nous avons montré que les méthodes usuelles utilisant les éléments finis de Lagrange convergent lorsque le maillage respecte certaines hypothèses. Ces dernières sont-elles nécessaires ? En pratique, lorsqu'on réalise les expériences numériques pour des maillages quelconques, il n'apparaît pas de problème majeur. Nous avons réfléchi à la question mais pour le moment, nous nous cassons les dents. Dans le Chapitre 3, nous avons effectué une étude de régularité de la solution du problème scalaire en reprenant les résultats de [72, 26, 138]. Nous avons été confrontés à un problème qui n'avait pas été souligné outre mesure. En raison du changement de signe du coefficient de l'opérateur, il n'est pas évident de déterminer la longueur des chaînes de Jordan dans le calcul permettant d'obtenir la décomposition des solutions en partie régulière/partie singulière. Nous nous en sommes sortis en 2D par un calcul explicite dans une géométrie particulière. En 3D, cela sera sans doute impossible à réaliser.

Dans un second temps, nous avons défini un nouveau cadre fonctionnel pour le problème scalaire lorsque celui n'est pas bien posé dans H^1 en raison de l'existence d'une « singularité propagative » au niveau du coin. Nous nous sommes concentrés sur le cas d'un coin extérieur. Il faudrait écrire

complètement la démarche pour le cas d'un coin intérieur pour vérifier qu'il n'y a pas d'entourloupe. Pour aller plus loin, nous pourrions étendre ces résultats à des configurations 3D, l'objectif étant toujours de pouvoir traiter les équations de Maxwell à l'intérieur de l'intervalle critique. On pourrait commencer par étudier le cas de la pointe conique qui devrait se traiter comme le coin 2D. On pourrait également travailler sur le cas de l'arête. Cette étude-là constitue par contre une étape technique supplémentaire. En effet, le coefficient devant la singularité en 2D devient une fonction de singularité pour l'arête. En quelque sorte, il y a un coefficient de singularité en chaque point de l'arête. Plus épineuse encore serait l'étude de ces questions pour une géométrie présentant une intersection d'arêtes (coin de Fichera par exemple). Nous ne savons pas si c'est réalisable. Par ailleurs, il existe de nombreuses questions originales d'approximation de la solution dans ce nouveau cadre fonctionnel. Nous renvoyons le lecteur au §5.7 pour plus de détails. Dans le Chapitre 6, nous avons étudié la question de la dépendance de la solution du problème, lorsqu'elle existe, par rapport à un petit arrondi du coin. Nous nous sommes intéressés à la situation la plus compliquée lorsque le problème limite n'est pas bien posé dans H^1. Sur une géométrie particulière, nous avons mis en évidence une instabilité par rapport à l'arrondi. Il nous reste à prouver un résultat d'existence du phénomène de valeur propre clignotante pour une géométrie quelconque. Ce problème n'est pas évident car en raison du changement de signe du paramètre physique, on ne peut pas utiliser les résultats classiques de type *inf-sup*. Dans les perspectives de travail, nous pouvons mentionner l'extension de ces résultats au cas des équations de Maxwell. C'est sans doute un programme ambitieux et probablement extrêmement technique.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée aux équations de Maxwell. Dans le Chapitre 7, nous avons exhibé une originalité du cadre fonctionnel pour ces équations lorsque les problèmes scalaires associés sont bien posés au sens de Fredholm mais avec un noyau non trivial. Quels sont les conséquences de cette bizarrerie d'un point de vue numérique ? Si l'on met en place les méthodes usuelles, observe-t-on un problème de convergence ? une convergence vers la mauvaise solution ? Si les approches classiques ne fonctionnent pas, peut-on en définir une nouvelle ? Dans le Chapitre 8, nous avons démontré un résultat d'injection compacte de l'espace des champs électriques dans $\mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ en effectuant une étude de régularité. Ce résultat est essentiel dans l'analyse des équations de Maxwell. La démarche est-elle transposable en 3D ? Pour traiter le problème dans l'intervalle critique, il semble indispensable de pouvoir passer par là. Dans le Chapitre 9, nous avons prouvé que les équations de Maxwell 3D sont bien posées dès lors que les problèmes scalaires associés sont bien posés. Peut-on montrer que les équations de Maxwell ne sont pas bien posées dans l'espace des champs d'énergie finie lorsque les problèmes scalaires ne sont pas bien posés dans H^1 ? Comment nous l'avons déjà mentionné à plusieurs reprises, un travail intéressant consisterait à définir un nouveau cadre fonctionnel pour ces équations lorsque les problèmes scalaires sont bien posés dans l'espace prenant en compte la singularité propagative. Cela devrait conduire à manipuler le gradient de cette fonction. Notons que celui-ci n'appartiennent pas à $\mathbf{L}^2$. Une première étape consistera sans doute à traiter le cas d'une géométrie pour laquelle l'interface présente une pointe conique. Indiquons qu'il s'agit d'un travail difficile car même pour un matériau positif, la compréhension des phénomènes liés aux singularités pour les équations de Maxwell consitue une question délicate (cf. [62, 27, 63, 64, 91, 65, 111, 112]). D'un point de vue de l'approximation numérique de la solution, tout reste à faire. Peut-on justifier la convergence des méthodes d'éléments finis d'arêtes classiques ? A-t-on besoin d'hypothèses sur le maillage ? Il est fort probable qu'on puisse exploiter la méthode d'approximation utilisant la dissipation. Il reste cependant à écrire le raisonnement entièrement.

Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous nous sommes concentrés sur le problème de transmission intérieur qui apparaît dans la théorie de la diffraction. Dans le Chapitre 10, nous avons prouvé le caractère discret dénombrable de l'ensemble des valeurs propres de transmission pour une formulation du second ordre. Pour obtenir ce résultat, nous avons été contraints d'effectuer

des hypothèses sur les coefficients. Peut-on les affaiblir ? Le lecteur désirant une description plus précise des questions ouvertes dans ce domaine est invité à consulter le §10.3. Dans le Chapitre 11, nous avons travaillé sur un problème de transmission du quatrième ordre présentant un changement de signe. Nous avons montré que l'opérateur $\Delta\sigma\Delta\cdot$ associé à ce problème possède des propriétés très différentes de celles de l'opérateur $\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot)$. Nous avons effectué la démonstration lorsque σ reste uniformément positif ou uniformément négatif dans un voisinage de la frontière. Qu'advient-il lorsque cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite ?

Perspectives

Ces résultats indiquent que les problèmes de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif en régime harmonique ne sont pas toujours bien posés dans les cadres fonctionnels classiques. Qu'est-ce que cela signifie en pratique ? Il n'est pas évident de répondre à cette question. On peut d'abord nier le problème en arguant que dans la nature, il y a toujours de la dissipation et les coins sont toujours arrondis. Néanmoins, cette position n'est pas complètement satisfaisante. En effet, nous avons vu que le comportement d'un matériau peu dissipatif ou présentant un coin très légèrement arrondi dépend de façon cruciale du problème limite. Nous avons déjà mentionné le fait que le métamatériau n'est pas un matériau homogène mais une structure périodique complexe. On peut légitimement imaginer qu'il apparaît des phénomènes compliqués au niveau des interfaces entre ces structures périodiques et les matériaux homogènes positifs, notamment au niveau des coins. Lorsque les problèmes sont mal posés, il est probable que les équations de Maxwell sur lesquelles nous travaillons ne modélisent pas bien les phénomènes électromagnétiques réels. C'est un peu ce qui a motivé le projet ANR Métamath coordonnée par S. Fliss. Dans ce projet, nous cherchons à comprendre ce qui a été perdu lors du processus d'homogénéisation. Pour les métaux, il y a de quoi être circonspect. En effet, ce ne sont pas des matériaux homogénéisés. Que se passe-t-il au voisinage des coins lorsque le contraste est situé dans l'intervalle critique ? La question de l'existence de cette singularité propagative en pratique présente assurément un intérêt pour les applications. Avec S.N. Chandler-Wilde, nous sommes récemment allés rendre visite à l'équipe du physicien A. Zayats basé à King's College, à Londres, pour discuter de la pertinence du développement de méthodes de calcul pour simuler les plasmons de surface. A. Zayats est à la tête d'un projet de recherche impressionnant, regroupant trois des plus prestigieuses universités du Royaume-Uni, dont l'objectif est de développer les technologies nanoplasmoniques pour les applications. Il nous a expliqué qu'il utilisait ces interfaces présentant des géométries singulières pour stocker de l'énergie. Il a manifesté un intérêt certain pour de nouvelles méthodes numériques permettant de traiter les singularités. Nous lui avons parlé de cette singularité propagative et il a rapidement imaginé des applications potentielles. Mais peut-on réellement observer ce trou noir ? L'étude que nous avons réalisée pour le coin arrondi n'est pas très rassurante. En effet, dans cette configuration, il semble que le champ électromagnétique soit très instable par rapport au petit arrondi. Ce point est un peu déroutant. En effet, si l'on souhaite approcher le champ dans une structure présentant un coin légèrement arrondi, il faut être capable de mesurer la géométrie avec une infinie précision. C'est bien sûr impossible. Cela signifie que dans ce cas, l'on est incapable d'approcher le champ électromagnétique ? Pour pouvoir utiliser le phénomène de trou noir, on peut également chercher à le stabiliser de façon artificielle. Pour ce faire, on peut imaginer ajouter autour du coin arrondi un matériau bien choisi jouant un rôle de PML. Est-ce réalisable ?

Dans le Chapitre 4, nous sommes revenus aux équations de Maxwell en régime temporel pour effectuer un bilan énergétique. Par contre, dans tout le reste de ce mémoire, nous avons travaillé en régime harmonique. Pour cela, nous avons supposé qu'il existait un régime harmonique. Est-ce bien vrai ? Autrement dit, pour les matériaux négatifs, le principe d'amplitude limite est-il encore valable ? Récemment, V. Vinoles, P. Ciarlet et P. Joly ont commencé à étudier cette question. Il semblerait que l'atteinte d'un régime stable dans un matériau négatif seul (sans interface donc) puisse prendre un certain temps. Il serait sans doute très intéressant de poursuivre les investigations

dans cette direction.

Pour le moment, les principales recherches des physiciens portent sur les métamatériaux en électromagnétisme. Toutefois, l'on voit apparaître petit à petit quelques résultats concernant les métamatériaux en élasticité. Il est donc fort probable qu'il y ait du pain sur la planche et des problèmes nouveaux très rapidement ...

Bibliographie

[1] M.S. Agranovich et M.I. Vishik : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russ. Math. Surv.*, 19(3):53, 1964.

[2] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge et V. Girault : Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 21:823–864, 1998.

[3] S. Anantha Ramakrishna : Physics of negative refractive index materials. *Rep. Prog. Phys.*, 68(2):449–521, 2005.

[4] F. Assous, P. Ciarlet Jr. et S. Labrunie : Theoretical tools to solve the axisymmetric maxwell equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25(1):49–78, 2002.

