



**HAL**  
open science

# Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos

Cyril Touzé

► **To cite this version:**

Cyril Touzé. Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos. Vibrations [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie, 2009. tel-01138166

**HAL Id: tel-01138166**

**<https://ensta-paris.hal.science/tel-01138166v1>**

Submitted on 1 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Vibrations non linéaires géométriques de structures minces

---

## Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos.

Synthèse des activités scientifiques en vue de l'obtention du  
diplôme d'habilitation à diriger les recherches

présenté par  
**Cyril Touzé**

le 30 Novembre 2009

devant le jury composé de :

M. Christophe Pierre	<i>Rapporteur</i>
M. Michel Potier-Ferry	<i>Rapporteur</i>
M. Jean Kergomard	<i>Rapporteur</i>
M. Claude-Henri Lamarque	<i>Examineur</i>
M. Jean-Baptiste Leblond	<i>Examineur</i>
M. Jean-Jacques Marigo	<i>Examineur</i>



*"Le savoir est une attitude, une passion. C'est même, au fond, une attitude illicite : comme le goût de l'alcool, de l'érotisme ou de la violence, le besoin de savoir entraîne la formation d'un caractère qui n'est plus en équilibre. Il est tout à fait faux de dire que le chercheur poursuive la vérité, c'est elle qui le poursuit. Il la subit."*

*"C'était un douteur. L'incertitude de sa science lui avait révélé l'incertitude de tout savoir. Il aurait aimé devenir une personnalité et devinait, à ses meilleures heures, que le paralysant désordre de toutes les choses qui relèvent, peuvent relever un jour, ou ne relèveront jamais d'une vérité, ne permettait plus que la vaine stérilité de la subjectivité pure".*

*Robert Musil, L'Homme sans qualités, 1932.  
Traduction française P. Jacottet, 1956.*

*"Toute parole tend à fixer quelque chose qui semble désirer d'être fixé, et périr de l'être. On ne peut donc ni se taire, ni parler, sans se corriger perpétuellement."*

*Philippe Jacottet, L'obscurité, 1961.*



## Table des matières

Introduction	1
Remerciements	2
Résumé	5
Abstract	5
Chapitre 1. Plaques et coques minces	7
1. Non-linéarités géométriques	7
2. Plaques minces parfaites et imparfaites	7
3. Coques minces peu profondes	10
4. Modèles avec inertie de membrane	12
Chapitre 2. Modes normaux non linéaires	15
1. Introduction : réduction de modèles	15
2. Modes non linéaires : définitions	16
3. Calcul asymptotique et formes normales	17
4. Tendances de non-linéarité	20
5. Réduction de modèles de coque	23
6. Comparaison avec la méthode POD	28
Chapitre 3. Transition vers le chaos	33
1. Observations expérimentales	33
2. Couplages modaux et résonances internes	34
3. Turbulence d'ondes	36
Conclusions et perspectives	41
Publications	45
Bibliographie	47



## Introduction

L'essentiel des travaux de recherche présentés ici trouvent leur origine dans le domaine de l'acoustique musicale et plus spécifiquement du sons émis et des vibrations des instruments de type cymbale et gong. Ces instruments, de la famille des percussions et que l'on classe parfois parmi les idiophones<sup>1</sup>, sont de prime abord très simples, comparés à d'autres instruments de musique dont la facture présente une complexité apparente plus grande (systèmes de clefs des instruments à vent type flûtes, clarinettes et saxophones, table d'harmonie et système de mise sous tension du jeu de cordes du piano, ...). Cependant cette simplicité cache une complexité uniquement due à la dynamique des vibrations mises en jeu, et pour lesquelles le terme de non-linéarité géométrique joue un rôle crucial : le négliger reviendrait à ôter à ces instruments toute la brillance de leur timbre ainsi que les effets typiques qu'on leur connaît : glissements de fréquences, explosion fréquentielle due à un enrichissement spectral quelques millisecondes après la frappe, etc. L'oreille étant très sensible aux qualités et à l'évolution temporelle du spectre (donnant la couleur et le timbre typique de chaque instrument), tous les instruments de musique ont une non-linéarité dans leur mode de fonctionnement permettant de faire varier le timbre en fonction des paramètres de jeu. Cette non-linéarité est bien souvent contenue dans le mécanisme d'excitation. Pour les cymbales et les gongs, c'est une non-linéarité distribuée, due aux grandes amplitudes de vibration, et donc intrinsèque à la dynamique vibratoire, qui est en jeu.

Ainsi du point de vue de la mécanique, modéliser et simuler des sons de cymbales et de gongs nécessite au préalable une étude des modèles de plaques et de coques minces, en régime non linéaire géométrique, *i.e.* pour des lois de comportement matérielles élastiques linéaires et des grands déplacements (typiquement pour les structures minces, on observe des phénomènes non linéaires lorsque l'amplitude de vibration est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $h$ ). C'est ainsi que, partant des cymbales et des gongs, je me suis intéressé aux modèles de plaques en non linéaire géométrique. Les hypothèses de von Kármán pour les modèles de plaques minces, où l'inertie longitudinale est négligée et les termes membranaires se retrouvent via une fonction d'Airy, ont été utilisées, puis étendues aux cas des coques minces, peu profondes, à géométrie de calotte sphérique afin de se rapprocher du cas des cymbales (pour les coques on parle alors de modèle de Donnell peu profond, ou modèle de Donnell-Mushtari-Vlasov, même si les hypothèses sont celles du modèle de von Kármán pour les plaques). Ce travail a été mené en collaboration avec Olivier Thomas, depuis nos thèses respectives [T1][156]. Ces modèles sont par ailleurs très utilisés en ingénierie et interaction fluide/structure, pour des problèmes de stabilité, de vibrations sous écoulement, de flambage, ce qui m'a amené à étendre le champ des investigations, et plus particulièrement de m'intéresser à la réduction de modèles, et de travailler sur des panneaux à double courbure et des coques circulaires cylindriques, avec les hypothèses de Donnell (coque peu profonde et inertie membranaire négligée), ou avec des modèles plus complexes ne négligeant pas l'inertie longitudinale (modèles de Donnell profond, modèles de Flügge-Lur'e-Byrne), en collaboration avec Marco Amabili. Enfin récemment, une collaboration avec Dominique Chapelle et le groupe MACS de l'INRIA m'a permis de m'intéresser aux cas des coques discrétisées par éléments finis, avec cinématique de Reissner-Mindlin [41], donnant ainsi une vue encore plus générale sur les modèles existants et leurs différents niveaux de traitements numériques.

---

<sup>1</sup>idiophone : instrument dont le matériau lui-même produit le son lors d'un impact, soit par un instrument extérieur (comme une baguette), soit par une autre partie de l'instrument lui-même. Les idiophones (appelés aussi autophones) se distinguent des instruments à cordes (cordophones), à membrane (membranophones) et à vent (aérophones).



Du point de vue phénoménologique, les cymbales et les gongs présentent une richesse de comportement qu'il a fallu analyser et comprendre. La clef a été donnée par une expérience où l'on excite harmoniquement une telle structure avec une force d'amplitude croissante. On voit alors apparaître deux bifurcations très nettes, marquant trois régimes distincts, dont le dernier est chaotique et se caractérise au niveau perceptif par un son très proche de celui obtenu en mode de jeu normal, lorsque la cymbale ou le gong est frappé vigoureusement par une mailloche ou une baguette. Le régime chaotique présente un spectre de vibration large bande, et son étude m'a amené à m'intéresser à la turbulence d'ondes (ou turbulence faible). Contrairement à la turbulence pleinement développée où il n'y a pas de relation de fermeture sur la hiérarchie des équations des moments et cumulants, la théorie de la turbulence d'ondes donne des développements analytiques possédant une fermeture et prédit des spectres théoriques.

L'étude de la première bifurcation a quant à elle été menée à son terme, mettant en évidence, tant expérimentalement que théoriquement, la prépondérance des résonances internes pour expliquer les transferts d'énergie intermodaux que l'on observe. Un élément clef pour la compréhension et la simulation de ces régimes périodiques et quasi-périodiques a été le développement de modèles d'ordre réduit fiables qualitativement et quantitativement. Ceci a été mené en développant le concept de *mode non linéaire* en théorie des vibrations, toujours en non linéaire géométrique. Une grande partie de ce document est consacrée aux modes non linéaires, sur lesquels j'ai développé une méthode de calcul fondée sur la théorie des formes normales, dont l'exploitation a permis de montrer de nombreux résultats, en vibration libre (prédiction de la tendance de non-linéarité) et en vibrations forcées (développement de modèles d'ordre réduit fiables et performants pour des amplitudes modérées).

Ainsi l'acoustique musicale et le son des cymbales a mené mes recherches vers de nombreuses contrées dans lesquelles je ne pensais pas initialement me promener. La présentation retenue pour ce document fait la part belle à la mécanique vibratoire afin de mettre en exergue la généralité des problèmes étudiées, si bien que le son des cymbales et des gongs n'en est plus qu'un lointain écho que le lecteur avisé saura retrouver entre les lignes. La simulation et la synthèse sonore de sons de cymbales et de gongs étant néanmoins toujours d'actualité pour des projets dans un futur proche, cela sera mentionné dans les perspectives.

Le premier chapitre du document donnera les hypothèses et équations principales des modèles étudiés : modèles de von Kármán et Donnell peu profond pour les plaques minces parfaites et imparfaites et les coques sphériques, modèles avec inertie de membrane pour les panneaux à double courbure et les coques circulaires cylindriques. Le second chapitre sera entièrement consacré aux modes normaux non linéaires. La méthode sera présentée et replacée dans la littérature, puis les résultats importants obtenus seront montrés. Le troisième chapitre sera consacré à la transition vers le chaos. Les relations de résonance interne et deux couplages forts typiques seront étudiés, théoriquement et expérimentalement. Enfin le régime chaotique sera étudié pour une plaque de très grandes dimensions pour laquelle le régime de turbulence d'ondes est bien établi.

## Remerciements

Les résultats présentés dans ce mémoire sont bien évidemment le fruit de nombreuses collaborations, rencontres, travaux en commun avec différentes personnes, qui toutes, d'une manière ou d'une autre –ne serait-ce parfois que par une brève remarque– ont contribué à ma formation scientifique et à l'accomplissement des travaux présentés dans ce mémoire. Je tiens donc à remercier tout particulièrement Antoine Chaigne, qui, un jour de janvier 1997, me proposa un sujet de thèse sur les instruments de type cymbale et gong, en me précisant que l'étude serait grandement exploratoire. Sans cette première rencontre scientifique et ce sujet, il va sans dire que j'aurais très vraisemblablement fait radicalement autre chose que de la mécanique non linéaire. La deuxième coïncidence extraordinaire fut le choix d'Olivier Thomas de commencer sa thèse, un an après le début de la mienne, sur la partie mécanique des vibrations de cymbales. Pendant quasiment 5 ans (période recouvrant nos thèses, puis le post-doc effectué par Olivier à l'UME de l'ENSTA après sa thèse), nous avons travaillé ensemble, lui mettant au clair les modèles

de von Kármán pour les plaques et les coques peu profondes, et faisant de nombreuses études expérimentales d'une précision d'orfèvre ; moi développant les techniques de traitement de signal, les analyses en systèmes dynamiques (échelles multiples, bifurcations) et les réductions de modèles pour traiter les équations et les comparer aux mesures. Pour notre plus grande satisfaction, nous continuons toujours à pouvoir travailler ensemble sur des sujets communs : c'est une chance inestimable. Je tiens à remercier aussi tout particulièrement les personnes avec qui j'ai eu la chance de travailler plus récemment, et qui m'ont toutes appris beaucoup de choses. Par ordre chronologique : Paul Manneville, Denis Matignon, Marco Amabili, Olivier Cadot, Arezki Boudaoud, Jean-François Mercier, Dominique Chapelle, Marina Vidrascu, Jacques Sainte-Marie et Stefan Bilbao. Je souhaite aussi mentionner les personnes avec qui j'ai eu de nombreuses discussions et qui, ne serait-ce que par une remarque pertinente, ont fait avancer ma réflexion un moment donné : Christophe Pierre, Claude Lamarque, Gérard Iooss, Pierre Couillet, Bruno Cochelin, Sergio Bellizzi, Gaetan Kerschen, Michel Ferré, Olivier Doaré, Ziad Moumni, Liviu Nicu, Joël Frelat, Patrick Joly et Francis Collino. Enfin pour conclure (en espérant n'avoir oublié personne), un grand merci à tous les étudiants qui ont travaillé avec moi : Cédric Camier, Gaël Favraud, Benoit Odille, Alexis Huberdeau, Jean-Baptiste Milien, Fabrice Orphelin, Pierre Lanchantin, Loris Longo Mucciante, Mathieu Fontaine, Kevin Arcas, Eric Luminais, Nicolas Quaegebeur, Kim Pham, Daniele Manca, Lionel Feugères, Bastien Mallaroni.



## Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent les vibrations non linéaires géométriques (grande amplitude) des milieux minces, et plus particulièrement les plaques et les coques. Le premier chapitre présente les modèles utilisés dans le document, en rappelant les hypothèses qui président à leur établissement. Les modèles de von Kármán pour les plaques minces, de Donnell-Mushtari-Vlasov pour les coques peu profondes, ainsi que de Donnell pour coques profondes (avec inertie de membrane), et de Flügge-Lur'e-Byrne sont présentés pour des plaques circulaires parfaites et imparfaites, des coques sphériques peu profondes, des coques circulaires cylindriques et des panneaux à double courbure. Le chapitre 2 est entièrement consacré à la théorie des *modes non linéaire* et à son application pour établir des modèles d'ordre réduit pour les vibrations de coques en non linéaire géométrique. La définition d'un *mode non linéaire* (MNL) comme variété invariante de l'espace des phases est rappelée, puis une méthode, fondée sur la théorie des formes normales, et permettant de calculer aisément les MNLs, est présentée. Son application au cas des vibrations libres montre qu'elle permet à moindre coût une prédiction juste de la tendance de non-linéarité (comportement raidissant/assouplissant). L'utilisation des MNLs comme base réduite montre son excellent comportement pour diminuer drastiquement le nombre de degrés de liberté (ddl) pour le cas des vibrations forcées, harmoniques et basse fréquence. Le chapitre 3 traite de la transition vers le chaos observée lorsqu'on augmente l'amplitude d'un forçage harmonique pour les structures minces. Le cas générique observé à partir de nombreuses expériences est d'abord rappelé, montrant deux bifurcations nettes menant d'un régime périodique à une régime quasi-périodique, puis chaotique. La première bifurcation est analysée théoriquement et expérimentalement pour les cas particuliers de deux résonances internes. Enfin le régime chaotique est étudié à l'aide du formalisme de la turbulence d'ondes.

## Abstract

This dissertation is devoted to geometrically non-linear (large-amplitude) vibrations of thin structures, with a special emphasis to the case of plates and shells. The first chapter introduces the models used in the document, recalling the basic assumptions they rely on. Von Kármán model for thin plates, Donnell-Mushtari-Vlasov model for shallow shells, Donnell's non-shallow theory with in-plane inertia, and Flügge-Lur'e-Byrne theory are presented for perfect and imperfect circular plates, shallow spherical shells, circular cylindrical shells and doubly-curved panels. Chapter 2 is entirely devoted to the application of Non-linear Normal Modes (NNMs) in vibration theory, with a special emphasis to their use as reduced-order models for geometrically non-linear thin structures. The definition of a NNM as an invariant manifold in phase space is recalled. Then a methodology is presented, which is based on the normal form theory, and allows one to compute easily and efficiently all NNMs in a single operation. Reduced-order models based on NNM formalism are then derived for thin shells, showing their excellent behaviour in the case of low-frequency, forced harmonic vibrations. Chapter 3 is concerned with the transition to chaos, obtained as one forces harmonically a thin shells with an increasing amplitude. The generic case, which has been observed in numerous experiments with various shells, is recalled. Two bifurcations are obtained, leading from a periodic to a quasi-periodic then finally to a chaotic regime. The first bifurcation is analysed theoretically and experimentally, for the particular cases of two specific internal resonances. Finally, the chaotic vibration is studied in the framework of wave turbulence.



## Plaques et coques minces

Dans ce chapitre sont introduits les modèles principaux de plaques et de coques minces en grands déplacements qui seront utilisés par la suite. Le cadre général est celui des vibrations non linéaires géométriques. On supposera donc que les déplacements sont grands, mais que le matériau reste élastique linéaire. La section 1 montre alors que, dans le cadre général de l'élasticité tridimensionnelle, les non-linéarités apparaissant dans les équations du mouvement sont des fonctions quadratiques et cubiques du déplacement.

Les sections suivantes donnent les équations pour les milieux minces bidimensionnels, non-courbés (plaques) et courbés (coques). Dans le cas des plaques, la théorie de von Kármán est utilisée. Pour les coques, le modèle de Donnell-Mushtari-Vlasov (équivalent aux hypothèses de von Kármán) est présenté. Enfin des cinématiques plus complexes, où l'inertie membranaire n'est pas négligée, sont introduits.

Pour chacun des modèles présentés, l'étape de discrétisation est exposée. Une méthode de Galerkin est utilisée, où la base de fonctions de discrétisation employée est généralement la base des fonctions propres de l'opérateur linéaire. Pour le cas des plaques imparfaites et des modèles avec inertie de membrane présentés section 4, il est plus simple d'utiliser des fonctions ad-hoc, ce qui entraîne l'apparition de termes de couplage linéaire.

Les modèles rappelés ici sont classiques dans la littérature, et l'on peut se référer à [42, 43, 44, 48, 52, 69, 87, 94, 112, 148, 167] pour plus de détails. Pour ce document, nous nous sommes surtout inspirés des travaux suivant : [R2,R6,R12] et [8, 156, 157]. Afin de ne rappeler que les résultats essentiels, les notations usuelles et évidentes ne seront pas rappelées.

### 1. Non-linéarités géométriques

En notant  $\underline{U}$  le déplacement tridimensionnel, le tenseur lagrangien des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{e}}$  s'écrit :  $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{U} + \underline{\underline{\nabla}}^t \underline{U} + \underline{\underline{\nabla}}^t \underline{U} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{U})$ , il est quadratique en fonction du déplacement. En élasticité tridimensionnelle, la dynamique est donnée par :  $\text{div} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}) + \underline{\underline{f}} = \rho \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2}$ , où  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{U}$  est le tenseur gradient de transformation,  $\underline{\underline{\pi}}$  est le second tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff, et  $\underline{\underline{f}}$  représente les efforts volumiques externes. En supposant le matériau élastique linéaire, les contraintes sont reliées aux déformations par la relation linéaire  $\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{e}}$ , si bien que  $\underline{\underline{\pi}}$  contient, de la même manière que  $\underline{\underline{e}}$ , des termes linéaires et quadratiques en déplacement. Comme le gradient de transformation est linéaire en déplacement, l'équation de la dynamique montre bien que les non-linéarités apparaissant sont polynomiales, d'ordre deux et trois en déplacement.

### 2. Plaques minces parfaites et imparfaites

Dans cette section est rappelé le modèle de von Kármán pour les plaques minces. Dans tout ce qui suit le matériau est supposé élastique linéaire. De nombreuses hypothèses président à l'établissement du modèle, dont les plus notables sont la simplification opérée dans la relation déformation/déplacement, où seuls quelques termes sont retenus ; ainsi que l'omission de l'inertie de membrane, ce qui permet l'introduction d'une fonction d'Airy. Les résultats donnés par le modèle de von Kármán sont excellents pour les plaques minces [173], cependant lorsque l'épaisseur augmente, il convient de réintroduire

l'inertie membranaire, voire le cisaillement en adoptant une cinématique type Reissner-Mindlin, ce qui complexifie grandement les équations du modèle.

### 2.1. Modèle de von Kármán.

**H1:** Les hypothèses de Kirchhoff-Love sont supposées vérifiées : tout segment reste droit et perpendiculaire à la surface moyenne lors des déformations. Cela implique en particulier que le cisaillement est négligé. De plus les angles de rotation sont supposés petits et sont linéarisés, ce qui permet d'écrire le déplacement de tout point de la plaque en fonction des trois déplacements  $(u, v, w)$  de la surface moyenne.

**H2:** Le déplacement transverse  $w$  est de l'ordre de l'épaisseur  $h$ , les déplacements longitudinaux  $(u, v)$  sont d'un ordre inférieur.

**H3:** Dans la partie membranaire du tenseur de Green-Lagrange, notée  $\tilde{\underline{\underline{\epsilon}}}$ , seuls les termes non linéaires dépendant de  $w$  seront retenus. Cette hypothèse peut être vue comme une conséquence de la précédente. Elle est justifiée par des développements asymptotiques [43, 44, 112, 156].

**H4:** Le terme de contraintes  $\underline{\underline{\pi}}_{zz}$  est négligé (hypothèse de contraintes planes). Les termes de contraintes de cisaillement  $\underline{\underline{\tau}} = (\underline{\underline{\pi}}_{xz}, \underline{\underline{\pi}}_{yz})^t$  sont aussi négligés, sauf dans les équations d'équilibre en résultante, où l'effort tranchant  $\underline{Q} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\tau}} dz$  est relié aux moments de flexion  $\underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z \underline{\underline{\pi}} dz$  par la relation suivante (en l'absence de moments extérieurs appliqués) [8, 69, 156] :  $\underline{Q} = \text{div} \underline{M}$ .

**H5:** L'inertie de rotation est négligée.

**H6:** L'inertie membranaire est négligée. Si de plus il n'y a pas d'efforts extérieurs longitudinaux, l'équation d'équilibre des composantes membranaires s'écrit simplement :  $\text{div} \underline{N} = \underline{Q}$ , avec  $\underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\pi}} dz$  le tenseur (bidimensionnel) des forces de membrane. On peut alors introduire une fonction d'Airy  $F$  définie par  $\underline{N} = \Delta F \underline{1} - \underline{\nabla} \underline{\nabla} F$  et vérifiant  $\text{div} \underline{N} = \underline{Q}$ . Pour clore le système et obtenir une formulation en  $(w, F)$  uniquement, il faut introduire une condition de compatibilité (analogue des conditions de Beltrami) reliant  $F$  à  $w$ .

Finalement les équations dynamiques du modèle de von Kármán s'écrivent, en tenant compte d'un amortissement visqueux  $\mu \dot{w}$  et d'un forçage externe  $p(\underline{x}, t)$  :

$$D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} = L(w, F) - \mu \dot{w} + p(\underline{x}, t), \quad (1a)$$

$$\Delta \Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w) \quad (1b)$$

où  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  est la rigidité en flexion et  $L$  un opérateur bilinéaire qui l'on peut écrire en coordonnées intrinsèques [156, 157] :

$$L(w, F) = \Delta F \Delta w - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\nabla}} F : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\nabla}} w, \quad (2)$$

**2.2. Plaque circulaire à bord libre.** L'article [R2] traite le cas spécifique des plaques circulaires à bord libre. Les modes propres  $\Phi_p(r, \theta)$  de la plaque sont alors donnés par une combinaison de fonctions de Bessel pour la partie radiale et de fonctions sinus/cosinus pour la partie orthoradiale. Il est à noter que les modes se caractérisent par un nombre de diamètres nodaux  $k$  et un nombre de cercles nodaux  $n$ . les modes tels que  $k = 0$  sont axisymétriques. Les modes pour  $k \geq 1$  sont asymétriques et dégénérés à cause de la symétrie de révolution : à une fréquence propre correspond deux déformées modales, l'une en sinus, l'autre en cosinus.

Afin de se ramener à un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires (EDOs), le déplacement est décomposé sur la base des modes propres :  $w(r, \theta, t) = \sum X_p(t) \Phi_p(r, \theta)$ , que l'on insère dans les équations (1) adimensionnées. Pour résoudre l'équation de compatibilité (1b) un développement modal de la fonction  $F$  est aussi introduit, le calcul montre que les modes associés sont ceux de la plaque à bord

encastré, notés  $\Psi_b$ . Tout calculs faits, la dynamique s'exprime finalement comme un problème temporel pour les amplitudes modales  $X_p(t)$  :

$$\ddot{X}_p(t) + \omega_p^2 X_p(t) = \varepsilon \left[ \sum_{i,j,k=1}^{+\infty} h_{ijk}^p X_i(t) X_j(t) X_k(t) - 2\mu_p \dot{X}_p(t) + Q_p(t) \right], \quad (3)$$

où  $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$  quand le déplacement est adimensionné par l'épaisseur  $h$ . Un amortissement modal a été supposé,  $Q_p$  est la force modale, et les pulsations propres et les coefficients non linéaires sont donnés par les formules suivantes (en supposant les modes normés de telle sorte que  $\iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS = 1$ ) :

$$\omega_p^2 = \iint_{(S)} \Phi_p \Delta \Delta \Phi_p dS, \quad (4)$$

$$h_{ijk}^p = -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi_b^4} \iint_{(S)} L(\Phi_i, \Phi_j) \Psi_b dS \iint_{(S)} \Phi_p L(\Phi_k, \Psi_b) dS. \quad (5)$$

Comme annoncé section 1, les non-linéarités sont polynomiales. Ici seul un terme cubique apparait dans les équations, conséquence de la parfaite planéité : une force transverse appliquée vers le haut ou vers le bas doit donner un déplacement opposé mais égal en valeur absolue [C6]. Cette symétrie est rompue pour les coques (ou dès que l'on introduit une imperfection géométrique) où apparaissent alors des termes quadratiques.

**2.3. Imperfection géométrique.** L'article [R16] et la thèse de Cédric Camier [37] considèrent le cas d'un défaut de forme (imperfection géométrique à état de précontrainte nulle, noté  $w_0(r, \theta)$ ), pour une plaque à bord libre. Les équations (1) deviennent alors :

$$D\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = L(w, F) + L(w_0, F) - c\dot{w} + p, \quad (6a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2} [L(w, w) + 2L(w, w_0)]. \quad (6b)$$

En projetant ces EDPs adimensionnées sur la base des modes propres de la plaque parfaite, on obtient le système d'EDOs :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p = \varepsilon \left[ \sum_{i=1}^{N_w} \alpha_i^p X_i + \sum_{i,j=1}^{N_w} \beta_{ij}^p X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^{N_w} h_{ijk}^p X_i X_j X_k + 2\mu_p \dot{X}_p - Q_p \right]. \quad (7)$$

Le coefficient cubique  $h_{ijk}^p$  intervenant dans cette équation est celui de la plaque parfaite (5). Les nouveaux coefficients de couplage linéaire  $\alpha_i^p$  et quadratique  $\beta_{ij}^p$  qui apparaissent s'expriment analytiquement en fonction de  $h_{ijk}^p$  est des coefficients  $a_p$  de la projection de l'imperfection géométrique sur la base des  $\Phi_p$  selon l'expression :  $w_0(r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_0} a_p \Phi_p(r, \theta)$ , soit :

$$\alpha_i^p = \sum_{r=1}^{N_0} \sum_{s=1}^{N_0} 2h_{ris}^p a_r a_s, \quad (8a)$$

$$\beta_{ij}^p = \sum_{s=1}^{N_0} (h_{jis}^p + 2h_{sji}^p) a_s \quad (8b)$$

Ainsi, à partir des caractéristiques linéaires et non linéaires de la plaque parfaite, on peut calculer analytiquement les caractéristiques de n'importe quelle plaque imparfaite. La figure 1, tirée de [R16], montre le résultat d'un calcul de fréquences propres pour un défaut ayant la forme du premier mode axisymétrique de plaque parfaite, d'amplitude  $w_{m(0,1)}$  croissante. Le calcul est comparé avec une solution par éléments finis concordante.



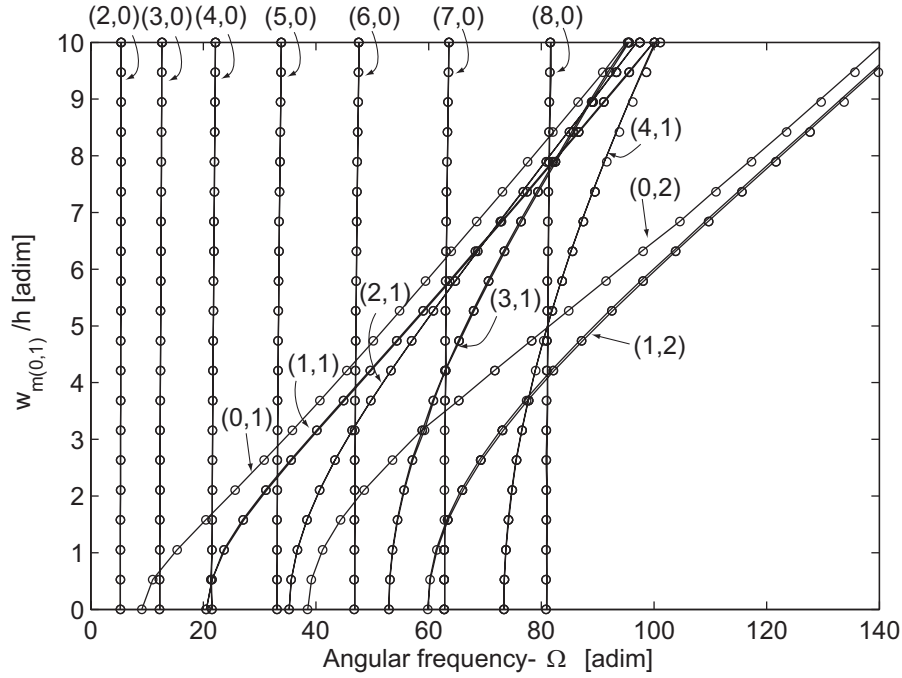


FIG. 1. Evolution des fréquences propres d'une plaque ayant une imperfection de la forme du mode (0,1), d'amplitude  $w_{m(0,1)}$  croissante. Comparaison entre le modèle de plaque imparfaite (o) et un calcul par éléments finis (CASTEM, éléments DKT, trait plein).

### 3. Coques minces peu profondes

Pour les coques, les hypothèses (H1)-(H5) de la théorie de von Kármán peuvent être reconduites, on obtient alors le modèle de Donnell [8, 48]. Si de plus on rajoute l'hypothèse (H6), on obtient l'équivalent rigoureux du modèle de von Kármán, souvent appelé dans la littérature modèle de Donnell peu profond<sup>1</sup>, valable tant que la courbure est faible, sinon l'inertie membranaire ne peut plus être négligée.

**3.1. Coques sphériques.** Cette section reprend des résultats de [R6] pour une coque sphérique peu profonde. En notant  $R$  le rayon de courbure de la coque,  $h$  son épaisseur et  $a$  son rayon, les hypothèses de von Kármán (ou le modèle de Donnell peu profond) mènent aux équations suivantes pour la dynamique :

$$D \Delta \Delta w + \frac{1}{R} \Delta F + \rho h \ddot{w} = L(w, F) - c \dot{w} + p(\underline{x}, t), \quad (9a)$$

$$\Delta \Delta F - \frac{Eh}{R} \Delta w = - \frac{Eh}{2} L(w, w). \quad (9b)$$

On peut noter dans ces équations que le couplage entre les mouvements longitudinaux et de flexion a lieu ici dès le stade linéaire, contrairement aux plaques. Il est de plus remarquable que ces équations, généralement admises dans la littérature comme le modèle de coque sphérique [8, 56, 62, 64, 82, 171], sont en fait valables pour une géométrie non pas sphérique mais parabolique : ceci a été démontré dans [R16][37] en introduisant un défaut sphérique dans les équations (6), on se rend alors compte qu'il ne faut conserver que le premier terme du développement sphérique (terme parabolique) pour retrouver les équations (9).

Les articles [R6,R8] donnent les caractéristiques linéaires et non linéaires pour le cas d'un bord libre. Les modes propres  $\Phi_p(r, \theta)$  s'écrivent à partir de fonctions de Bessel et de Kelvin [R6]. Le déplacement transverse est développé sur cette base, la fonction d'Airy  $F$  sur une combinaison des fonctions propres

<sup>1</sup>Donnell's non-linear shallow shell theory dans la littérature anglo-saxonne.

du problème de membrane à bord libre  $\Phi_p$  et encastré  $\Upsilon_j$ . Le problème linéaire associé à (9) ne dépend que d'un seul paramètre géométrique appelé rapport d'aspect, défini par  $\kappa = \frac{a^4}{R^2 h^2}$ . La figure 2 montre l'évolution des fréquences propres lorsque l'on augmente la courbure.

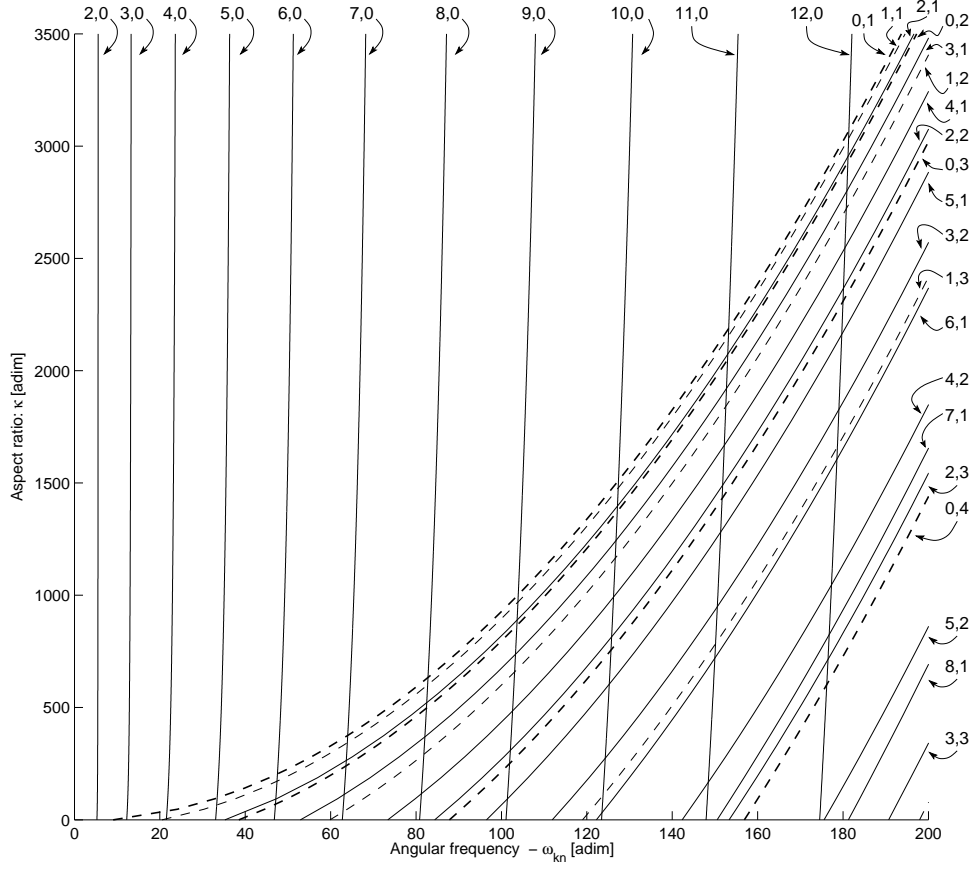


FIG. 2. Pulsations propres  $\omega_{kn}$  (sans dimensions) pour une coque sphérique peu profonde de rapport d'aspect  $\kappa$ , et pour  $\nu = 0.33$ . Quand  $\kappa = 0$ , le rayon de courbure est infini, nous avons donc affaire à une plaque. Augmenter  $\kappa = 0$  revient à augmenter la courbure de la coque.

Le problème adimensionné, sans amortissement ni forçage, projeté sur la base propre s'écrit au final :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \varepsilon_q \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_{ij}^p X_i X_j + \varepsilon_c \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_{ijk}^p X_i X_j X_k = 0, \quad (10)$$

où  $\varepsilon_q = 12(1 - \nu^2)\sqrt{\kappa}$  et  $\varepsilon_c = 12(1 - \nu^2)$  proviennent de l'adimensionnement. Les coefficients de couplage non linéaire s'écrivent :

$$\beta_{ij}^p = - \iint_{S_{\perp}} \Phi_p L(\Phi_i, \Psi_j) dS - \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi_b^4} \iint_{S_{\perp}} L(\Phi_i, \Phi_j) \Upsilon_b dS \iint_{S_{\perp}} \Phi_p \Delta \Upsilon_b dS, \quad (11)$$

$$\Gamma_{ijk}^p = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi_b^4} \iint_{S_{\perp}} L(\Phi_i, \Phi_j) \Upsilon_b dS \iint_{S_{\perp}} \Phi_p L(\Phi_k, \Upsilon_b) dS. \quad (12)$$

**3.2. Coques circulaires cylindriques.** Les hypothèses du modèle de Donnell pour les coques peu profondes (*i.e.* en négligeant l'inertie membranaire) peuvent être reprises pour traiter le cas des coques circulaires cylindriques, pourvu que l'on se limite à l'étude des modes tels que le nombre  $n$  d'ondes

circonférentielles (le nombre de lignes nodales est alors  $2n$ ) soit tel que  $1/n^2 \ll 1$ , soit  $n \geq 4$  ou 5 [8]. Le modèle de Donnell s'écrit alors, en coordonnée cylindrique :

$$D \Delta \Delta w + chw + \rho h \ddot{w} = f - p + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right], \quad (13a)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right], \quad (13b)$$

où le déplacement transverse est pris positif lorsqu'il est dirigé vers le centre de la coque,  $f$  représente un effort extérieur (type forçage localisé) et  $p$  représente la pression due à l'interaction éventuelle fluide-structure lorsque la coque est remplie d'eau.