[5] F. Assous, P. Ciarlet Jr. et J. Segré : Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the singular complement method. *J. Comput. Phys.*, 161(1):218–249, 2000.

[6] F. Assous, P. Ciarlet Jr. et E. Sonnendrücker : Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners. *Math. Model. Numer. Anal.*, 32(3):359–389, 1998.

[7] M. Azaiez, M. Dauge et Y. Maday : Méthodes spectrales et des éléments finis spectraux. *In* G. Cohen, éditeur : *École des ondes INRIA : Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*, 1994.

[8] W.L. Barnes, A. Dereux et T.W. Ebbesen : Surface plasmon subwavelength optics. *Nature*, 424(6950):824–830, 2003.

[9] C. Bellis : *Qualitative Methods for Inverse Scattering in Solid Mechanics*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2010.

[10] C. Bellis, F. Cakoni et B.B. Guzina : Nature of the transmission eigenvalue spectrum for elastic bodies. *IMA J. Appl. Math.*, doi :10.1093/imamat/hxr070, 2012.

[11] C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday : Compatibilité de traces aux arêtes et coins d'un polyèdre. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 331(9):679–684, 2000.

[12] M. Sh. Birman et M. Z. Solomyak : L_2-theory of the Maxwell operator in arbitrary domains. *Russ. Math. Surv.*, 42(6):75–96, 1987.

[13] M. Sh. Birman et M. Z. Solomyak : Maxwell operator in regions with nonsmooth boundaries. *Sib. Math. J.*, 28(1):12–24, 1987.

[14] M. Sh. Birman et M. Z. Solomyak : The Weyl asymptotics of the spectrum of the Maxwell operator for domains with a Lipschitz boundary. *Vestn. Leningr. Univ., Math.*, 127(3):23–28, 1987.

[15] M. Sh. Birman et M. Z. Solomyak : Construction in a piecewise smooth domain of a function of the class H^2 from the value of the conormal derivative. *J. Math. Sci.*, 49(5):1128–1136, 1990.

[16] H. Blum et M. Dobrowolski : On finite element methods for elliptic equations on domains with corners. *Computing*, 28(1):53–63, 1982.

[17] A. Boltasseva, V.S. Volkov, R.B. Nielsen, E. Moreno, S.G. Rodrigo et S.I. Bozhevolnyi : Triangular metal wedges for subwavelength plasmon-polariton guiding at telecom wavelengths. *Opt. Express*, 16(8):5252–5260, 2008.

[18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *Math. Model. Numer. Anal.*, 46(06):1363–1387, 2012.

[19] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Soumis à Appl. Num. Math., Special Issue : NELIA 2011*, 24 pages, 2012.

[20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : T-coercivity for the Maxwell transmission problem between a dielectric and a negative material. *En cours*, 27 pages, 2012.

[21] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et X. Claeys : Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Math. Models Meth. App. Sci., Accepté*, 33 pages, 2012.

[22] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et H. Haddar : On the use of T-coercivity to study the Interior Transmission Eigenvalue Problem. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 340(11-12):647–651, 2011.

[23] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr. et C.M. Zwölf : Two-and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants. *J. Comput. Appl. Math.*, 204(2):408–417, 2007.

[24] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr. et C.M. Zwölf : A new compactness result for electromagnetic waves. Application to the transmission problem between dielectrics and metamaterials. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 18(9):1605–1631, 2008.

[25] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr. et C.M. Zwölf : Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(9):1912–1919, 2010. Corrigendum *J. Comput. Appl. Math.*, 234(9):2616, 2010.

[26] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, D. Dauge et K. Ramdani : Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 328(8):717–720, 1999.

[27] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard et S. Lohrengel : A singular field method for the solution of maxwell's equations in polyhedral domains. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(6):2028–2044, 1999.

[28] G. Bouchitté et C. Bourel : Multiscale nanorod metamaterials and realizable permittivity tensors. *Commun. in Comput. Phys*, 11(2):489–507, 2012.

[29] G. Bouchitté, C. Bourel et D. Felbacq : Homogenization of the 3D Maxwell system near resonances and artificial magnetism. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 347(9-10):571–576, 2009.

[30] C. Bourel : *Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés.* Thèse de doctorat, Université du Sud Toulon-Var, 2010.

[31] M. Bourlard, M. Dauge, M.-S. Lubuma et S. Nicaise : Coefficients of the singularities for elliptic boundary value problems on domains with conical points. III : Finite element methods on polygonal domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1):136–155, 1992.

[32] F. Brezzi et M. Fortin : *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer-Verlag, 1991.

[33] A. Buffa, M. Costabel et C. Schwab : Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains. *Numer. Math.*, 92(4):679–710, 2002.

[34] F. Cakoni, D. Colton et H. Haddar : The linear sampling method for anisotropic media. *J. Comput. Appl. Math.*, 146(2):285–299, 2002.

[35] F. Cakoni, D. Colton et H. Haddar : The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media from far field data. *Jour. Integral Equations and Appl.*, 21(2):203–227, 2009.

[36] F. Cakoni, A. Cossonnière et H. Haddar : Transmission eigenvalues for inhomogeneous media containing obstacles. *Soumis.*

[37] F. Cakoni, D. Gintides et H. Haddar : The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1):237–255, 2010.

[38] F. Cakoni et H. Haddar : Transmission eigenvalues in inverse scattering theory. *Soumis.*

[39] F. Cakoni et H. Haddar : A variational approach for the solution of the electromagnetic interior transmission problem for anisotropic media. *Inverse Problems and Imaging*, 1(3):443–456, 2007.

[40] F. Cakoni et A. Kirsch : On the interior transmission eigenvalue problem. *Int. Jour. Comp. Sci. Math.*, 3(1-2):142–167, 2010.

[41] S. Caorsi, P. Fernandez et M. Raffetto : On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):580–607, 2000.

[42] G. Cardone, S.A. Nazarov et J. Taskinen : "Absorption" effect for elastic waves by the beak-shaped boundary irregularity. *Doklady Physics*, 54(3):146–150, 2009.

[43] G. Cardone, S.A. Nazarov et J. Taskinen : A criterion for the existence of the essential spectrum for beak-shaped elastic bodies. *J. Math. Pures Appl.*, 92(6):628–650, 2009.

[44] B.D.F. Casse, H.O. Moser, M. Bahou, J.W. Lee, S. Inglis et L.K. Jian : Artifical engineering and characterization of micro- and nanoscale electromagnetic metamaterials for the THz spectral range. *Advances in Synchrotron Radiation*, 1(1):1–12, 2008.

[45] M. Cessenat : *Mathematical methods in electromagnetism : linear theory and applications.* Series on advances in mathematics for applied sciences. World Scientific, 1996.

[46] S.N. Chandler-Wilde, I.G. Graham, S. Langdon et E.A. Spence : Numerical-asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering. *Acta Numerica*, 21(1):89–305, 2012.

[47] R. Charbonneau, N. Lahoud, G. Mattiussi et P. Berini : Demonstration of integrated optics elements based on long-ranging surface plasmon polaritons. *Opt. Express*, 13(3):977–984, 2005.

[48] L. Chesnel : Interior transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations : the T-coercivity as an alternative approach. *Inv. Probl.*, 28(6):065005, 2012.

[49] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : Compact imbeddings in electromagnetism with interfaces between classical materials and metamaterials. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(5):2150–2169, 2011.

[50] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. : T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numer. Math., Accepté*, 28 pages, 2012.

[51] L. Chesnel, X. Claeys et S.A. Nazarov : Asymptotics expansion for a non-smooth interface between a dielectric and a negative material. *En cours*, 2012.

[52] E. T. Chung et P. Ciarlet Jr. : Scalar transmission problems between dielectrics and metamaterials : T-coercivity for the Discontinuous Galerkin approach. *Rapport technique, CUHK-2011-01, Chinese University of Hong Kong, Hong Kong*, 2011.

[53] P. Ciarlet Jr. : T-coercivity : Application to the discretization of Helmholtz-like problems. *Comput. and Math. with Appl.*, À paraître.

[54] P. Ciarlet Jr., N. Filonov et S. Labrunie : Un résultat de fermeture pour les équations de maxwell en géométrie axisymétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 331(4):293–298, 2000.

[55] X. Claeys : *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces.* Thèse de doctorat, Université Versailles - Saint-Quentin, 2008.

[56] J. Coatléven : *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique.* Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2011.

[57] F. Collino et P. Monk : Perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6):2061–2090, 1998.

[58] D. Colton et P. Monk : The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Quarterly Jnl. of Mechanics & App. Maths.*, 41(1):97–125, 1988.

[59] D. Colton et L. Païvärinta : Transmission eigenvalues and a problem of Hans Lewy. *J. Comput. Appl. Math.*, 117(2):91–104, 2000.

[60] D. Colton, L. Païvärinta et J. Sylvester : The interior transmission problem. *Inverse Problems and Imaging*, 1(1):13, 2007.

[61] A. Cossonnière : *Valeurs propres de transmission et leur utilisation dans l'identification d'inclusions à partir de mesures électromagnétiques.* Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, 2011.

[62] M. Costabel : A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12(4):365–368, 1990.

[63] M. Costabel et M. Dauge : Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 151(3):221–276, 2000.

[64] M. Costabel et M. Dauge : Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. *Numer. Math.*, 93(2):239–277, 2002.

[65] M. Costabel, M. Dauge et S. Nicaise : Singularities of Maxwell interface problems. *Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3):627–649, 1999.

[66] M. Costabel et E. Stephan : A direct boundary integral method for transmission problems. *J. Math. Anal. and Appl.*, 106(2):367–413, 1985.

[67] S.A. Cummer : Dynamics of causal beam refraction in negative refractive index materials. *Appl. Phys. Lett.*, 82(13):2008–2010, 2003.

[68] M. Dauge : *Elliptic boundary value problems on corner domains.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[69] M. Dauge : Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 15(2):227–261, 1992.

[70] M. Dauge, S. Nicaise, M. Bourlard et M.-S. Lubuma : Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. I : résultats géneraux pour le problème de Dirichlet. *RAIRO Analyse Numérique*, 24(1):27–52, 1990.

[71] M. Dauge, S. Nicaise, M. Bourlard et M.-S. Lubuma : Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. II : quelques opérateurs particuliers. *RAIRO Analyse Numérique*, 24(3):343–367, 1990.

[72] M. Dauge et B. Texier : Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones. Rapport technique 97-27, Université de Rennes 1, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France, 1997. *http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/56/23/29/PDF/BenjaminT_arxiv.pdf.*

[73] M. Dauge, S. Tordeux et G. Vial : Selfsimilar perturbation near a corner : matching versus multiscale expansions for a model problem. *Around the Research of Vladimir Maz'ya II*, pages 95–134, 2010.

[74] A. Degiron et D. Smith : Numerical simulations of long-range plasmons. *Opt. Express*, 14(4):1611–1625, 2006.

[75] Y.V. Egorov et B.W. Schulze : *Pseudo-differential operators, singularities, applications.* Birkhäuser, 1997.