Ici nous reprenons la discrétisation proposée dans [6, 8, 10, 133], pour des conditions aux limites simplement supportées. C'est ce modèle qui sera utilisé au chapitre suivant, utilisant des résultats de [R9,R10]. Le déplacement  $w$  est développé sur la base des modes propres :

$$w(x, \theta, t) = \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^3 [A_{m,kn}(t) \cos(kn\theta) + B_{m,kn}(t) \sin(kn\theta)] \sin(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^4 A_{(2m-1),0}(t) \sin(\lambda_{(2m-1)} x), \quad (14)$$

où  $n$  est le nombre d'ondes circonférentielles,  $m$  le nombre de demi-longueur d'ondes longitudinales,  $\lambda_m = m\pi/L$ ;  $A_{m,n}(t)$  et  $B_{m,n}(t)$  sont les coordonnées généralisées. Dans le cas d'une coque remplie d'eau, un modèle de fluide inviscide, incompressible et irrotationnel permet de donner une expression simple de la pression  $p$  en fonction des coordonnées modales, cf. [6]. Au final, si l'on renomme les coordonnées  $\{A_{m,n}, B_{m,n}\}$  par  $X_n$ , on retrouve bien des équations d'oscillateurs non linéaires couplés avec termes quadratiques et cubiques, semblables aux équations (10). Les détails du calcul menant aux EDOs sont donnés dans [6, 10, 12], sans toutefois donner une formule analytique pour les coefficients non linéaires.

## 4. Modèles avec inertie de membrane

**4.1. Cinématiques et Méthode Lagrangienne.** Certaines des hypothèses les plus fortes des modèles de von Kármán et de Donnell-Mushtari-Vlasov peuvent être levées, ce qui prend particulièrement du sens lorsque l'on considère que l'épaisseur n'est plus complètement négligeable, ou que la courbure des coques devient trop grande. L'inertie de membrane peut ainsi être conservée dans les équations du mouvement, qui alors ne s'expriment plus en fonction de  $(w, F)$  mais des trois déplacements  $(u, v, w)$ . L'article [173] montre que, pour le cas des plaques, l'inertie de membrane est absolument négligeable tant que l'épaisseur ne dépasse pas 1/20 des dimensions latérales.

Dans les cas des coques profondes il convient aussi de ne plus négliger l'inertie longitudinale. L'article [2] montre l'effet produit sur les fréquences propres, tandis que les réponses non linéaires sont montrées dans [5]. Enfin, la simplification opérée dans la relation déformation/déplacement (hypothèse H3 du modèle de von Kármán) peut aussi être revue afin d'introduire des cinématiques plus complexes. Divers modèles ont été proposés dans la littérature, parmi lesquels on peut citer ceux de Novozhilov, Sanders-Koiter, Flugge-Lur'e-Byrne...

Les sections suivantes exposent très brièvement les hypothèses du modèle de Flugge-Lur'e-Byrne et donnent la discrétisation utilisée pour le cas d'une coque circulaire cylindrique, ainsi que pour un panneau à double courbure : ces modèles ont été utilisés dans [R12] et seront repris au chapitre suivante.

**4.2. Coque circulaire cylindrique.** Dans le modèle de Flugge-Lur'e-Byrne, l'inertie membranaire est retenue. La cinématique est complexifiée par la prise en compte d'une dépendance linéaire en fonction de la coordonnée transverse  $z$  pour les déplacements longitudinaux  $u$  et  $v$ , la référence [8] en donne les détails.

Les équations sont ensuite obtenues par une méthode Lagrangienne [5, 8], pour une coque circulaire cylindrique aux bords simplement supportés. Comme les trois déplacements  $(u, v, w)$  sont conservées dans la formulation il est plus aisé d'utiliser une base de fonctions ad-hoc plutôt que la base modale pour discrétiser les équations. Ici les développements sont les suivants :

$$u(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^2 [u_{1,5k,c}(t) \cos(5k\theta) + u_{1,5k,s}(t) \sin(5k\theta)] \cos(\lambda_1 x) + \sum_{m=1}^2 u_{2m-1,0}(t) \cos(\lambda_{2m-1} x) + \hat{u}, \quad (15a)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^2 [v_{1,5k,c}(t) \sin(5k\theta) + v_{1,5k,s}(t) \cos(5k\theta)] \sin(\lambda_1 x) + [v_{3,10,c}(t) \sin(10\theta) + v_{3,10,s}(t) \cos(10\theta)] \sin(\lambda_3 x), \quad (15b)$$

$$w(x, \theta, t) = [w_{1,5,c}(t) \cos(5\theta) + w_{1,5,s}(t) \sin(5\theta)] \sin(\lambda_1 x) + \sum_{m=1}^2 w_{2m-1,0}(t) \sin(\lambda_{2m-1} x), \quad (15c)$$

où  $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ , et  $\hat{u}$  et un terme non linéaire ajouté afin de satisfaire exactement la condition  $N_x = 0$ . C'est un modèle à 16 degrés de libertés (ddl), dont la convergence a été étudiée dans [5] pour le régime forcé au voisinage de la fréquence propre du mode (1,5).

Les équations discrétisées sont :

$$\ddot{q}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{q}_p + \sum_{i=1}^P z_i^p q_i + \sum_{i,j=1}^P z_{i,j}^p q_i q_j + \sum_{i,j,k=1}^P z_{i,j,k}^p q_i q_j q_k = f_p \cos(\omega t). \quad (16)$$

où  $\mathbf{q} = [u_{m,n}, v_{m,n}, w_{m,n}]^T$  est le vecteur des coordonnées généralisées regroupant les inconnues introduites par (15). Un terme de couplage linéaire est présent dans les équations puisque la base modale n'a pas été utilisée pour la projection.

**4.3. Panneau à double courbure.** Un panneau à double courbure hyperbolique parabolicoïde (les rayons de courbure principaux  $R_x$  et  $R_y$  étant tels que  $R_x = -R_y$ ), utilisant la cinématique de Donnell pour coques profondes a été utilisé dans [R12]. Les conditions aux limites sont simplement supportées ; les fonctions de base utilisées pour la discrétisation sont :

$$\phi_{m,n}^{(u)}(x, y) = \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b), \quad (17a)$$

$$\phi_{m,n}^{(v)}(x, y) = \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b), \quad (17b)$$

$$\phi_{m,n}^{(w)}(x, y) = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (17c)$$

Deux termes non linéaires  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  sont ajoutées aux équations (17a) et (17b) afin que les conditions aux limites soient identiquement vérifiées [7]. Les équations du mouvement sont semblables à (16). Dans la suite du document, reprenant [R12], 22 fonctions de base sont retenues pour discrétiser le panneau et étudier ses vibrations forcées au voisinage du mode fondamental, à savoir :  $\phi_{1,1}^{(u)}, \phi_{1,3}^{(u)}, \phi_{3,1}^{(u)}, \phi_{3,3}^{(u)}, \phi_{1,1}^{(v)}, \phi_{3,1}^{(v)}, \phi_{1,3}^{(v)}, \phi_{3,3}^{(v)}, \phi_{1,5}^{(u)}, \phi_{5,1}^{(u)}, \phi_{3,5}^{(u)}, \phi_{5,3}^{(u)}, \phi_{5,5}^{(u)}, \phi_{1,1}^{(v)}, \phi_{3,1}^{(v)}, \phi_{1,3}^{(v)}, \phi_{3,3}^{(v)}, \phi_{1,5}^{(v)}, \phi_{5,1}^{(v)}, \phi_{3,5}^{(v)}, \phi_{5,3}^{(v)}, \phi_{5,5}^{(v)}$ .



## Modes normaux non linéaires

### 1. Introduction : réduction de modèles

Une des difficultés principales auxquelles on est confronté en vibrations non linéaires réside dans le grand nombre de degrés de liberté (ddl) qu'il faut conserver dans les modèles afin de pouvoir fournir des prédictions correctes, tant qualitativement que quantitativement. Ceci est la conséquence directe du couplage non linéaire des coordonnées modales. Il en résulte une double difficulté. Premièrement l'analyse et la compréhension des dynamiques observées peut être obscurcie par la grande dimension de ces modèles, qui masque des phénomènes que l'on est capable de comprendre par comparaison avec des situations simples exhibées par des cas génériques que l'on trouve dans la théorie des bifurcations de codimension petite, ou l'analyse d'oscillateurs non linéaires canoniques (équation de Duffing, de Mathieu, de Van der Pol, ...). Deuxièmement les coûts de calcul numérique associés sont rapidement prohibitifs. La recherche de *modèles d'ordre réduit, comportant un petit nombre de degrés de liberté*, et ayant la capacité de produire des prédictions correctes est donc un enjeu majeur. Cette recherche peut être ramenée à celle d'une base optimale, capturant au mieux, dans l'espace des phases, les dynamiques du système étudié. Par cette définition, on sent d'ores et déjà que ces bases devront avoir une capacité *d'adaptation*, afin de rendre compte des éventuels changements de dynamiques via des bifurcations.

La littérature sur le sujet est extrêmement vaste et abondante, les méthodes proposées différant beaucoup selon les cas d'applications, les modèles numériques utilisés, le niveau de modélisation. En dynamique, la première idée consiste à utiliser la base des modes propres du problème linéarisé, ce qui donne déjà lieu à une réduction substantielle du nombre de degrés de liberté mis en jeu lorsque les EDP de départ sont discrétisées par des méthodes de type éléments finis. Cette méthode est très classique en vibrations linéaires, cf. par exemple [19, 109, 113, 130]. Cette base a de plus le bon goût de posséder des bonnes propriétés, en particulier elle découple les termes linéaires. Cependant, en incluant les non-linéarités géométriques, cela reste encore insuffisant à cause des termes de couplage non linéaire et la perte d'invariance des sous-espaces propres qui en résulte. D'autres méthodes tentent alors de remédier à cela en optimisant la variance entre une base orthogonale dont les directions sont les inconnues, et un nuage de points obtenus par une simulation directe ou par une expérience. C'est le principe de la méthode POD (pour Proper Orthogonal Decomposition<sup>1</sup>), qui est très largement utilisée dans tous les domaines de la physique, et dont l'article [91] propose une vue d'ensemble pour les applications relatives à la dynamique des structures.

Les avantages de la méthode POD sont nombreux, ce qui explique son succès<sup>2</sup>. Outre sa facilité d'implémentation, elle possède de plus une très grande souplesse de par sa capacité à s'ajuster au mieux aux données du problème. Mais cet avantage peut aussi être vu comme un double inconvénient. Premièrement car le modèle réduit s'applique parfaitement aux données utilisées, mais un changement de dynamique modifie le nuage de points, si bien qu'il faut alors recalculer une base POD. Deuxièmement, dans un contexte de modèle mathématique, on aimerait pouvoir se passer de la donnée d'une série chronologique d'observation afin de pouvoir être en mesure de calculer le modèle réduit : une stratégie

<sup>1</sup>Nous décidons ici de conserver l'acronyme anglais POD car le terme s'est popularisé sous cette forme aussi en français, cela étant peut-être aussi dû à un manque de traduction satisfaisante.

<sup>2</sup>Quantitativement la littérature sur les modèles réduits est très largement dominé (à plus de 75% au bas mot) par l'application de la POD et ses variantes.

n'utilisant que les propriétés intrinsèques des opérateurs apparaissant dans les EDPs de départ permettrait en effet d'effectuer une opération de moins.

Les *modes normaux non linéaires* (MNL) permettent de pallier un certain nombre de ces limitations. Comme nous le verrons par la suite c'est une méthode complètement non linéaire. La base optimale déduite est courbée dans l'espace des phases, et elle se calcule uniquement à partir des propriétés du spectre de l'opérateur linéaire des EDPs. Un bon point d'entrée pour ces méthodes non linéaires (issus généralement de la théorie des systèmes dynamiques : variétés invariantes et inertielles) est donné par les articles généraux [143, 155]. Ce chapitre est entièrement consacré aux MNL. En section 2, nous rappellerons les principales définitions tout en donnant les publications de références sur le sujet. Ensuite, une méthode fondée sur la théorie des formes normales sera décrite en détail en 3. Cette méthode a été exposée dans les articles [R4,R9], et a ensuite été exploitée pour montrer de nombreux résultats [R4,R5,R9,R10,R12,R13]. Tout d'abord nous montrons que la réduction à un mode non linéaire permet de prédire la bonne tendance de non-linéarité pour un ensemble d'oscillateurs, contrairement à la réduction à un mode linéaire qui peut conduire à des prédictions erronées. Des exemples de réduction de modèles sur des cas de coques et de panneaux à double courbure sont montrés section 5. Enfin la méthode POD est comparée aux réductions obtenues à l'aide des MNL sur le cas d'une coque circulaire cylindrique remplie d'eau en section 6.

## 2. Modes non linéaires : définitions

Les modes non linéaires sont ici introduits dans le cadre de la théorie des vibrations. Les équations de départ sur lesquelles on opère sont des oscillateurs couplés non linéairement, cas générique pour les grandes amplitudes de structures minces. La plupart des résultats utiles proviennent de la théorie des systèmes dynamiques [65, 75, 107, 164]. Ces résultats généraux sont ici particularisés pour tenir compte du fait que l'on traite des problèmes d'ordre deux en temps (des ensembles d'oscillateurs).

Les premiers travaux sur les MNL remontent à Rosenberg [145, 146] dans les années 1960. En utilisant des résultats de Lyapunov [105] qui montrent l'existence de familles d'orbites périodiques au voisinage des sous-espaces propres<sup>3</sup>, il définit ainsi un mode non linéaire comme "une vibration à l'unisson", décrite par une orbite périodique. Cette définition a été reprise entre autre par Manevitch et Mikhlin [106, 111], Rand [141] et Vakakis [93, 161, 162].

Au début des années 1990, la thématique connaît un nouvel essor avec les travaux de S. Shaw et C. Pierre [35, 149, 150, 151]. En utilisant le formalisme des systèmes dynamiques et le théorème de réduction à la variété centrale, ils définissent un mode non linéaire comme une variété invariante de l'espace des phases, tangente à l'origine aux sous-espaces propres. Cette définition élargit le champ d'application de celle de Rosenberg, car elle permet, entre autre, de traiter les systèmes amortis.

Les deux définitions équivalentes rappelées ci-dessus montrent que le concept de MNL repose sur des théorèmes forts et bien connus, respectivement le théorème de Lyapunov [105] sur les orbites périodiques et celui de la variété centrale [21, 38, 65, 88, 137]. Étrangement, les théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac [50, 138] ne sont pas utilisés. C'est le sens des travaux de Jézéquel et Lamarque [84], ainsi que de ceux que j'ai mené [R4,R9], de montrer que les MNL peuvent être définis dans le cadre de la théorie des formes normales, ce qui est complètement logique étant donné l'équivalence qui existe entre variété invariante et forme normale [54, 74]. In fine on obtient une troisième description dont on peut montrer les équivalences avec les autres formulations [R4].

---

<sup>3</sup>Les résultats de Lyapunov [105] sont pour les systèmes à  $n$  ddl et sans résonance interne. Ils ont été étendus par Weinstein et Moser au cas des résonances internes [115, 163].

### 3. Calcul asymptotique et formes normales

Le point de départ est un ensemble d'oscillateurs non linéaires couplés avec non-linéarités quadratiques et cubiques, conformément à ce que l'on a vu au chapitre 1. On suppose de plus que la partie linéaire a déjà été découplée, si tel n'est pas le cas il suffit de la diagonaliser et d'effectuer un changement de variables linéaires classique. La dynamique est donc décrite par :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\xi_p \omega_p \dot{X}_p + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N g_{ij}^p X_i X_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{k \geq j}^N h_{ijk}^p X_i X_j X_k = 0, \quad (18)$$

Dans cette équation,  $X_p$  représente la  $p^{\text{ème}}$  coordonnée modale. Un amortissement modal, de la forme  $2\xi_p \omega_p \dot{X}_p$  a été ajouté. On considère ici un amortissement ad-hoc dont on suppose que les valeurs ont été finement accordées afin de représenter au mieux la structure étudiée<sup>4</sup>.

Le calcul des modes non linéaires par développement asymptotique repose sur la théorie des formes normales, devenue standard en théorie des bifurcations, car elle permet de ramener les dynamiques au voisinage de points singuliers à leur forme la plus simple et donc de décrire les modèles génériques de bifurcation pour des codimensions croissantes, cf. par exemple [22, 36, 75, 107]. L'idée de Poincaré consistait à dire qu'un système non linéaire, aussi compliqué soit-il, peut en fait cacher une dynamique extrêmement simple, si bien que, par un changement de variables non linéaire, on devrait être en mesure d'éliminer tous les termes non linéaires qui obscurcissent la vue que l'on s'en fait. On aboutit ainsi à la définition des termes *résonnants* et *non-résonnants*. Les premiers, essentiels à la dynamique, ne peuvent être éliminés, tandis que les seconds peuvent l'être grâce à un changement de variables. Dans le meilleur des cas, s'il n'y a pas de relation de *résonances* entre les valeurs propres du problème linéarisé, on peut complètement éliminer les termes non linéaires (théorème de Poincaré) [138], si bien que le système dynamique original est en fait équivalent à un système linéaire. S'il y a des termes résonnants, alors ceux-ci ne sont pas éliminés. A la fin du changement de variables, on aboutit tout de même à une expression beaucoup plus simple du système dynamique, qui ne comprend plus que les termes résonnants, et qui est appelée *forme normale du système* (théorème de Poincaré-Dulac) [50].

Dans la suite de l'exposé nous nous plaçons en dimension finie. L'extension en dimension infinie nécessite quelques amendements techniques mais est possible, cf. [68, 76, 77]. Les relations de résonances entre les valeurs propres  $\{\lambda_k\}_{k=1\dots N}$  de l'opérateur linéaire se définissent de la manière suivante :

$$\forall s = 1\dots N : \lambda_s = \sum_{i=1}^N m_i \lambda_i, \quad m_i \geq 0, \quad \sum m_i = p \geq 2, \quad (19)$$

où  $p$  est l'ordre de la résonance (lié au degré de non-linéarité), et  $N$  le nombre de valeurs propres du système.