[76] N. Engheta : An idea for thin subwavelength cavity resonators using metamaterials with negative permittivity and permeability. *Antennas and Wireless Propagat. Lett., IEEE*, 1(1): 10–13, 2002.

[77] A. Ern et J.-L. Guermond : *Theory and practice of finite elements.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[78] L.D. Evans : *Partial Differential Equations*, volume 19 de *Graduate studies in mathematics.* AMS, Providence, 1998.

[79] D. Felbacq, B. Guizal, G. Bouchitté et C. Bourel : Resonant homogenization of a dielectric metamaterial. *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 51(11):2695–2701, 2009.

[80] P. Fernandes et M. Raffetto : Well posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 19(12):2299–2335, 2009.

[81] S. Fliss : *Étude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés.* Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2009.

[82] E. Garcia : *Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans des domaines non convexes.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.

[83] D. Gilbarg et N.S. Trundinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[84] V. Girault et P.-A. Raviart : *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 de *Springer Series in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[85] I. Gohberg, S. Goldberg et M.A. Kaashoek : *Classes of linear operators, Vol. I*, volume 49 de *Operator Theory : Advances and Applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1990.

[86] D.K. Gramotnev et S.I. Bozhevolnyi : Plasmonics beyond the diffraction limit. *Nature Photonics*, 4(2):83–91, 2010.

[87] P. Grisvard : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman, London, 1985.

[88] P. Grisvard : *Singularities in Boundary Value Problems.* RMA 22. Masson, Paris, 1992.

[89] B.B. Guzina, F. Cakoni et C. Bellis : On the multi-frequency obstacle reconstruction via the linear sampling method. *Inv. Probl.*, 26(12):125005–125033, 2010.

[90] H. Haddar : The interior transmission problem for anisotropic Maxwell's equations and its applications to the inverse problem. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 27(18):2111–2129, 2004.

[91] C. Hazard : Numerical simulation of corner singularities : a paradox in Maxwell-like problems. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIb*, 330(1):57–68, 2002.

[92] C. Hazard et S. Lohrengel : A singular field method for Maxwell's equations : Numerical aspects for 2D magnetostatics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(3):1021–1040, 2003.

[93] A. Henrot : *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators.* Birkhäuser, 2006.

[94] M. Hitrik, K. Krupchyk, P. Ola et L. Päivärinta : The interior transmission problem and bounds on transmission eigenvalues. *Math. Res. Lett.*, 18(2):279–293, 2011.

[95] L. Hörmander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators : Pseudo-differential operators.* Springer verlag, 1985.

[96] S. Kaddouri : *Résolution du problème du potentiel électrostatique dans des domaines prismatiques et axisymétriques singuliers. Étude asymptotique dans des domaines quasi-réguliers.* Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2007.

[97] V. Kalvin : Perfectly matched layers for diffraction gratings in inhomogeneous media. Stability and error estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(1-2):309–330, 2011.

[98] T. Kato : *Perturbation Theory For Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[99] A. Kirsch : An integral equation approach and the interior transmission problem for Maxwell's equations. *Inverse Problems and Imaging*, 1(1):159–179, 2007.

[100] V. A. Kondrat'ev : Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 16:227–313, 1967.

[101] V. A. Kozlov et V. G. Maz'ya : *Differential equations with operator coefficients : with applications to boundary value problems for partial differential equations.* Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 1999.

[102] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya et J. Rossmann : *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, volume 52 de *Mathematical Surveys and Monographs.* AMS, Providence, 1997.

[103] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya et J. Rossmann : *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, volume 85 de *Mathematical Surveys and Monographs.* AMS, Providence, 2001.

[104] R. Kress : *Linear integral equations, Second Edition*, volume 82 de *Applied Mathematical Sciences.* Springer Verlag, 1999.

[105] V.V. Krylov : New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic "black holes". *Acta Acustica united with Acustica*, 90(5):830–837, 2004.

[106] E. Lakshtanov et B. Vainberg : Ellipticity in the interior transmission problem in anisotropic media. *preprint arXiv :1108.5987v1.*

[107] K. Lemrabet : Régularité de la solution d'un problème de transmission. *J. Math. Pures Appl.*, 56:1–38, 1977.

[108] J. Li et A. Wood : Finite element analysis for wave propagation in double negative metamaterials. *Journal of Scientific Computing*, 32(2):263–286, 2007.

[109] J.-L. Lions et E. Magenes : *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, 1968.

[110] S. Lohrengel : *Étude mathématique et résolution numérique des équations de Maxwell dans un domaine non régulier.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1998.

[111] S. Lohrengel et S. Nicaise : Les équations de Maxwell dans des matériaux composites : problèmes de densité. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 330(11):991–996, 2000.

[112] S. Lohrengel et S. Nicaise : Singularities and density problems for composite materials in electromagnetism. *Comm. Part. Diff. Eq.*, 27(7-8):1575–1623, 2002.

[113] D. Maystre et S. Enoch : Perfect lenses made with left-handed materials : Alice's mirror ? *JOSA A*, 21(1):122–131, 2004.

[114] V. Mazya, S. Nazarov et B. Plamenevskij : *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, Vol. 1, 2.* Birkhäuser, Basel, 2000.

[115] V.G. Maz'ya et J. Rossmann : *Elliptic equations in polyhedral domains*, volume 162 de *Mathematical Surveys and Monographs.* AMS, Providence, 2010.

[116] W. McLean : *Strongly elliptic systems and boundary integral equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[117] P. Monk : *Finite element methods for Maxwell's equations.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.

[118] L.S.D. Morley : The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems. *Aero. Quart*, 19:149–169, 1968.

[119] S. A. Nazarov et B. A. Plamenevsky : *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, volume 13 de *Expositions in Mathematics.* De Gruyter, Berlin, Allemagne, 1994.

[120] S.A. Nazarov et G. Sweers : A boundary-value problem for the biharmonic equation and the iterated laplacian in a 3d-domain with an edge. *J. Math. Sci.*, 143(2):2936–2960, 2007.

[121] S.A. Nazarov et G. Sweers : A hinged plate equation and iterated Dirichlet laplace operator on domains with concave corners. *J. Diff. Eq.*, 233(1):151–180, 2007.

[122] S.A. Nazarov, G. Sweers et A. Stylianou : Paradoxes in problems on bending of polygonal plates with a hinged/supported edge. *Doklady Physics*, 56(8):439–443, 2011.

[123] S.A. Nazarov et J. Taskinen : On the spectrum of the steklov problem in a domain with a peak. *Vestnik St. Petersburg University : Mathematics*, 41(1):45–52, 2008.

[124] S.A. Nazarov et J. Taskinen : On essential and continuous spectra of the linearized water-wave problem in a finite pond. *Mathematica Scandinavica*, 106(1):141–160, 2010.

[125] S.A. Nazarov et J. Taskinen : Radiation conditions at the top of a rotational cusp in the theory of water-waves. *Math. Model. Numer. Anal.*, 45(5):947–979, 2011.

[126] S. Nicaise : *Polygonal interface problems.* P. Lang, 1993.

[127] S. Nicaise et A.M. Sändig : General interface problems-I. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 17(6):395–429, 1994.

[128] S. Nicaise et A.M. Sändig : General interface problems-II. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 17(6): 431–450, 1994.

[129] S. Nicaise et J. Venel : A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 235(14):4272–4282, 2011.

[130] D. O'Connor, M. McCurry, B. Lafferty et A.V. Zayats : Plasmonic waveguide as an efficient transducer for high-density date storage. *Appl. Phys. Lett.*, 95(17), 2009.

[131] G. Oliveri et M. Raffetto : A warning about metamaterials for users of frequency-domain numerical simulators. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 56(3):792–798, 2008.

[132] M.A. Ordal, L.L. Long, R.J. Bell, S.E. Bell, R.R. Bell, R.W. Alexander Jr. et C.A. Ward : Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared. *Appl. Opt.*, 22(7):1099–1119, 1983.

[133] J. Peetre : Another approach to elliptic boundary problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 14(4):711–731, 1961.

[134] J.B. Pendry : Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18):3966–3969, 2000.

[135] J.M. Pitarke, V.M. Silkin, E.V. Chulkov et P.M. Echenique : Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons. *Rep. Prog. Phys.*, 70(1):1, 2007.

[136] B. Prade, J. Y. Vinet et M. Mysyrowicz : Guided optical waves in planar heterostructures with negative dielectric constant. *Phys. Rev. B*, 44(24):13556–13572, 1991.

[137] M. Raffetto : Ill-posed waveguide discontinuity problem involving metamaterials with impedance boundary conditions on the two ports. *Science, Measurement & Technology, IET*, 1(5):232–239, 2007.

[138] K. Ramdani : *Lignes supraconductrices : analyse mathématique et numérique.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.

[139] B.P. Rynne et B.D. Sleeman : The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(6):1755–1762, 1991.

[140] S.A. Sauter et C. Schwab : *Boundary element methods.* Springer Verlag, 2011.

[141] R. Scott et S. Zhang : Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.

[142] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser et S. Schultz : Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84(18): 4184–4187, 2000.

[143] A. F. Starr, P. M. Rye, D. R. Smith et S. C. Nemat-Nasser : Fabrication and characterization of a negative-refractive-index composite metamaterial. *Phys. Rev. B*, 70(11):113102, 2004.

[144] S. Steinberg : Meromorphic families of compact operators. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 31(5):372–379, 1968.

[145] A.A. Sukhorukov, I.V. Shadrivov et Y.S. Kivshar : Wave scattering by metamaterial wedges and interfaces. *Int. J. Numer. Model.*, 19(2):105–117, 2006.

[146] J. Sylvester : Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(1):341–354, 2012.

[147] L. Tartar : Sur un lemme d'équivalence utilisé en analyse numérique. *Calcolo*, 24(2):129–140, 1987.

[148] V.G. Veselago : The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ. *Sov. Phys. Usp.*, 10(4):509–514, 1968.

[149] H. Wallén, H. Kettunen et A. Sihvola : Surface modes of negative-parameter interfaces and the importance of rounding sharp corners. *Metamaterials*, 2(2-3):113–121, 2008.

[150] C. Weber : A local compactness theorem for Maxwell's equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2(1):12–25, 1980.

[151] J. Wloka : *Partial Differential Equations.* Cambridge Univ. Press, 1987.

[152] A.V. Zayats, I.I. Smolyaninov et A.A. Maradudin : Nano-optics of surface plasmon polaritons. *Physics reports*, 408(3-4):131–314, 2005.

[153] R.W. Ziolkowski et E. Heyman : Wave propagation in media having negative permittivity and permeability. *Phys. Rev. E*, 64(5):056625, 2001.

[154] C. Zuily : *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Dunod, 2002.

[155] C.M. Zwölf : *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmission d'onde électromagnétique entre diélectrique et méta-matériau.* Thèse de doctorat, Université Versailles - Saint-Quentin, 2008.