Dans le cas des systèmes vibratoires conservatifs, les valeurs propres sont toutes imaginaires pures et complexes conjuguées : le spectre est de la forme  $\{\pm i\omega_p\}_{p=1\dots N}$ . Il en résulte qu'il existera *toujours* des termes résonnants, puisque l'on peut toujours écrire la relation triviale de résonance d'ordre 3 :  $i\omega_p = i\omega_p - i\omega_p + i\omega_p$ . Par conséquent il restera toujours des monômes résonnants dans la forme normale. Ceci est heureux car le terme résonnant lié à la relation précédente est le terme en  $X_p^3$  dans la  $p^{\text{ème}}$  équation d'oscillateur, *i.e.* le terme type "Duffing" qui rend les fréquences directement dépendante de l'amplitude. Par contre les résonances internes faisant intervenir plusieurs modes, du type  $\omega_i \pm \omega_j = \omega_p$  (ordre deux), ou  $\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k = \omega_p$  (ordre 3), dépendent des fréquences propres de la structure étudiée et donneront lieu, ou non, à des couplages forts entre modes que l'on reverra plus précisément au chapitre suivant.

<sup>4</sup>En particulier nous ne nous intéressons pas ici au problème d'une représentation correcte des termes d'amortissements dans les vibrations de structure incluant les phénomènes viscoélastiques, thermoélastiques, de couplage fluide-structure et de perte par les bords.



Le calcul des modes non linéaires développé dans les publications [R4,R9] suit rigoureusement la méthode utilisée pour démontrer les théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac, à savoir une élimination itérative de tous les termes non-résonnants de (18) par récurrence sur les ordres successifs de non-linéarité. Cependant, à la différence de ce qui se fait dans les traités mathématiques où le cas des spectres imaginaires purs et complexes conjugués est traité [36, 54, 75], ainsi que ce qui avait été fait, pour les systèmes vibrants, par Jézéquel et Lamarque [84], ainsi que par Nayfeh [117], notre calcul conserve, au stade linéaire, des blocs matriciels de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_p^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ce qui permet de rester pendant tout le calcul dans le domaine réel avec des équations d'oscillateurs. Cette différence technique nous est apparue comme un avantage, car on conserve un formalisme avec une assemblée d'oscillateurs non linéaires couplés qui s'interprète en continuité avec les approches usuelles de la mécanique vibratoire. De plus, ce formalisme permet une comparaison terme à terme avec les méthodes de calcul différentes (par variété invariante ou par développement en échelles multiples), ce qui rend plus aisée la démonstration de leur équivalence.

Ici nous présentons les résultats de [R9] prenant en compte le terme d'amortissement : ils généralisent les résultats de [R4] obtenus dans le cas conservatif. Les équations de départ (18) sont d'abord mises au premier ordre en utilisant la vitesse  $Y_p = \dot{X}_p$  comme variable intermédiaire. On suppose ensuite qu'il n'existe pas de résonances internes entre les fréquences propres du système<sup>5</sup>, ce qui nous permettra d'éliminer tous les monômes sauf ceux provenant des relations de résonance triviales. Il est à noter tout de même que s'il y a des relations de résonances internes, le calcul s'en accomode fort bien puisque les petits dénominateurs apparaissent : il suffit alors de conserver les monômes résonnants dans la dynamique normale. Le changement de variables, calculé jusqu'à l'ordre trois, s'écrit :

$$\begin{aligned} X_p = & R_p + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N (a_{ij}^p R_i R_j + b_{ij}^p S_i S_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}^p R_i S_j \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{k \geq j}^N (r_{ijk}^p R_i R_j R_k + s_{ijk}^p S_i S_j S_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq j}^N (t_{ijk}^p S_i R_j R_k + u_{ijk}^p R_i S_j S_k), \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} Y_p = & S_p + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N (\alpha_{ij}^p R_i R_j + \beta_{ij}^p S_i S_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^p R_i S_j \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{k \geq j}^N (\lambda_{ijk}^p R_i R_j R_k + \mu_{ijk}^p S_i S_j S_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq j}^N (\nu_{ijk}^p S_i R_j R_k + \zeta_{ijk}^p R_i S_j S_k) \end{aligned} \quad (21b)$$

Les coefficients introduits  $\{a_{ij}^p, b_{ij}^p, c_{ij}^p, r_{ijk}^p, \dots, \zeta_{ijk}^p\}$  sont calculés en une seule opération, à partir du spectre des valeurs propres et des coefficients de couplage initiaux du problème (18) :  $\{g_{ij}^p, h_{ijk}^p\}$ . Dans le cas conservatif, on obtient des expressions analytiques complètes [R4], dans le cas amortis les formules sont trop lourdes et les coefficients sont présentés comme solution de systèmes linéaires dans [R9]. La forme normale du système s'écrit alors :  $\forall p = 1 \dots N$  :

---

<sup>5</sup>Dans le cas de systèmes faiblement dissipatifs, où l'amortissement est considéré comme une petite perturbation par rapport aux fréquences propres, on peut conserver la condition de résonance interne *sur les fréquences propres* et non sur les valeurs propres complexes  $\lambda_p^\pm = -\xi_p \omega_p \pm i \omega_p \sqrt{1 - \xi_p^2}$ . On montre en effet (cf. annexes de [R9]) que si l'on fait des développements limités en puissance de l'amortissement  $O(\xi)$ , alors les petits dénominateurs sont ceux du cas conservatif avec une précision en  $O(\xi^2)$ . Par contre si le système est fortement amorti alors il faut revoir les relations de résonance et les écrire directement sur les valeurs propres complexes.

$$\begin{aligned}
& \ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + 2\xi_p \omega_p \dot{R}_p + (h_{ppp}^p + A_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p \dot{R}_p^2 + C_{ppp}^p R_p^2 \dot{R}_p \\
& + R_p \left[ \sum_{j>p}^N \left[ (h_{pjj}^p + A_{pjj}^p + A_{jpp}^p) R_j^2 + B_{pjj}^p \dot{R}_j^2 + (C_{pjj}^p + C_{jpp}^p) R_j \dot{R}_j \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i<p} \left[ (h_{iip}^p + A_{iip}^p + A_{pii}^p) R_i^2 + B_{pii}^p \dot{R}_i^2 + (C_{pii}^p + C_{ipi}^p) R_i \dot{R}_i \right] \right] \\
& + \dot{R}_p \left[ \sum_{j>p}^N \left( B_{jpp}^p R_j \dot{R}_j + C_{jpp}^p R_j^2 \right) + \sum_{i<p} \left( B_{iip}^p R_i \dot{R}_i + C_{iip}^p R_i^2 \right) \right] = 0 \quad (22)
\end{aligned}$$

Les coefficients  $(A_{ijk}^p, B_{ijk}^p, C_{ijk}^p)$  proviennent de l'élimination des termes quadratiques. Leurs expressions sont :

$$A_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^N g_{il}^p a_{jk}^l + \sum_{l \leq i} g_{li}^p a_{jk}^l, \quad (23a)$$

$$B_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^N g_{il}^p b_{jk}^l + \sum_{l \leq i} g_{li}^p b_{jk}^l. \quad (23b)$$

$$C_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^N g_{il}^p c_{jk}^l + \sum_{l \leq i} g_{li}^p c_{jk}^l. \quad (23c)$$

Ces développements appellent les commentaires suivants :

- Le changement de variable (21) est tangent à l'identité, ce qui permet de voir les modes non linéaires comme une continuation des sous-espaces propres linéaires.
- Dans les Eqs. (22), tous les termes non-résonnants, qui brisent l'invariance des sous-espaces propres linéaires, ont été éliminés. Retrouvant ainsi un découpage de l'espace des phases en variétés invariantes, on peut alors procéder à des troncatures propres. En particulier, comme il sera rappelé dans la section suivante, projeter la dynamique sur un seul MNL permet de prédire la tendance de non-linéarité du système, alors que la réduction à un mode linéaire peut donner des résultats erronés.
- Posé de cette manière, le passage en coordonnées *normales* se fait via un changement de variables : c'est le cadre adapté pour faire de l'analyse/synthèse modale non linéaire. On montre de plus que la dynamique sur les modes non linéaires n'est rien d'autre que la forme normale du système, ce qui peut aussi permettre d'écrire ex-nihilo des modèles phénoménologiques simples.
- Le développement asymptotique est limité, dans cette présentation, à l'ordre trois. C'est une limitation importante de la méthode, car le gain que l'on aura en réduction de modèle aux amplitudes modérées sera perdu pour des amplitudes très grandes. Le passage à l'ordre cinq permettrait de donner de meilleurs résultats pour des amplitudes plus grandes, cependant la complexité du changement de variable (le nombre de coefficients) augmentera fortement, il n'est alors pas certain que le gain en temps de calcul soit alors aussi important. Ce point sera rediscuté au vu des résultats, cf. section 5.
- Le cas où des résonances internes apparaissent dans le spectre linéaire ne pose pas de problèmes spécifiques : les coefficients devant annuler ces termes dans le changement de variables (21) est alors nul et les monômes résonnants associés restent dans la forme normale (22).
- Enfin il est à noter que la procédure itérative du calcul du développement asymptotique ne se prête pas à un calcul numérique.

**3.1. Positionnement par rapport à la littérature.** L'originalité principale de notre méthode par rapport à la littérature réside dans la forme réelle retenue tout au long du calcul, ce qui nous a permis, cf. [R4,C10-C11], de comparer terme à terme nos résultats avec ceux obtenus par la méthode de réduction à la variété centrale [35, 134, 150] et par la méthode des échelles multiples [99, 119, 121, 122, 125]. Ce travail de comparaison, déjà entamé par Nayfeh [118, 120], a été ainsi étendu. L'ajout de l'amortissement dans les calculs des MNLs est une extension originale, aucun résultat n'existait auparavant : soit l'ajout d'amortissement était mis au second ordre dans un développement en échelles multiples, ce qui revient à rajouter l'amortissement modal sur les équations de la forme normale (22) uniquement, sans tenir précisément compte de l'amortissement de toutes les autres variétés sur la dynamique normale [R9], soit il est considéré dans une procédure numérique qui ne donne pas lieu à une étude paramétrique de son influence [78, 81].

Ensuite l'application de notre méthode a donné de nombreux résultats qui sont détaillés dans la suite de ce chapitre. En se restreignant à un seul mode non linéaire, on montre déjà un résultat intéressant sur la tendance de non-linéarité. Ensuite l'utilisation des MNLs comme base réduite pour la dynamique basse fréquence des coques minces a montré d'excellents résultats, qui seront comparés avec la méthode POD.

#### 4. Tendance de non-linéarité

La tendance de non-linéarité<sup>6</sup> est la dépendance de la fréquence des oscillations avec l'amplitude. Si la fréquence augmente avec l'amplitude, on a un système raidissant, sinon il est assouplissant<sup>7</sup>. Pour un oscillateur de Duffing, il existe des expressions analytiques qui permettent de prédire sa tendance de non-linéarité [123],[C6]. Cependant, pour un ensemble de  $N$  oscillateurs décrits par une équation type (18), il n'y a plus de solution analytique. Le recours à la simulation numérique étant assez coûteux pour faire cette prédiction, on trouve, dans de nombreuses publications des années 1970-1980, des calculs de type de non-linéarité où la dynamique est restreinte au mode considéré, cf. par exemple [64, 72, 171] pour des coques sphériques, [71] pour des plaques circulaires imparfaites. Nayfeh fut le premier à montrer que ces troncatures trop sévères pouvaient donner lieu à des prédictions erronées [124]. Depuis, des calculs corrects sont publiés, soit en utilisant un nombre de modes linéaires suffisant pour avoir atteint la convergence (cf. par exemple les travaux d'Amabili, Pellicano et Païdoussis sur les coques circulaires cylindriques [10, 13, 133] qui résolvent les résultats contradictoires obtenus auparavant [9, 11, 49, 55]), soit par des développements en échelles multiples qui *in fine* s'apparentent à un réduction sur les modes non linéaires (cf. section précédente) [17, 142].

Notre contribution sur ce sujet a été de démontrer que c'est la perte d'invariance des modes linéaires qui est responsable des erreurs de prédictions. En se plaçant sur le mode non linéaire associé, on a alors une méthode simple et rapide qui permet de prédire la bonne tendance de non-linéarité, sans faire appel à des simulations numériques coûteuses [R4]. Nous avons appliqué la méthode au cas des coques sphériques, afin de prédire le type de non-linéarité en fonction de la courbure [R8], ainsi que pour des plaques comportant une imperfection géométrique [R13]. Dans la prochaine section 4.1 nous montrons comment le formalisme de MNLs permet une prédiction rapide et correcte dans le cas général, avec ou sans amortissement [R4,R9]. Le cas d'un amortissement fort a permis de plus de montrer que celui-ci pouvait changer la tendance de non-linéarité [R9], résultat qui n'avait jamais été mis en évidence auparavant.

---

<sup>6</sup>on parle aussi du type de non-linéarité.

<sup>7</sup>Les termes anglais sont : hardening et softening-type non-linearity.

#### 4.1. Cas général.

##### *Cas conservatif*

La tendance de non-linéarité pour un oscillateur non linéaire de Duffing avec termes quadratiques et cubiques :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + g_{pp}^p X_p^2 + h_{ppp}^p X_p^3 = 0, \quad (24)$$

se définit via le coefficient  $\tilde{\Gamma}_p$  qui gouverne la dépendance des oscillations non linéaires  $\omega_{NL}$  en fonction de l'amplitude du mouvement  $a$ , via  $\omega_{NL} = \omega_p(1 + \tilde{\Gamma}_p a^2)$ . Pour l'équation (24), qui représente la troncature du système complet (18) au  $p^{\text{ème}}$  sous-espace propre linéaire, le coefficient  $\tilde{\Gamma}_p$  peut se calculer analytiquement par une méthode perturbative (cf par exemple [123]) :

$$\tilde{\Gamma}_p = \frac{1}{8\omega_p^2} \left( 3h_{ppp}^p - \frac{10g_{pp}^p{}^2}{3\omega_p^2} \right). \quad (25)$$

En utilisant cette formule pour prédire les tendances de non-linéarités des modes de basse fréquence d'une structure mince, on peut aboutir à des résultats faux car, comme on l'a vu précédemment, se restreindre à un sous-espace propre linéaire, non-invariant, revient à simuler des trajectoires qui n'existent pas dans l'espace des phases complet. Ce faisant, on néglige tous les termes de couplage non linéaires entre modes propres, et qui peuvent avoir une importance considérable sur la tendance de non-linéarité. La bonne démarche consiste à regarder ce qui se passe dans le sous-espace invariant, en ne conservant qu'un seul mode non linéaire. La dynamique est alors gouvernée par :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + (A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p \dot{R}_p^2 = 0, \quad (26)$$

où l'on voit apparaître deux termes supplémentaires qui rendent compte de la présence de tous les autres oscillateurs. Un développement asymptotique au premier ordre sur (26) donne la tendance de non-linéarité sur le mode non linéaire, noté cette fois-ci  $\Gamma_p$  :

$$\Gamma_p = \frac{3(A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) + \omega_p^2 B_{ppp}^p}{8\omega_p^2}. \quad (27)$$

En développant les termes  $A_{ppp}^p$  et  $B_{ppp}^p$  on peut faire apparaître explicitement que  $\Gamma_p$  contient des termes correctifs par rapport à  $\tilde{\Gamma}_p$  :

$$\Gamma_p = \tilde{\Gamma}_p - \frac{1}{8\omega_p^2} \left[ \sum_{l \neq p} \frac{(8\omega_p^2 - 3\omega_l^2)}{\omega_l^2(4\omega_p^2 - \omega_l^2)} (g_{pl}^p + g_{lp}^p) g_{pp}^l \right] \quad (28)$$

Un exemple à deux ddl illustre ce résultat analytiquement et numériquement dans [R4].

##### *Prise en compte de l'amortissement*

Lorsqu'un terme d'amortissement modal est inséré dans les équations, comme cela a été fait à la section 3, la dynamique sur un mode non linéaire est alors gouvernée par l'équation suivante :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + 2\xi_p \omega_p \dot{R}_p + (h_{ppp}^p + A_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p \dot{R}_p^2 + C_{ppp}^p R_p^2 \dot{R}_p = 0. \quad (29)$$

Le calcul de la tendance de non-linéarité donne le même résultat que (27), à la différence près que désormais les coefficients  $A_{ppp}^p$  et  $B_{ppp}^p$  dépendent de l'amortissement. A l'aide d'un cas simple à deux ddls, nous avons montré dans [R9] que l'amortissement avait une tendance général à rendre les comportements plus assouplissants. Dans certains cas, il peut même changer le comportement de raidissant à assouplissant. Cependant, ramené aux cas de structures minces (généralement peu amorties), on constate que les modifications apportées par la prise en compte de valeurs d'amortissements réalistes, restent faibles [R13].

**4.2. Application aux coques sphériques.** Cette section résume des résultats obtenus dans [R8]. On considère le modèle de coque sphérique peu profonde, de rayon  $a$ , d'épaisseur  $h$  et de rayon de courbure  $R$ , avec un bord libre, présenté section 3.1 du chapitre 1. Le formalisme présenté ci-dessus permet de mener une étude paramétrique complète afin de déterminer la tendance de non-linéarité lorsque l'on fait varier le rapport d'aspect  $\kappa = \frac{a^4}{R^2 h^2}$ . Lorsque  $\kappa = 0$ , le rayon de courbure  $R$  est infini : les équations se résument à celles d'une plaque et le comportement est raidissant pour tous les modes. Diminuant  $R$ , et donc augmentant  $\kappa$ , les modes peuvent alors passer d'un comportement raidissant à assouplissant. Le calcul est mené en utilisant la formule (27). La formule développée (28) montre en outre que :

- Les seules résonances susceptibles de modifier le type de non-linéarité sont des résonances 2:1, *i.e.* lorsque la fréquence  $\omega_p$  du mode étudié vaut le double d'une fréquence propre d'un autre mode  $l$ .
- La formule fait intervenir tous les coefficients quadratiques  $g_{ij}^p$  qu'il faut a priori calculer, ce qui peut être coûteux. La procédure est alors grandement accélérée en constatant que :
  - (1) Seulement un petit nombre de coefficients  $g_{ij}^p$  sont non-nuls, car les modes  $p, i$ , et  $j$  impliqués doivent vérifier des relations de commensurabilité entre leurs nombres respectifs de diamètres nodaux (ces *règles de couplage* sont explicitées dans [R6]). Ceci réduit drastiquement le nombre de termes à retenir dans (28).
  - (2) Les coefficients  $g_{ij}^p$  dépendent très peu de  $\kappa$  [R6]. On peut donc à moindre frais les considérer constant sur des sous-intervalles de calcul.

La figure 1 montre le résultat obtenu pour le mode (3,0). Pour  $\kappa = 0$  on obtient bien une non-linéarité raidissante typique des plaques. Le comportement devient assouplissant pour  $\kappa = 49.69$ , où une résonance 2:1 entre le mode (0,1) et (3,0) a lieu. Ensuite le comportement est assouplissant et tend vers zéro (comportement neutre) pour les grandes valeurs de  $\kappa$ . Sur cette figure est aussi montré l'effet de la

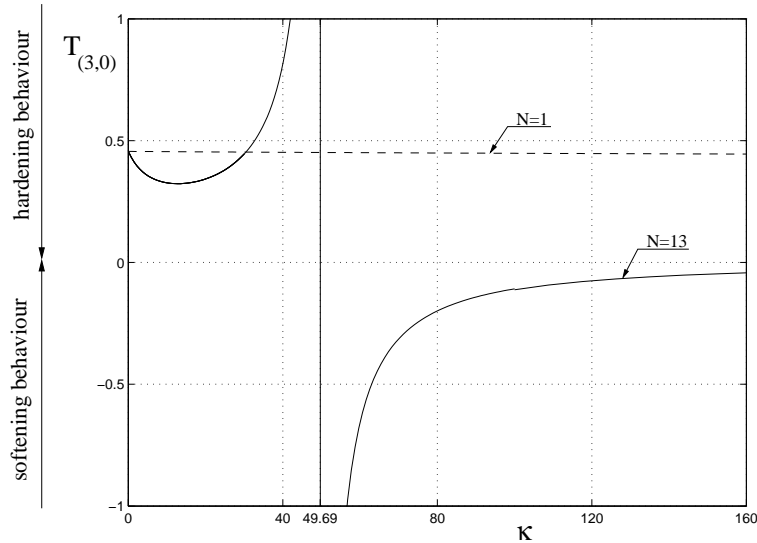


FIG. 1. Tendance de non-linéarité pour le mode (3,0) en fonction du rapport d'aspect  $\kappa$  pour une coque sphérique peu profonde. En pointillé : valeur prédite si l'on se restreint la dynamique au mode linéaire. Trait plein : valeur prédite en conservant 13 modes linéaires pour calculer le mode non linéaire.

troncature. La courbe en pointillé est obtenue en ne conservant qu'un mode linéaire dans la dynamique. La prise en compte des autres modes permet de révéler la courbure du sous-espace invariant et de donner la bonne tendance de non-linéarité. Ce résultat est générique de ceux obtenus pour les modes purement asymétriques, *i.e.* de la forme  $(k,0)$ . Ceux-ci ayant des fréquences propres ne dépendant quasiment pas du rapport d'aspect  $\kappa$  (cf. [R6] et figure 2 du chapitre 1), on trouve que le comportement change de nature uniquement lorsque les résonances internes 2:1 ont lieu. Un comportement différent est obtenu pour les modes axisymétriques et mixtes, dont les fréquences propres dépendent drastiquement de  $\kappa$ . La

figure 2 montre le résultat obtenu pour le mode (0,2), où l'on constate que la tendance de non-linéarité diminue fortement dès les petites valeurs de  $\kappa$  pour changer de signe en  $\kappa = 13.73$ , sans rencontrer de résonance 2:1. Celles-ci arrivent par la suite et se traduisent par de petites zones où le comportement redevient raidissant. La convergence est aussi montrée sur la figure 2. Les règles de couplage évoquées précédemment montrent ici que seuls les modes axisymétriques peuvent avoir une influence sur le type de non-linéarité d'un mode axisymétrique.

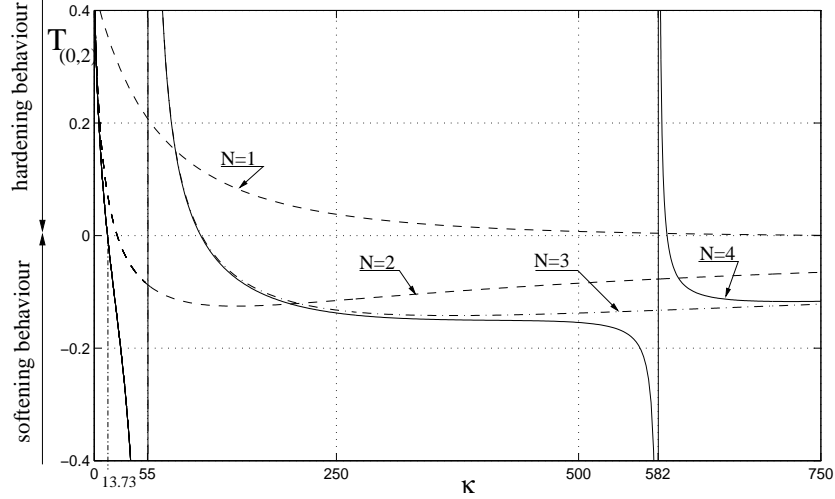


FIG. 2. Tendance de non-linéarité pour le mode (0,2) d'une coque sphérique en fonction de  $\kappa$  (trait plein). Les courbes en pointillées montrent la convergence de la solution lorsque l'on augmente le nombre de modes axisymétriques utilisés dans le calcul, respectivement : N=1, mode (0,2) uniquement ; N=2, modes (0,1) et (0,2) ; N=3, modes (0,1) à (0,3) ; N=4, modes (0,1) à (0,4). la solution convergée est calculée avec les 7 premiers modes axisymétriques, elle coïncide avec celle obtenue pour N=4.

### Effet de l'amortissement

La figure 3 montre l'effet de l'amortissement sur le type de non-linéarité du mode (0,1). Deux lois de variation de l'amortissement ont été considérées :

**cas (i):**  $\forall p = 1 \dots N, \xi_p = \xi / \omega_p$

**cas (ii):**  $\forall p = 1 \dots N, \xi_p = \xi$

Le cas (i) correspond à un amortissement modal indépendant de la fréquence, dont on augmente la valeur nominale  $\xi$  pour mesurer la variation de la tendance de non-linéarité. Le cas (ii) correspond à une variation de l'amortissement modal linéaire avec la fréquence. Dans les deux cas on observe qu'il faut arriver à des valeurs très grandes de l'amortissement pour observer des changements significatifs. Pour des structures métalliques, l'amortissement  $\xi$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ , au plus  $10^{-2}$  : notre prédiction montre que l'effet de l'amortissement sur le type de non-linéarité ne peut se faire ressentir que pour des valeurs beaucoup plus importantes (0.1 voire 0.3 pour avoir quelque chose de significatif). Une particularité du cas (ii) est qu'il ne gomme pas la discontinuité qui existe à la résonance 2:1, ceci apparait effectivement dans les petits dénominateurs obtenus analytiquement [R9,R13]. Cependant cela ne devrait pas avoir de conséquences au niveau expérimental. En effet, en présence d'une résonance 2:1, les solutions sont toujours couplées si bien que la solution 1 ddl n'existe pas, et parler de tendance de non-linéarité n'a plus de sens dans un petit intervalle autour de cette résonance.

## 5. Réduction de modèles de coque

Dans cette section on montre comment on peut utiliser le formalisme des MNLs afin d'effectuer des modèles d'ordre réduit performants pour des vibrations forcées harmoniques de coques minces. La

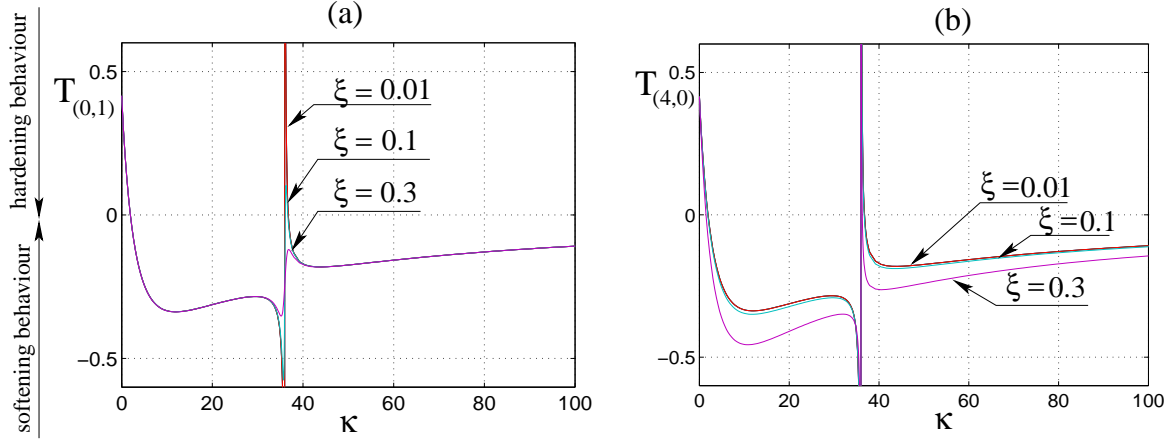


FIG. 3. Tendence de non-linéarité pour le mode (0,1) d'une coque sphérique en fonction du rapport d'aspect  $\kappa$ , et pour différentes valeurs de l'amortissement. (a) : amortissement correspondant au cas (i), avec les valeurs  $\xi = 0.01$  (en rouge), 0.1 (cyan) et 0.3 (violet). (b) : amortissement correspondant au cas (ii), avec les mêmes valeurs de  $\xi$ .

présentation reprend des résultats montrés dans [R9] et [R12]. Le cas des poutres a été traité dans [R5] et n'est pas repris ici. Dans ce document, nous ne reprenons que les deux modèles présentés chapitre 1, à savoir le panneau hyperbolique paraboloidé de la section 4.3, forcé au voisinage de son mode fondamental, et pour lequel un seul mode non linéaire permet de prédire la dynamique. Puis le cas de la coque circulaire cylindrique de la section 4.2, forcé au voisinage d'un mode asymétrique, caractérisé par une valeur propre dégénérée et l'occurrence de deux modes propres ayant la même fréquence (modes compagnons). Dans ce cas-là la dynamique forcée au voisinage d'un tel mode est plus complexe à cause de la résonance 1:1 entre les deux valeurs propres, si bien que le modèle minimal sera composé de deux MNLs.

Dans tout ce qui suit deux hypothèses fortes, relatives à la manière dont le modèle réduit est construit, viendront nuancer les résultats. Premièrement les MNLs sont calculés à l'aide d'un développement asymptotique d'ordre 3, si bien que l'on s'attend à des résultats qui peuvent se détériorer aux très grandes amplitudes. Deuxièmement le terme de forçage n'est pas inclus dans le calcul des MNLs. Nous utilisons les variétés du problème non-forcé, indépendantes du temps, afin de réduire une dynamique dépendante du temps. L'ajout de ce terme de forçage dans la procédure même du calcul des MNLs est réalisable avec le formalisme des formes normales, comme démontré dans [53]. Cependant, son effet principal est de rendre la variété invariante dépendante du temps. Les calculs numériques montrés dans [78, 81], tenant compte de cet effet, montre en effet que les oscillations de la variété sont très petites.

**5.1. Panneau à double courbure.** La coque étudiée ici est un panneau hyperbolique paraboloidé (panneau HP), déjà présenté en détail au chapitre précédent. Le panneau retenu pour les simulations numériques a les dimensions suivantes :  $a = b = 0.1$  m,  $R_x = -R_y = 1$  m, et épaisseur  $h = 1$  mm ; les propriétés matérielles sont : module d'Young  $E = 206.10^9$  Pa, masse volumique  $\rho = 7800$  kg.m<sup>-3</sup> et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La réponse de la coque à un forçage harmonique au voisinage de la première fréquence propre  $\omega_1$  est calculée numériquement. La convergence de la solution a été étudiée pour une amplitude d'excitation de 4.37 N appliquée au centre de la coque [7]. Il a été montré que 22 fonctions de base étaient nécessaires pour obtenir une solution convergée. Les fonctions de base retenues sont :  $\phi_{1,1}^{(w)}, \phi_{1,3}^{(w)}, \phi_{3,1}^{(w)}, \phi_{3,3}^{(w)}, \phi_{1,1}^{(u)}, \phi_{3,1}^{(u)}, \phi_{1,3}^{(u)}, \phi_{3,3}^{(u)}, \phi_{1,5}^{(u)}, \phi_{5,1}^{(u)}, \phi_{3,5}^{(u)}, \phi_{5,3}^{(u)}, \phi_{5,5}^{(u)}, \phi_{1,1}^{(v)}, \phi_{3,1}^{(v)}, \phi_{1,3}^{(v)}, \phi_{3,3}^{(v)}, \phi_{1,5}^{(v)}, \phi_{5,1}^{(v)}, \phi_{3,5}^{(v)}, \phi_{5,3}^{(v)}, \phi_{5,5}^{(v)}$ .

La courbe de réponse en fréquence pour les six coordonnées principales est montrée figure 4. Elle est calculée numériquement par une méthode de continuation par pseudo-longueurs d'arc implémentée dans le logiciel AUTO [47]. Cette solution de référence à 22 degrés de liberté est comparée à deux

solutions réduites ne comportant qu'un seul ddl, obtenues respectivement en projetant la dynamique sur le premier mode linéaire (solution LNM) et sur le premier mode non linéaire (NNM sur la figure 4). La solution LNM reproduit le caractère raidissant de la solution de référence mais les erreurs commises sur les amplitudes sont beaucoup trop grandes pour qu'elle soit acceptable. A contrario, la réduction à un seul mode non linéaire donne un résultat très proche de la référence, avec une légère surestimation du caractère raidissant.

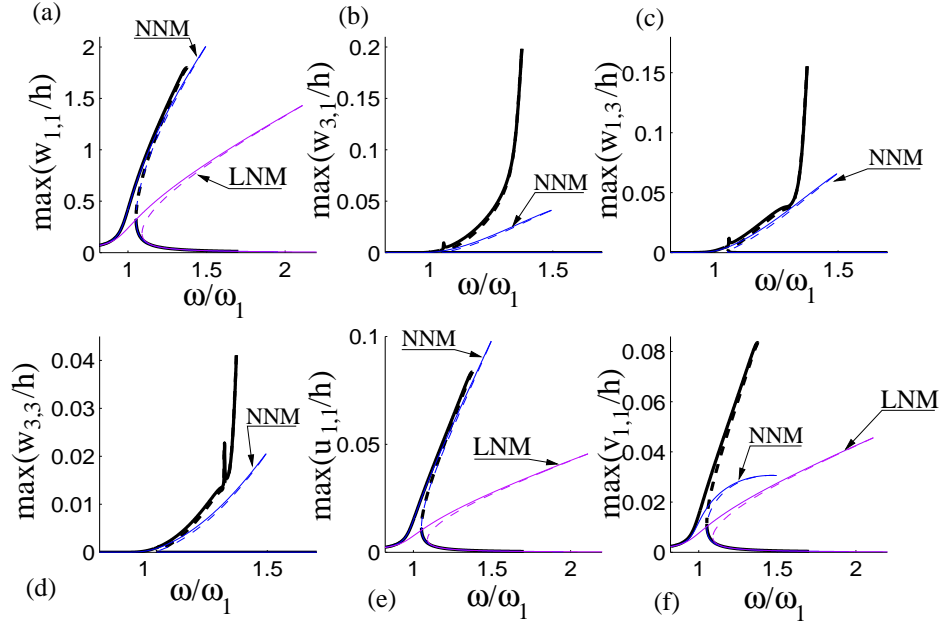


FIG. 4. Amplitudes maximales de la réponse des 6 coordonnées généralisées principales en fonction de la fréquence d'excitation, pour une amplitude de forçage de 4.37 N. Solution de référence (noir) ; Modèle réduit à un mode linéaire (LNM) et à un mode non linéaire (NNM). Coordonnées : (a) :  $w_{1,1}$ . (b) :  $w_{3,1}$ . (c) :  $w_{1,3}$ . (d) :  $w_{3,3}$ . (e) :  $u_{1,1}$ . (f) :  $v_{1,1}$ .

Il est à noter que l'énergie vibratoire est essentiellement concentré dans la coordonnée  $w_{1,1}$ , figure 4(a), les réponses des autres termes étant d'un ordre inférieur. Nous voyons cependant apparaître un des points forts de la méthode MNL : grâce au changement de variables non linéaire, on obtient une réponse sur tous les modes et donc toutes les coordonnées généralisées, et pas uniquement sur le mode directement excité, alors qu'on ne simule qu'une seule équation d'oscillateur. Pour les autres coordonnées montrées sur la figure 4,  $w_{3,1}$ ,  $w_{1,3}$ ,  $w_{3,3}$ ,  $u_{1,1}$  et  $v_{1,1}$ , la solution MNL donne une bonne approximation de leurs valeurs, ce qui confirme que la courbure de la variété invariante est ici seule responsable, via les termes non-résonnants, des couplages faibles observés ici entre coordonnées généralisées. Pour le modèle réduit ne comportant qu'un seul mode linéaire, on ne retrouve de l'énergie que sur les 3 coordonnées  $w_{1,1}$ ,  $u_{1,1}$  et  $v_{1,1}$ , qui sont linéairement couplées afin de donner le premier sous-espace propre linéaire.

La figure 5 montre les réponses temporelles obtenues sur la branche du haut, pour une fréquence d'excitation  $\omega = 1.3\omega_1$ , permettant de mieux apprécier la qualité du modèle réduit sur un signal de vibration. Alors qu'un seul oscillateur est simulé, le changement de variables permet de recouvrer des formes d'ondes complexes et différentes, très proches de la simulation de référence. A contrario, on mesure mieux avec cette représentation que le modèle réduit à un MNL donne des résultats qui ne sont pas acceptables.