Index

absorption limite, **130**
addition d'une variable (technique d'), **76**, **203**
approximation conforme, **48**
arête
    axisymétrique, **33**
    prismatique, **32**, **224**

Banach–Nečas–Babuška (théorie de), **47**
base antéduale, **187**

cavité rectangulaire
    2D, **52**
    3D, **225**
chaîne de Jordan, **81**, **141**, **154**
coefficient de singularité, **128**, **143**
condition inf-sup, **47**

Dirichlet-to-Neumann, **143**
dissipation, **60**, **105**
domaine non simplement connexe, **232**

échiquier, **31**
énergie, **110**
épimorphisme, **127**

Fichera, **36**, **225**
formulation du quatrième ordre, **259**
Fortin (lemme de), **49**
Fredholm (opérateur de type), **20**
Fredholm analytique (théorème de), **236**
Freefem++, **268**
fréquence plasma, **106**
frontière non connexe, **231**

guide d'ondes, **125**

Hadamard, **28**
Holmgren, **52**

indice d'un opérateur, **20**
indice négatif (matériau à), **109**
invisibilité, **3**

Kondrat'ev, **68**

Matlab, **268**
modèle
    de Drude, **106**
    de Lorentz, **107**
    pour la structure *SRR*, **108**
monomorphisme, **142**
Morley (élément fini de), **268**

Neumann, **38**
norme à paramètre, **70**, **88**, **136**

opérateur de Laplace-Beltrami, **281**

paramétrix, **97**, **99**
Paraview, **268**
Parseval (formule de), **70**, **88**
Peetre (lemme de), **25**, **135**
plasmon de surface, **1**
PMLs, **144**
pointe conique, **34**
polarisation
    électrique, **109**
    magnétique, **109**
problème
    TE, **175**
    TM, **175**

réfraction négative, **3**
régularité, **54**
résidus (théorème des), **82**, **205**

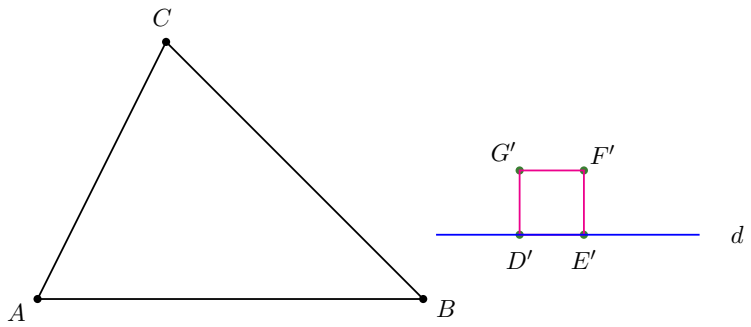
Sapongyan (paradoxe de), **271**
Silver-Müller, **109**
singularité propagative, **120**

T-coercive (forme), **47**
termes de consistance, **49**
toroïdales (coordonnées), **42**
transformée
    de Laplace, **70**
    de Mellin, **88**
trou noir, **120**, **136**

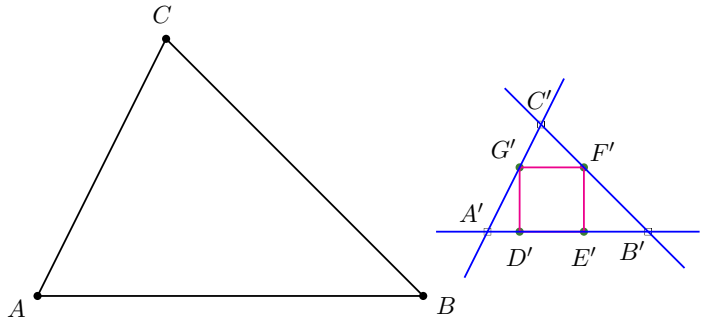
valeur propre clignotante, **151**
vitesse de phase, **136**

`Nous proposons ci-dessous une solution à l'exercice d'échauffement présenté au début de ce document.`

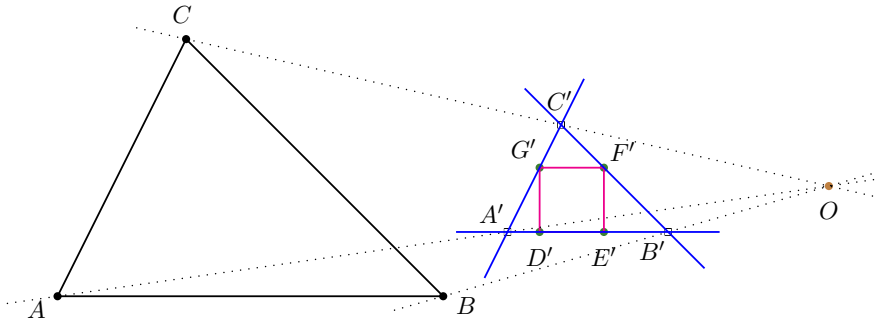
`Étape 1.` On construit une parallèle d à la droite (AB) et un carré $D'E'F'G'$ dont l'un des côtés est inscrit dans d.



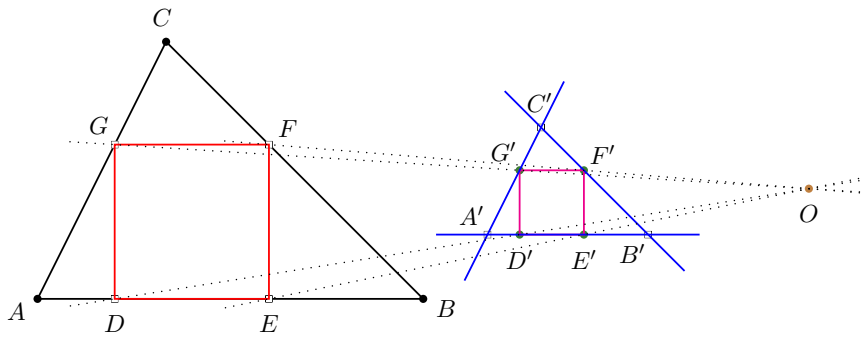
`Étape 2.` On trace les parallèles à (AC) et (BC) passant respectivement par G' et F'. Les sommets du triangle ainsi construits sont notés A', B' et C'.



`Étape 3.` On trace le sommet de l'homothétie $\mathscr{H}$ qui transforme le triangle ABC en triangle $A'B'C'$.



`Étape 4.` Il ne reste plus qu'à tracer le carré $DEFG$, image de $D'E'F'G'$ par l'homothétie $\mathscr{H}$.



Titre : Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions quelques opérateurs présentant un changement de signe dans leur partie principale. Ces opérateurs apparaissent notamment en électromagnétisme lorsqu'on s'intéresse à la propagation des ondes dans des structures constituées de matériaux usuels et de matériaux négatifs en régime harmonique. Ici, nous appelons matériau négatif un matériau modélisé par une permittivité diélectrique et/ou une perméabilité magnétique négative(s). En raison du changement de signe des coefficients physiques, on ne peut utiliser les outils classiques pour étudier ce problème. Dans la première partie de ce mémoire, nous nous concentrons sur le problème de transmission scalaire auquel on peut réduire les équations de Maxwell lorsque la géométrie et les données présentent une invariance dans une direction. Avec la technique de la T-coercivité, basée sur des arguments géométriques, nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour prouver le caractère bien posé de ce problème en domaine borné dans H^1. Nous montrons également comment on peut utiliser cette approche pour justifier la convergence des méthodes usuelles d'approximation par éléments finis. Dans un deuxième temps, au moyen de techniques différentes, issues de l'étude des équations elliptiques dans des domaines à géométrie singulière, nous définissons un nouveau cadre fonctionnel pour recouvrer le caractère Fredholm lorsque celui-ci est perdu dans H^1. Il apparaît alors un phénomène surprenant de trou noir. Tout se passe comme si des ondes étaient aspirées en un point. Nous réalisons ensuite une étude asymptotique par rapport à une petite perturbation de l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif dans ce cadre fonctionnel. Au cours de notre analyse, nous mettons en évidence un curieux phénomène de valeur propre clignotante. La troisième partie de ce document est consacrée à l'étude des équations de Maxwell. Nous travaillons d'abord sur les équations de Maxwell 2D en exploitant les résultats obtenus pour le problème scalaire. Puis, nous nous intéressons aux équations de Maxwell 3D. Nous montrons qu'elles sont bien posées dès lors que les problèmes scalaires associés sont bien posés. Enfin, dans une quatrième partie, nous étudions le problème de transmission intérieur apparaissant en théorie de la diffraction. L'opérateur pour ce problème présente également un changement de signe dans sa partie principale. Nous abordons son étude en utilisant l'analogie existant avec le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif. Certaines configurations pour ce problème de transmission intérieur conduisent à considérer un problème de transmission du quatrième ordre avec changement de signe. Nous prouvons que cet opérateur présente des propriétés étonnamment différentes de celles de l'opérateur scalaire du second ordre.

Mots-clés : Problèmes de transmission, milieux négatifs, équations de Maxwell, métamatériaux, T-coercivité, problèmes d'interface.

Title: Investigation of some transmission problems with sign-changing coefficients. Application to metamaterials.

Abstract: In this thesis, we study various operators that present a sign-changing in their principal part. These operators appear in particular in electromagnetism when studying wave propagation in structures made of usual materials and negative materials. Here, we say that a material is negative when it is modeled by a dielectric permittivity and/or a magnetic permeability that take(s) negative values. Due to the change of sign of the physical parameters, we can not use the classical tools to study such problems. In the first part of the thesis, we focus on the scalar transmission problem which is obtained from Maxwell's equations when the geometry and the data are invariant in one direction. Using the T-coercivity technique, based on geometric arguments, we establish necessary and sufficient conditions to prove well-posedness for this problem in a bounded domain in H^1. We also show how this approach can be used to justify the convergence of the usual finite element method to approximate the solution. In a second step, using different techniques coming from the study of elliptic equations in domains with singular geometry, we define a new functional framework to recover Fredholmness when it is lost in H^1. This leads to a surprising black hole phenomenon. Everything happens like if some waves were sucked into a point. We then perform an asymptotic analysis with respect to a small perturbation of the interface between the positive material and the negative material in this functional framework. In our analysis, we observe a curious phenomenon of blinking eigenvalues. The third part of this thesis is devoted to the study of Maxwell's equations. We first work on Maxwell's equations in 2D using the results obtained for the scalar problem. Then, we proceed with the 3D Maxwell's equations. We show that they are well-posed as long as the associated scalar problems are well-posed. Finally, in the fourth section, we investigate the interior transmission problem that arises in scattering theory. The operator for this problem also presents a sign-changing in its principal part, and therefore can be studied relying on the analogy with the transmission problem between a positive material and a negative material. For this interior transmission problem, some configurations lead to consider a fourth-order transmission problem with sign-changing coefficients. Our analysis shows that this latter operator has strikingly different properties from those of the second order scalar operator.

Keywords: Transmission problems, negative materials, Maxwell's equations, metamaterials, T-coercivity, interface problems.