Les excellents résultats donnés par la réduction à un mode non linéaire proviennent du fait que la dynamique est finalement assez simple dans ce cas-là, l'essentiel de la complexité résidant dans la courbure de la variété invariante qui est captée par le mode non linéaire. On aurait pu penser qu'en



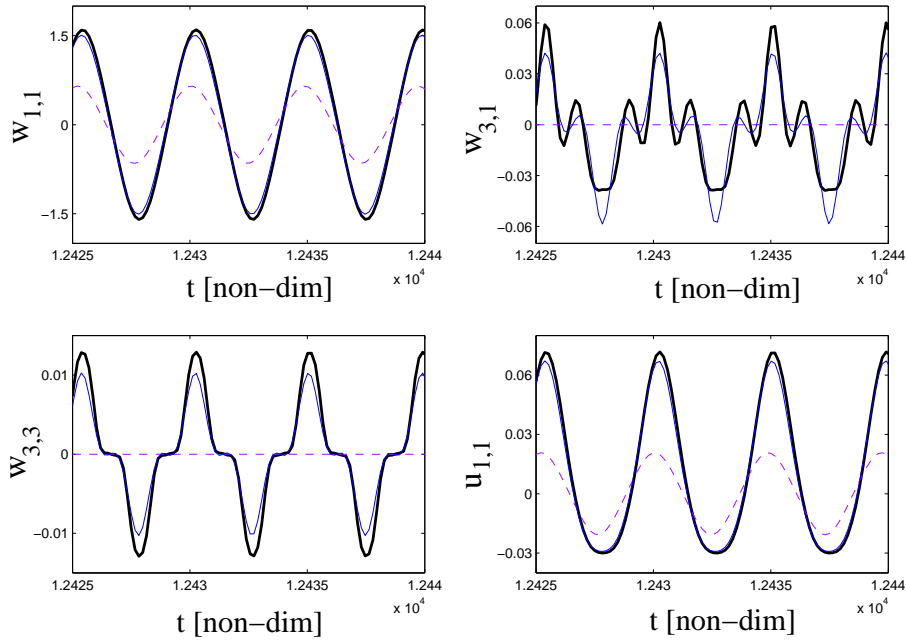


FIG. 5. Réponses temporelles de 4 coordonnées généralisées pour le panneau HP, pour une fréquence d'excitation  $\omega = 1.3\omega_1$ , d'amplitude  $\tilde{f} = 4.37$  N. La solution de référence (22 ddls, courbe noire épaisse) est comparée à la réduction à un MNL (courbe bleue fine) et un mode linéaire (courbe pointillée magenta).

augmentant le nombre de modes linéaires on obtiendrait une convergence assez rapide, or ce n'est pas du tout le cas : l'étude de convergence en fonction du nombre de modes linéaires a été menée dans [R12] et montre qu'il faut 15 modes linéaires pour retrouver la solution de référence. On est donc dans un cas où la courbure de la variété est prononcée et relie un grand nombre de modes linéaires, si bien qu'une fois cette complexité géométrique calculée dans le changement de variables non linéaire, il ne reste plus qu'à simuler une dynamique simple à un seul ddl. Il est enfin à noter que dans ce cas de vibrations forcées harmoniques, augmenter le nombre de MNLs dans la troncature n'améliore pas le résultat car la solution de référence est essentiellement contenue dans la variété invariante. Ce qui a été observée ici numériquement : des coordonnées de MNLs ajoutées avaient une amplitude nulle et la solution n'était pas meilleure que celle obtenue avec un seul MNL. Ainsi le modèle réduit proposé ici est bien le meilleur possible puisqu'il est directement convergé et très proche de la solution. Les différences que l'on observe sont dues uniquement aux deux approximations qui ont été faites pour calculer le modèle réduit, à savoir :

- le développement asymptotique tronqué à l'ordre trois.
- le calcul de variété invariante indépendante du temps.

Pour illustrer ce propos, on montre figure 6 les courbes de réponse en fréquence obtenues pour une valeur inférieure de l'amplitude du forçage ( $\tilde{f} = 2.84$  N) et une valeur supérieure ( $\tilde{f} = 6.62$  N). Comme attendu, les résultats sont quasiment parfaits pour 2.84 N, car les deux approximations mentionnées donnent ici lieu à des erreurs négligeables. Par contre, aux plus grandes amplitudes, la troncature au MNL calculé à l'ordre 3 donne de nouveau des résultats qui se détériorent. Ces tests numériques permettent d'évaluer la limite de validité du modèle réduit à des amplitudes de vibration de l'ordre de  $1.5h$ .

Les gains en temps de calcul ont été évalués en mesurant le temps nécessaire pour faire une courbe de réponse en fréquence avec le logiciel AUTO. Pour le modèle de référence (22ddls), il a fallu 2 heures pour parcourir la courbe montrée figure 4<sup>8</sup>. Pour le modèle réduit composé d'un seul NNM, il faut de l'ordre de

<sup>8</sup>Les temps de simulation ont été mesurés sur un processeur Pentium 4 cadencé à 2.4GHz (simulations réalisées au début de l'année 2007).

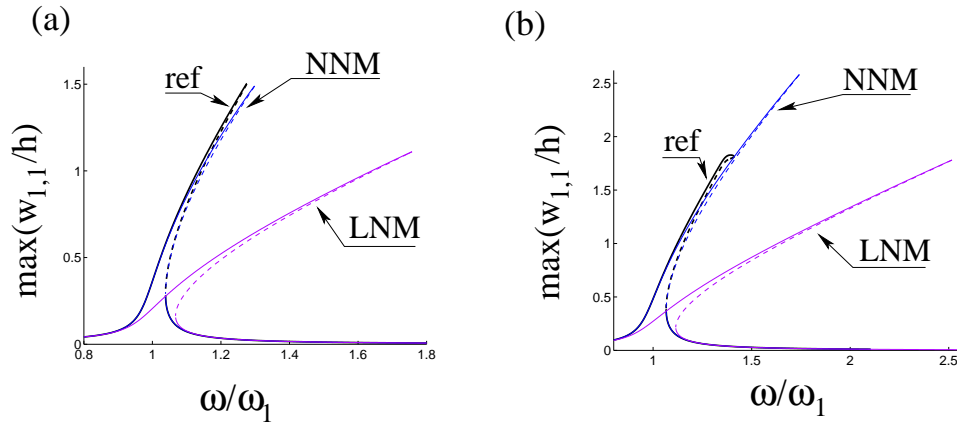


FIG. 6. Courbes de réponse en fréquence pour (a) :  $\tilde{f} = 2.84$  N, et (b) :  $\tilde{f} = 6.62$  N. La solution de référence (22 ddls, noire) est comparée aux modèles réduits composés d'un mode linéaire (LNM) et un mode non linéaire (NNM).

30 secondes pour parcourir la courbe de réponse en fréquence. A ce temps on doit ajouter le temps passé dans les changements de variables, 2 minutes aller/2 minutes retour, soit un temps total de simulation de 4 minutes 30 ; soit un temps de calcul divisé par 26. Dans [R12], 4 cas de coques différentes sont testés, montrant à chaque fois un gain en temps de calcul très appréciable, de l'ordre de 25. En conclusion sur cet exemple on peut dire que le modèle réduit MNL est le meilleur possible, puisque celui qui se situe au plus proche de la véritable solution, comme le montre le fait qu'ajouter des MNLs supplémentaires ne rapproche pas de la solution de référence. Pour corriger les erreurs d'amplitude obtenues à partir du forçage de 4.37 N, la seule solution est de lever les deux hypothèses utilisées ici pour fabriquer le modèle réduit. Cependant il est alors loin d'être acquis que les gains en temps de calcul seront aussi substantiels. Pousser le développement à l'ordre 5 augmenterait considérablement le temps passé dans les changements de variables non linéaires, qui prennent déjà la plus grande partie du temps de calcul pour les simulations présentées à l'ordre 3. Enfin les méthodes numériques existantes dans la littérature (ce qui serait évidemment la bonne solution pour ne plus avoir le problème du développement asymptotique) sont très coûteuses [80, 81, 135].

**5.2. Coque circulaire cylindrique.** Dans cette section nous reprenons la coque circulaire cylindrique, de longueur  $a$ , de rayon  $R$ , simplement supportée aux extrémités, avec cinématique de Flugge-Lur'e-Byrne, présentée en section 4.2. Les caractéristiques de la coque utilisée pour les simulations sont :  $a = 520$  mm,  $R = 149.4$  mm,  $h = 0.519$  mm,  $E = 1.98 \times 10^{11}$  Pa,  $\rho = 7800$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\nu = 0.3$ ; elle est forcée sinusoidalement au voisinage de la fréquence de résonance du mode  $(m, n) = (1, 5)$ . Celui-ci étant asymétrique, la valeur propre est double et il y a deux modes propres ayant la même fréquence. Ces modes compagnons sont notés  $(1, 5, c)$  et  $(1, 5, s)$  par la suite, le troisième indice faisant référence au fait que la coordonnée angulaire est soit en cosinus, soit en sinus. L'excitation est située sur un nœud du mode  $(1, 5, s)$ , qui ne se trouve donc pas directement excité par le forçage extérieur. Par contre, étant en résonance 1:1 avec la configuration  $(1, 5, c)$ , il se trouvera rapidement avoir de l'énergie par couplage non linéaire.

La solution de référence est composée de 16 degrés de liberté. Elle est comparée figure 7 à une solution composée de deux modes non linéaires, pour une amplitude de forçage de 2 N. Une comparaison avec un modèle réduit composé de modes linéaires n'a pas été possible ici : tous les modèles réduits testés avec  $N_{lin}$  modes inférieurs à 16 donnaient un comportement raidissant ; seule la troncature à 16 modes linéaires (*i.e.* ne présentant aucune réduction par rapport à la solution de référence) prédisait un comportement assouplissant. Le modèle réduit composé de deux MNLs est le modèle minimal que l'on puisse espérer à cause de la résonance 1:1, qui implique que des solutions couplées vont avoir lieu dans un sous-espace de dimension 5.

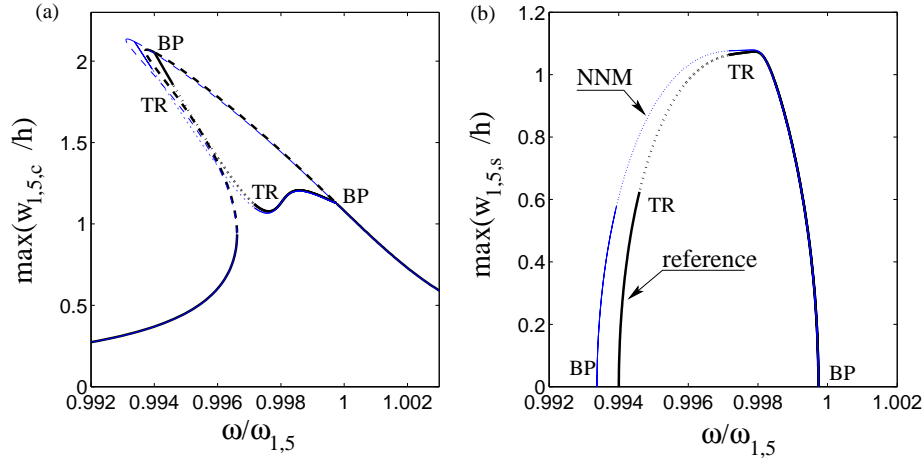


FIG. 7. Courbes de réponse en fréquences pour la coque circulaire cylindrique, en fonction de la fréquence d’excitation, pour une amplitude de 2 N. La solution de référence (trait épais noir) est comparée à un modèle réduit composé de 2 MNLs (trait fin bleu). (a) : Amplitude maximale du mode directement excité  $w_{(1,5,c)}$ . (b) : Amplitude maximale du mode compagnon  $w_{(1,5,s)}$ . BP : point de bifurcation fourche menant à la solution couplée. TR : Bifurcation Tore (Neimark-Sacker) de la solution couplée menant au régime quasipériodique.

La solution de référence est composée de deux branches. La première est caractérisée par une participation nulle du mode  $(1, 5, s)$  : seul le mode directement excité est présent dans la réponse, qui est de nature assouplissante. Sur cette première branche se trouvent deux points de bifurcation fourche (BP sur la figure 7) desquels émane une seconde branche de solutions couplées où le mode  $(1, 5, s)$  a une amplitude non-nulle. Sur cette seconde branche, deux autres points de bifurcation sont présents, où une bifurcation de Neimark-Sacker (TR sur la figure 7) mène à un comportement quasipériodique dans la réponse.

Le modèle réduit composé de deux MNLs reproduit parfaitement ce diagramme de bifurcation, avec une très légère surestimation du caractère assouplissant. En augmentant l’amplitude du forçage, on a pu évaluer le modèle réduit comme étant fiable jusqu’à des amplitudes de vibration de l’ordre de 3 fois l’épaisseur. Le gain en temps de calcul est ici d’un facteur 32 [R12].

## 6. Comparaison avec la méthode POD

Dans cette section nous allons comparer la méthode de réduction par MNL à la méthode POD. Le modèle choisi pour effectuer cette comparaison est une coque circulaire cylindrique remplie d’eau, forcée harmoniquement au voisinage du mode  $(1, 5)$ . La cinématique est de Donnell avec l’hypothèse de coque peu profonde, si bien que l’inertie membranaire est négligée (modèle présenté au chapitre 1, section 3.2). Nous reprenons ici des résultats publiés dans [R10].

La méthode POD est extrêmement utilisée dans tous les domaines de la science pour sa rapidité et sa facilité d’implémentation, que ce soit en statistique [86, 95, 103] (où elle est plus couramment appelée méthode de Karhunen-Loève), en science atmosphérique [104] ou en analyse d’épisodes climatiques précis comme l’ENSO (El Nino Southern Oscillation) [25] et plus généralement en océanographie et météorologie (où la méthode est appelée EOF pour Empirical Orthogonal Functions), en Analyse de données et traitement du signal (où la méthode est équivalente à la PCA, pour Principal Component Analysis)[83], enfin dans les domaines biomédical [26] et biomécanique [136]. En mécanique, les premières applications ont eu lieu dans le domaine de la mécanique des fluides et plus particulièrement de

la turbulence pour l'extraction de structures cohérentes [29, 70]. Sont désormais traités avec cette méthode des cas d'interaction jet/tourbillon [108], d'écoulements derrière une cavité [131] ou encore de convection de Bénard-Marangoni [20]. De nombreuses extensions existent, en particulier le cas de la BOD (Biorthogonal Decomposition) où les variables temps et espaces sont simultanément traitées [73].

En dynamique des structures, la méthode POD fut beaucoup employée à partir de la fin des années 1990 [24, 57, 58, 61, 90, 96, 166]. L'article [91] propose une vue d'ensemble des travaux existants. La question importante du lien entre les modes POD et les modes linéaires a été traitée dans [57, 102], mettant en évidence que les modes POD convergent vers les modes linéaires lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. Par conséquent, l'utilisation des modes POD est parfois sans grand intérêt par rapport aux modes linéaires, comme montré dans [147]. Pour le cas des structures soumises à des forçages aléatoires, citons aussi [27, 59]. Pour ce qui est des modes POD utilisés véritablement comme base réduite, citons [15, 16, 63] pour le cas des coques circulaires cylindriques, [61] pour le cas des élastiques, enfin les articles [97, 100] et les références qui s'y trouvent sont un bon point d'entrée pour la méthode POD et d'autres méthodes de réduction de modèles pour les systèmes mécaniques Lagrangiens et discrétisés par éléments finis.

Avant même de montrer des résultats numériques de la comparaison entre la méthode POD et les MNLs, les remarques suivantes sont importantes afin de bien comprendre ce qui distingue les deux méthodes, et ce que l'on est en droit d'en attendre :

- La méthode POD est essentiellement linéaire, puisqu'il s'agit de trouver les hyperplans de l'espace des phases les plus proches des données que l'on fournit pour construire le modèle. Cela peut être vu comme un avantage puisque la construction de la base réduite est relativement simple (essentiellement il s'agit de résoudre un problème aux valeurs propres), mais aussi comme un inconvénient : si la structure de données présente un nuage de points courbés dans l'espace des phases, des hyperplans ne seront pas adaptés pour bien capturer l'information. La méthode MNL pallie ce problème en proposant des sous-variétés courbes de l'espace des phases : c'est une méthode essentiellement non linéaire.
- la méthode POD est globale au sens où elle décompose l'espace des phases complet à l'aide d'une base orthogonale adaptée. A contrario la construction des MNLs repose sur une théorie locale, valable uniquement au voisinage d'un point fixe.
- Les deux méthodes diffèrent par la manière dont le modèle réduit est construit. Alors que la méthode POD a besoin d'une série temporelle de données afin de construire les axes POD, les caractéristiques du spectre de l'opérateur linéaire sont suffisantes pour construire les MNLs. Ceci peut être vu comme un avantage dans le contexte de modèles prédictifs où l'on travaille sur des modèles mathématiques, et où l'on souhaite se passer d'une étape supplémentaire consistant à calculer une réponse du modèle de référence. Cependant, dans les cas expérimentaux ou dans des problématiques de contrôle où l'on n'a pas de modèles, cela constitue bien évidemment un avantage pour la méthode POD.

La première comparaison est montrée figure 8, pour une coque circulaire cylindrique remplie d'eau, forcée au voisinage de la fréquence propre du mode  $(1, 5, c)$ . La description détaillée des procédures utilisées pour le modèle POD sont décrites dans [15]. Les points notés  $b$  et  $c$  sur la courbe de référence ont été utilisés pour construire les bases réduites POD. Le point  $b$  se trouve juste avant la bifurcation de Neimarck-Sacker, la réponse  $y$  est périodique ; le point  $c$  se trouve juste après, la solution de référence est quasipériodique. Il est à noter que l'utilisation d'une série temporelle au point  $b$  n'a jamais donné de modèle POD satisfaisant [15]. La réponse quasipériodique au point  $c$  a permis quant à elle de fournir un modèle POD correct, à la condition de ne pas oublier la symétrie de révolution qui permet d'avoir des ondes progressives dans deux directions opposées [15], information qu'il faut rajouter a posteriori pour que le modèle réduit recouvre les symétries du problème original.

Les réponses en fréquence montrées figure 8, obtenues pour un forçage extérieur d'amplitude  $3 N$ , sont coincidentes avec la solution de référence, les deux modèles réduits rendant bien compte du diagramme de bifurcation. Il est cependant à noter que seuls 2 MNLs sont utilisés, alors qu'il est nécessaire

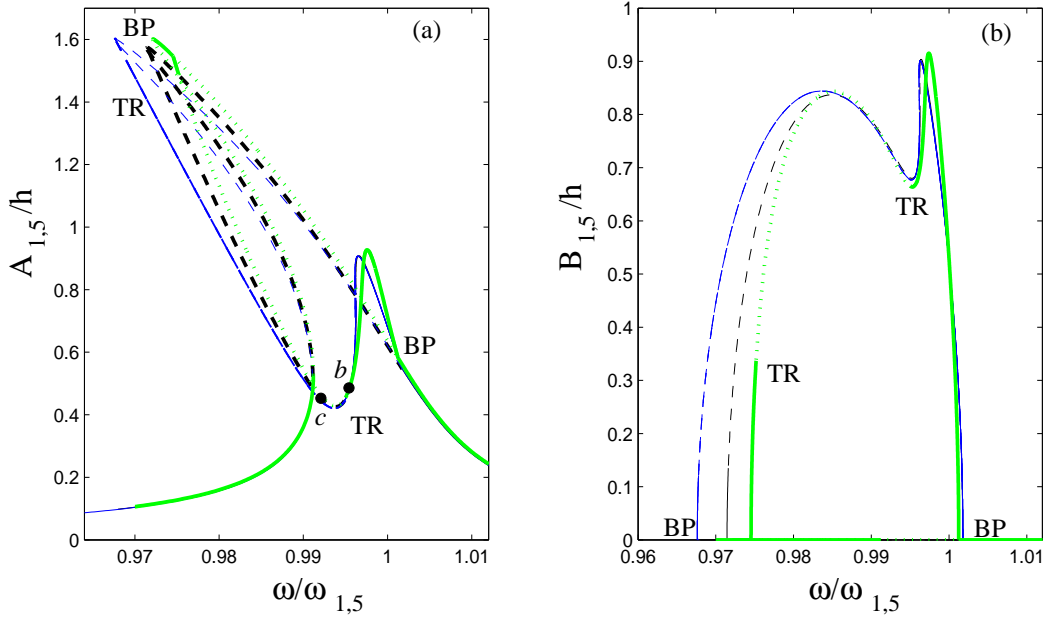


FIG. 8. Réponse en fréquence d'une coque circulaire cylindrique remplie d'eau au voisinage de la fréquence propre du mode  $(1, 5, c)$ . Solution de référence (16 ddls, courbe noire), réduction MNL (2 ddls, courbe bleue) et réduction POD (3 modes PODS, courbe verte). (a) : maximum du déplacement de la coordonnée modale  $A_{1,5}$  du mode  $(1, 5, c)$ . (b) : coordonnée modale  $B_{1,5}$  du mode  $(1, 5, s)$ .

d'avoir 3 modes POD pour retrouver le diagramme de bifurcation correct. La solution ne contenant que deux modes POD manque systématiquement le point de bifurcation fourche si bien qu'il ne prédit jamais de solutions couplées.

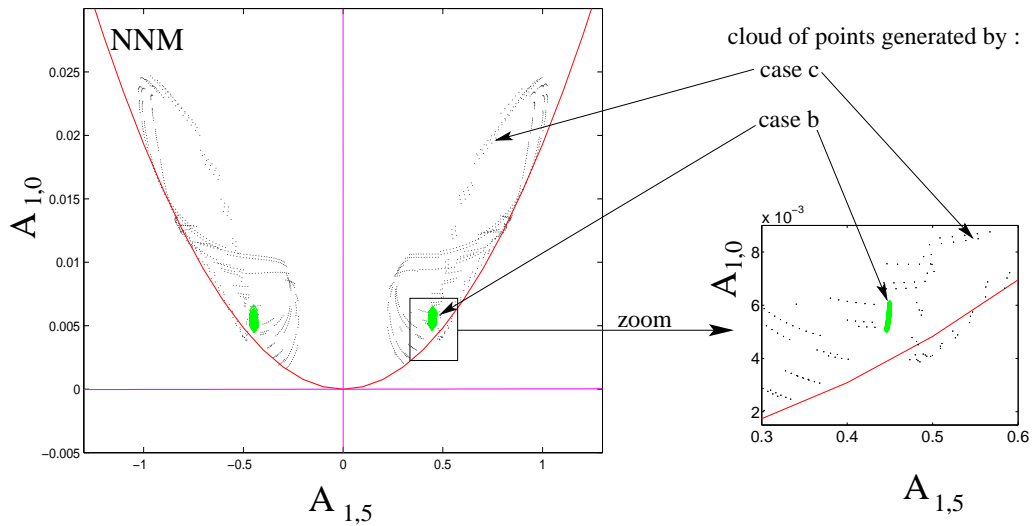


FIG. 9. Section de Poincaré, plan de coupe  $(A_{(1,5)}, A_{(1,0)})$ . Nuages de points : section avec les orbites périodiques et quasipériodiques calculées aux point  $b$  et  $c$  de la figure 8. Axes verticaux et horizontaux : axes POD. Courbe NNM : section de la variété invariante correspondant au mode non linéaire issu de  $(1, 5, c)$ .

Une interprétation géométrique permet de comprendre pourquoi ce troisième mode POD est nécessaire alors que seuls deux MNLs suffisent. La figure 9 montre une section de Poincaré dans l'espace des phases complet, qui est de dimension 33 (la solution de référence est à 16 ddls, soit 32 coordonnées généralisées puisqu'il compte une paire déplacement/vitesse par ddl, et il faut ajouter le terme de forçage pour rendre le système dynamique autonome). La section de Poincaré est effectuée dans le plan  $(A_{(1,5)}, A_{(1,0)})^9$ , pour mettre en exergue le rôle joué par le premier mode axisymétrique. Les nuages de points sont donnés par les solutions de référence aux points  $b$  et  $c$ . On comprend déjà mieux pourquoi la solution quasipériodique permet de trouver plus facilement les axes POD, car elle parcourt un sous-espace plus grand de l'espace des phases, ce gain d'information permettant d'avoir beaucoup plus de précisions sur le calcul des modes POD. Cet argument a déjà été employé dans [16, 89] afin de souligner que des réponses chaotiques sont a priori de bons candidats pour construire des bases POD.

Les axes droits de la figure 9 sont les hyperplans donnés par la méthode POD. Les deux premiers hyperplans donnés par la méthode POD sont respectivement très proches des modes linéaires  $(1, 5, c)$  et  $(1, 5, s)$  (celui-ci n'étant pas reporté sur la coupe). Le troisième hyperplan, contenant encore suffisamment d'énergie afin d'être indispensable, est quant à lui proche du mode linéaire axisymétrique  $(1, 0)$  (axe vertical de la figure 9)<sup>10</sup>. Si l'on se restreint aux deux premiers modes POD, toute l'information contenue selon  $A_{(1,0)}$  est oubliée, et le modèle n'est pas correct. Cette remarque est consistante avec les travaux d'Amabili *et al.* [10, 13, 14] soulignant l'importance des modes axisymétriques dans les troncatures de modèles de coques circulaires, ainsi que les résultats que nous avons obtenus sur les coques sphériques [R6,R8]. A contrario, les variétés MNLs passent exactement à proximité du nuage de points. Le couplage entre les modes asymétriques et axisymétriques est ainsi complètement inclus dans la géométrie de la variété, si bien que seuls les deux modes non linéaires qui sont les continuations des modes linéaires  $(1, 5, c)$  et  $(1, 5, s)$  sont nécessaires pour fournir le meilleur modèle réduit possible.

Des courbes de réponses en fréquences obtenues pour une amplitude de forçage plus grande (8 N) sont montrées dans [R10], où les mêmes modèles réduits sont comparés (deux MNLs et 3 PODs construits avec la réponse quasipériodique à 3 N). La méthode POD prédit des bonnes amplitudes, par contre les points de bifurcations sont significativement décalés par rapport à la solution de référence. Le modèle MNL donne quant à lui des points de bifurcation bien placés mais surestime le caractère assouplissant du mode excité. Ces limitations, une fois de plus, sont dues uniquement aux deux approximations faites pour calculer les MNLs : calcul asymptotique à l'ordre 3 et variétés indépendantes du temps pour un problème forcé.

Enfin des diagrammes de transition vers le chaos, obtenus par section stroboscopique de Poincaré sur une simulation à fréquence d'excitation fixe et amplitude du forçage croissant, sont montrés dans [R10]. Un modèle à 5 POD, dont la construction est détaillée dans [16] permet de capturer les première bifurcations, pour des amplitudes de forçage allant jusqu'à 600 N. A contrario, le modèle à 2 MNLs donne des solutions divergentes pour une amplitude de 240 N : les limites de validité du développement asymptotique étant atteintes. Ce sont là les conséquences de la nature locale et globale et modèles réduits, soulignée en introduction.

---

<sup>9</sup>Conformément aux notations du chapitre 1, section 3.2., la coordonnée généralisée du mode  $(1, 5, c)$  est notée  $A_{(1,5)}$ , celle du mode  $(1, 5, s)$ ,  $B_{(1,5)}$ .

<sup>10</sup>Les valeurs précises des positions des axes sont données dans [15] et [R10].



## Transition vers le chaos

### 1. Observations expérimentales

Lorsque l'on excite une structure mince avec une force sinusoïdale d'intensité croissante, on observe génériquement deux bifurcations, menant d'un régime périodique à un régime chaotique, caractérisé par un spectre de vibration large bande. Ces expériences ont été à la base des analyses menées sur les instruments de percussion de type cymbales et gongs, lors de ma thèse [T1] et celle d'Olivier Thomas [156]. Ce qui nous guidait alors était que le son produit par une cymbale lors du régime forcé chaotique est très proche de celui obtenu en mode de jeu normal, lorsque l'on excite la cymbale par un coup de baguette. Ayant en main une expérience très contrôlée et parfaitement reproductible, où l'énergie n'est envoyée qu'à une seule fréquence et dont on contrôle précisément l'amplitude, le but était alors de retrouver les caractéristiques de la vibration libre à partir des analyses des expériences en forcé et de la description fine des transitions observées. Ceci nous a amené à étudier précisément chacune des bifurcations, ainsi que les régimes observés.

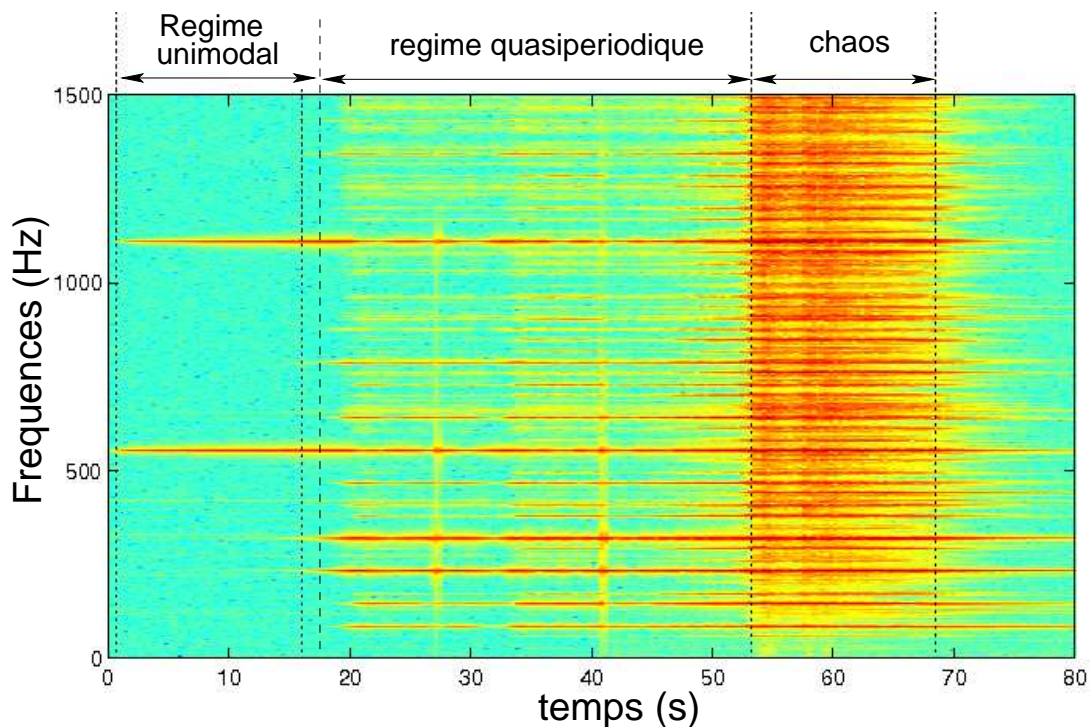


FIG. 1. Diagramme temps-fréquence d'une expérience de vibrations forcées sur un gong excité à 556 Hz avec une amplitude croissante au cours du temps. On distingue trois régimes distincts, séparés par des bifurcations.

La figure 1 montre le spectrogramme obtenu lors d'une expérience typique sur un gong, excité à  $F_{exc} = 556$  Hz. Le premier régime se caractérise par une vibration unimodale, faiblement non linéaire.



En effet, la fréquence d'excitation choisie est généralement celle d'un mode propre afin d'assurer la meilleure injection d'énergie au système pour lui faire atteindre des grandes amplitudes de vibration pour des valeurs de forces raisonnables. Avant la première bifurcation, seul le mode excité participe à la vibration, et le spectre montre la fréquence d'excitation ainsi que les premiers harmoniques, signe que la non-linéarité géométrique est déjà présente. La première bifurcation se caractérise par l'apparition de nombreux sous-harmoniques, le spectre restant formé de raies distinctes, signe d'un régime quasi-périodique. De nombreuses analyses effectuées sur différentes cymbales et gongs, nous ont montré que les sous-harmoniques apparaissant pouvaient toujours être reliés à des fréquences propres. De plus, des relations de commensurabilité, du type  $f_i + f_j = F_{exc}$  sont vérifiées entre des couples de sous-harmoniques  $(f_i, f_j)$  apparaissant dans le spectre. Cette relation est une relation de résonance interne d'ordre 2, dont le cas général a été vu lors du chapitre précédent. Ainsi cette première bifurcation a pu être analysée comme un *couplage inter-modal par résonance interne* : les modes propres du système dont les fréquences propres vérifient ces relations de résonance interne sont susceptibles de s'échanger de l'énergie [R7]. Le couplage devient effectif à partir d'un certain niveau d'excitation, lorsque la vibration unimodale devient instable au profit de la solution couplée, stable. Enfin, pour des amplitudes de forçage encore plus grande, le régime quasi-périodique devient instable au profit d'un régime chaotique, où le spectre de vibration devient véritablement large bande. Les exposants de Lyapunov ont été calculés sur des séries temporelles de mesures, montrant effectivement la présence d'un exposant positif [R1].

L'analyse de la première bifurcation a été l'objet de plusieurs études dont nous reprendrons les résultats principaux à la section suivante. Le cas le plus simple de la résonance 1:1<sup>1</sup> est étudié théoriquement et expérimentalement dans le cas des plaques, puis le cas de la résonance 1:1:2 sera traité pour le cas des coques sphériques.

## 2. Couplages modaux et résonances internes

**2.1. Résonance 1:1.** Le cas de la résonance 1:1 a fait l'objet de nombreuses publications, depuis les études de Tobias sur des disques en rotation à la fin des années 1950 [159, 160, 165], qui donnaient les résultats essentiels, sans tenir compte de l'amortissement. La résonance 1:1 apparaît aussi pour les géométries rectangulaires : pour les membranes [170], et pour les plaques excitées paramétriquement, où les études de Yang et Sethna [168, 169], et Chang et al. [40], donnent un tableau complet (bifurcations locales et globales). Revenant au cas des disques en rotation, Raman et Mote ont donné une version plus actuelle des résultats de Tobias, avec bifurcations globales et expériences [139, 140]. Pour le cas des plaques circulaires, les résultats de Sridhar et Nayfeh ont longtemps fait référence [67, 153, 154], jusqu'à ce qu'une erreur dans la condition de solvabilité soit corrigée simultanément et indépendamment par Yeo et Lee [172] et notre étude [R2]. Depuis 2002, de nouvelles contributions traitent encore le cas de la résonance 1:1, par exemple [3] pour les coques peu profondes.

Nos études [R2,R3] sur le sujet donnent une approche complète du problème, avec les versants théoriques et expérimentaux, l'étude des variations des paramètres sensibles (comme l'amortissement, les désaccords entre fréquences propres dus à des imperfections) sur les zones d'instabilité et les réponses couplées. La forme normale de la résonance 1:1, qui gouverne la dynamique sur la variété invariante, s'écrit :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon [\Gamma_1 q_1^3 + C_1 q_1 q_2^2 - 2\mu \dot{q}_1 + Q_1 \cos \Omega t], \quad (30a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon [\Gamma_2 q_2^3 + C_2 q_2 q_1^2 - 2\mu \dot{q}_2 + Q_2 \cos \Omega t], \quad (30b)$$

où les fréquences propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont proches, et proches de la fréquence d'excitation  $\Omega$ . On introduit les paramètres de désaccord  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  selon :  $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ , et  $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2$ . La solution est cherchée à l'aide de la méthode des échelles multiples [120, 123], c'est donc une solution perturbative au premier

---

<sup>1</sup>Une résonance 1:1 existe lorsque deux modes propres se trouvent avoir des fréquences propres égales. Pour les plaques et les coques circulaires, le cas est extrêmement fréquent puisque tous les modes asymétriques, étant dégénérés, présentent une telle résonance.

ordre que l'on va exhiber. Les amplitudes modales  $q_1$  et  $q_2$  sont développées selon :

$$q_1(t) = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + c.c. + O(\varepsilon), \quad (31a)$$

$$q_2(t) = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + c.c. + O(\varepsilon), \quad (31b)$$

où  $T_0 = t$  est l'échelle de temps rapide et  $T_1 = \varepsilon t$  l'échelle de temps lente,  $A_1(T_1)$  et  $A_2(T_1)$  sont les amplitudes complexes inconnues dont la dépendance en temps (modulation d'amplitude) est donnée par les conditions de solvabilité (la notation *c.c.* indique "complexe conjugué"). Réécrivant les amplitudes complexes sous la forme  $A_1(T_1) = a_1(T_1) \exp i(\sigma_2 T_1 - \gamma_1(T_1))$  et  $A_2(T_1) = a_2(T_1) \exp i((\sigma_2 - \sigma_1)T_1 - \gamma_2(T_1))$ , on aboutit à un système dynamique de dimension 4, à l'échelle de temps  $T_1$ , dont les solutions donnent l'évolution temporelle de la modulation d'amplitude. Le cas particulier où  $Q_2 = 0$  a été plus particulièrement étudié afin de mettre en évidence le transfert d'énergie via les termes non linéaires. L'étude complète du système dynamique, des points fixes et de leur stabilité est menée en détail dans [R2]. En particulier, la zone d'instabilité pour la solution non-couplée (*i.e.* tel que  $a_1 \neq 0$  et  $a_2 = 0$ ) s'écrit analytiquement :

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{C_2 a_1^2}{\omega_2} \pm \sqrt{\frac{C_2^2 a_1^4}{4\omega_2^2} - \mu^2}. \quad (32)$$

A l'intérieur de cette zone, les solutions couplées peuvent exister. La figure 2 montre cette zone d'instabilité, ainsi que les solutions couplées qui se développent dès que la solution non-couplée entre dans la région.

L'étude expérimentale [R3] confirme toutes les caractéristiques des solutions trouvées théoriquement. En particulier la solution couplée fait apparaître une onde progressive sur la plaque qui a été observée. Le cas d'un forçage  $Q_2$  non-nul a lui aussi été étudié, montrant l'existence d'une seconde branche de solutions couplées, dont les amplitudes sont similaires à celles montrées figure 2, mais en opposition de phase par rapport à la première branche. Cette solution nouvelle a elle aussi été observée en perturbant la vibration (en tapant sur la plaque) lorsque le régime couplé était obtenu : on passait ainsi d'une solution en phase à la seconde branche couplée en opposition de phase [R3].

**2.2. Résonance 1:1:2.** Une résonance 1:2 intervient lorsqu'une fréquence propre du système est égale au double d'une autre. Les premières études théoriques et expérimentales sur cette résonance ont été menées sur un système de 2 poutres élancées connectées en L et sur lesquelles une masse glissante permettait d'ajuster les fréquences propres pour les mettre en résonance 1:2 [66, 127]. Cette résonance se retrouve pour le cas des arches [158], des cables [28], des coques circulaires cylindriques [144], des coques à double courbure [4]. Le cas de la résonance 1:1:2 intervient lorsqu'un mode axisymétrique a une fréquence double d'une paire de modes asymétriques, déjà en résonance 1:1. Le cas parfait, où aucun désaccord entre les fréquences propres n'est considéré, a été étudié dans [126]. Notre étude théorique [R6] a montré l'importance de ces désaccords, mettant en évidence que le couplage ne peut se faire que vers l'une ou l'autre des deux configurations asymétriques, mais pas les deux simultanément.

Considérons le cas expérimental où le premier mode axisymétrique (0,1) d'une coque sphérique est excité par une force ponctuelle placée au centre de la coque. Ce mode, noté 3 pour la suite, a sa fréquence propre double d'une paire de modes asymétriques notés 1 et 2. La forme normale du système s'écrit :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon_q [\alpha_1 q_1 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1], \quad (33a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon_q [\alpha_2 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2], \quad (33b)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon_q [\alpha_3 \dot{q}_1^2 + \alpha_4 \dot{q}_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + Q \cos \Omega t], \quad (33c)$$

où seuls les termes quadratiques ont été retenus, et où le forçage n'apparaît pas sur les modes 1 et 2 puisqu'étant placé sur un point nodal. Les paramètres de désaccord suivants sont introduits :  $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon_q \sigma_0$ ,  $\omega_3 = 2\omega_1 + \varepsilon_q \sigma_1$ , et  $\Omega = \omega_3 + \varepsilon_q \sigma_2$ . Une solution en échelles multiples est recherchée, pour laquelle toutes les branches de solution sont analytiques. L'analyse de stabilité fait apparaître deux zones d'instabilité, correspondant chacune à un couplage entre le mode 3 et le mode 1 (solution C1), et un couplage entre le mode 3 et le mode 2 (solution C2). Au point d'intersection de ces 2 régions,

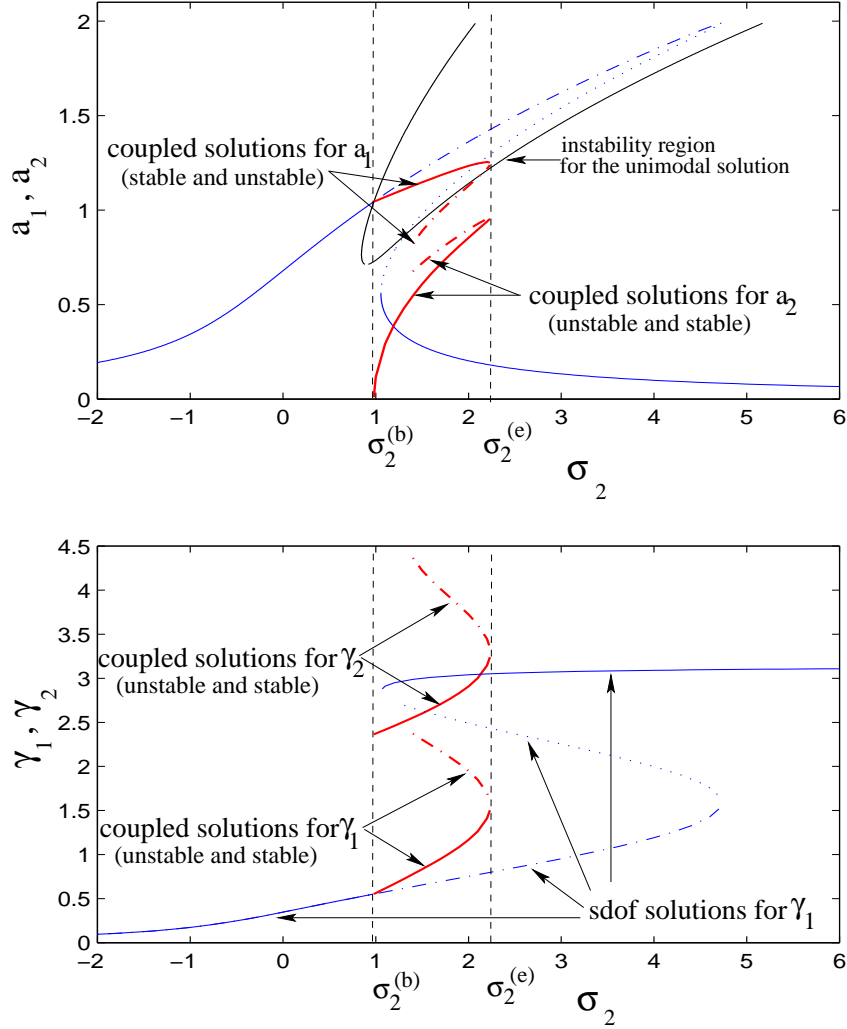


FIG. 2. Amplitudes  $(a_1, a_2)$  et phases  $(\gamma_1, \gamma_2)$  de la solution au premier ordre pour la résonance 1:1. La solution non-couplée (Duffing classique) en bleu, pénètre à l'intérieur de la région d'instabilité (en noir) pour  $\sigma_2 = \sigma_2^{(b)}$ . La solution couplée existe jusqu'à la valeur  $\sigma_2^{(e)}$ .

un échange de stabilité entre les deux solutions s'opère. Ainsi tant que les non-linéarités cubiques ne sont pas prises en compte, on ne peut observer un transfert d'énergie que vers l'une ou l'autre des deux configurations asymétriques, mais pas vers les deux simultanément.

L'article [R11] confirme expérimentalement toutes ces prédictions théoriques. La figure 3 montre le recalage entre les courbes théoriques et mesurées. Un très bon accord qualitatif est obtenu. Quantitativement, des différences subsistent, dues aux imperfections de la coque ainsi qu'à la non-prise en compte des termes cubiques dans le modèle (33). L'effet des termes cubiques a été étudié dans [C18], les imperfections dans [R16]. Enfin le cas de la résonance interne d'ordre trois  $\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3$  a été étudiée dans [C8].

### 3. Turbulence d'ondes

Lorsque l'on continue d'augmenter l'amplitude du forçage après le régime quasipériodique, un régime chaotique s'établit. Celui-ci se caractérise auditivement par un son très riche et brillant, très similaire à celui rendu par une cymbale en mode de jeu usuel (excitation impulsionnelle). Le spectre

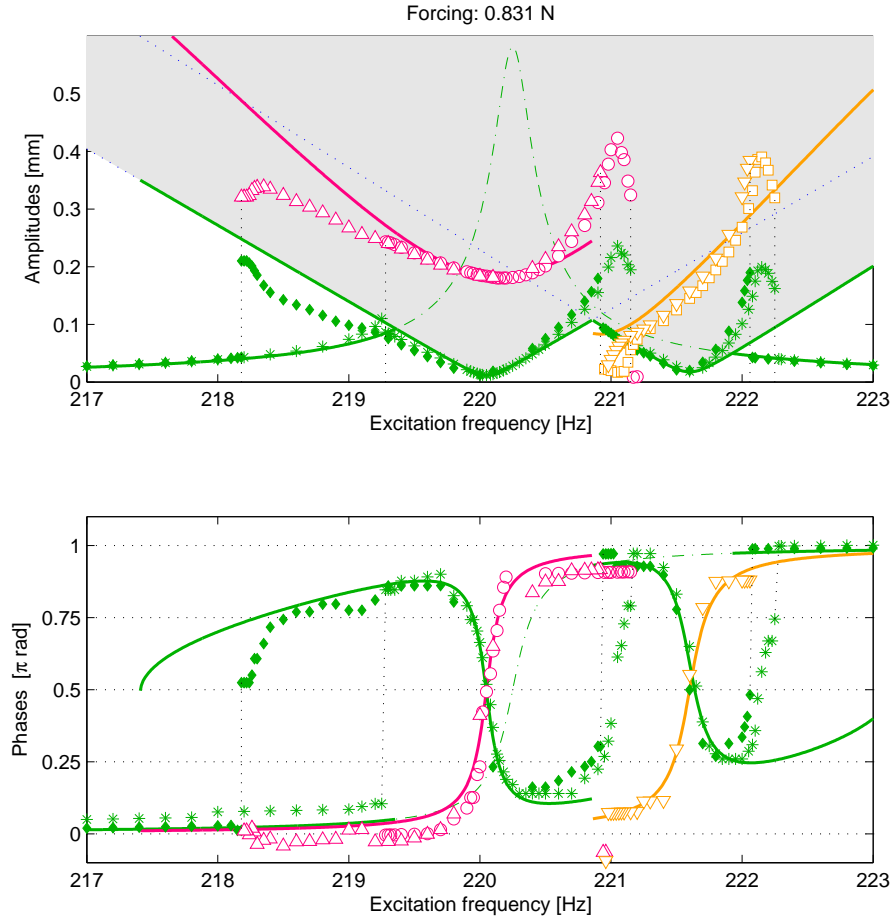


FIG. 3. Amplitudes et phases des coordonnées modales pour le système (33) présentant une relation de résonance 1:1:2. Comparaison théorie/expérience. Zone grisée : région d'instabilité de la solution non-couplée. Vert : mode 3 (directement excité), rouge et orange : modes compagnons 1 et 2.

vibratoire est alors large bande. En utilisant un espace des phases reconstruit à partir de séries temporelles mesurées, nous avons pu mettre en évidence la présence d'au moins un exposant de Lyapunov positif [R1]. Nos premières idées, au cours de ma thèse, ont consisté à tester, avec des méthodes de traitement de signaux chaotiques [1, 85], la dimension de l'attracteur reconstruit, afin de pouvoir dire si une dynamique à petit nombre de degrés de liberté était en jeu, ou non. La convergence de ces calculs de dimension étaient généralement difficile, et les séries temporelles vraisemblablement trop courtes pour pouvoir peupler les attracteurs avec une densité de points suffisante pour obtenir des résultats fiables. Les critères de résonance interne apparaissent eux plus sûrs pour estimer le nombre de modes impliqués dans la vibration. Cependant l'identification à partir de résultats expérimentaux reste possible (bien que difficile) dans le régime quasipériodique uniquement, et montre déjà un nombre assez grand de modes excités par échange d'énergie<sup>2</sup>. Un autre éclairage permettant de mieux décrire ce régime chaotique consiste alors à utiliser les résultats de la théorie de turbulence d'ondes (ou turbulence faible).

<sup>2</sup>Sur la figure 1 on dénombre déjà aisément 6 modes excités en dessous de la fréquence d'excitation, laissant à penser qu'il y a déjà au moins 7 modes (en ajoutant celui directement excité par le forçage) qui participent à la vibration, soit un espace des phases de dimension au moins 15.

La turbulence d'ondes est une théorie qui décrit les propriétés statistiques de systèmes dissipatifs hors équilibre. Elle repose sur 3 hypothèses fortes qui permettent de mener analytiquement les calculs et de se défaire du problème de la fermeture des équations<sup>3</sup>. Les hypothèses sont les suivantes :

- Le milieu est dispersif
- La non-linéarité est faible, ce que l'on peut traduire dans les EDPs du mouvement par la présence d'un coefficient  $\varepsilon$  devant les termes non linéaires. Ceci permet en outre de séparer clairement deux échelles de temps, une échelle de temps rapide linéaire et une échelle de temps lente non linéaire sur laquelle l'énergie se redistribue via les non-linéarités du système.
- Il existe une "fenêtre de transparence" ou "régime inertiel" où l'on peut considérer la dynamique Hamiltonienne.

La troisième hypothèse reprend la vision "classique" de la turbulence et permet de chercher des solutions avec un flux d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles (cascade directe) ou l'inverse. L'énergie est supposée être injectée à basse fréquence, et la dissipation n'est censée jouer qu'aux petites échelles.

Les résultats forts de la turbulence d'ondes sont dus à Zakharov dans les années 1960 [174] : il fut le premier à montrer l'existence de solutions hors équilibre à l'équation cinétique qui résoud le problème de la fermeture. Les spectres tirés de ces solutions ont des propriétés similaires à ceux postulés par Kolmogorov pour la turbulence pleinement développée, et sont analytiques. Les articles récents [34, 46, 128], ainsi que les thèses [33, 45] donnent une vue d'ensemble sur le sujet.

La théorie fut appliquée au cas des plaques minces dans [51], montrant l'existence d'une cascade directe pour une plaque parfaite, et prédisant un spectre de puissance du déplacement de la forme  $P_w(k) = C \frac{P^{1/3}}{[12(1-\nu^2)]^{1/6}} \frac{\ln^{1/3}(k_*/k)}{\sqrt{E/\rho k^4}}$ , où  $C$  est une constante et  $P$  le flux d'énergie par unité de masse.

Omettant la dépendance logarithmique négligeable devant le terme en  $k^{-4}$  et traduisant ce spectre dans le domaine des fréquences temporelles, la prédiction théorique est donc d'un spectre de vitesse indépendant de la fréquence :  $P_{\dot{w}}(f) = C' P^{1/3} f^0$ .

Nous avons mené des expériences, dont les résultats sont reportés dans [R14,R15], sur une grande plaque mince, de dimensions latérales  $1\text{m} \times 2\text{m}$ , d'épaisseur  $h = 0.5$  mm, issue d'un réverbérateur à plaque et étudiée pour faire un modèle de réverbération artificielle dans la thèse de K. Arcas [18]. Cette plaque a été choisie pour sa grande densité modale. Elle est excitée par une force ponctuelle harmonique. Expérimentalement, le flux d'énergie  $P$  est proportionnel à la puissance injectée  $I = \langle F\dot{w}(x_0) \rangle$ , où  $F$  est la force appliquée à la plaque et  $\dot{w}(x_0)$  la vitesse au point  $x_0$  où est appliquée la force. Les spectres de puissance de la vitesse mesurée en un point différent du forçage sont montrés figure 4(a), pour des valeurs croissantes de la puissance injectée  $I$ . On observe une première gamme de fréquence, analogue du régime inertiel, qui se développe au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de la force, avec une dépendance en  $P_{\dot{w}}(f) \sim f^{-\beta}$ ,  $\beta = 0.5 \pm 0.2$ ; suivi d'une chute assez nette qui donnerait l'échelle dissipative. Ces spectres bruts peuvent être recalés sur une courbe universelle, figure 4(b), selon la formule :  $P_v(f) = (I/I_0)^{1/2} \phi(f/f_c)$ ,  $f_c \propto f_i(I/I_0)^\alpha$ , où  $\phi$  est la fonction universelle et  $f_c$  une fréquence de coupure, que l'on trouve proportionnelle à la puissance injectée à la puissance  $\alpha$ , avec  $\alpha = 0.33 \pm 0.01$ , cf. figure 4(c).

En remplaçant la dépendance de  $f_c$  en fonction de  $I$  trouvée, et prenant pour la fonction  $\phi$  la dépendance en  $f^{-1/2}$  mesurée, on trouve au final un spectre expérimental de la forme  $P_{\dot{w}}(f) \sim I^{0.66 \pm 0.07} f^{-0.5 \pm 0.2}$ , ce qui est significativement différent de la prédiction théorique. Une mesure indépendante de la notre, effectuée par N. Mordant à l'ENS [114], confirme ces lois de puissance. Le spectre théorique prédit une dépendance en  $P^{1/3}$  par rapport à la puissance injectée. C'est un résultat général de la turbulence d'ondes : pour une interaction à  $N$  ondes<sup>4</sup>, la dépendance sera en  $P^{1/(N-1)}$ . Pour la plaque parfaite, la

<sup>3</sup>C'est ce problème de fermeture qui rend la turbulence hydrodynamique pleinement développée insoluble analytiquement [60].

<sup>4</sup>Une interaction à  $N$  ondes est possible si deux conditions sont remplies : il faut que la non-linéarité soit d'ordre au plus  $N - 1$ , et on doit remplir la double condition de résonance définie par la variété résonante [128, 174].

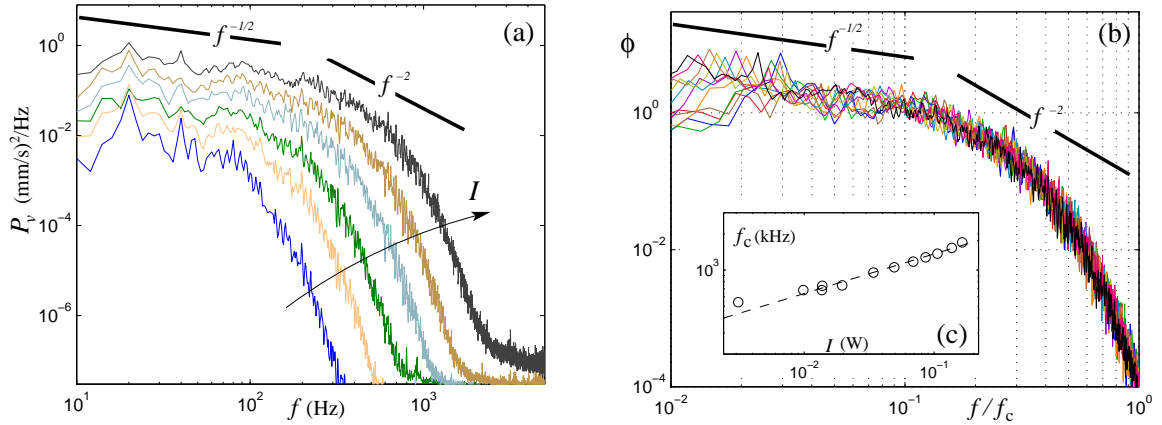


FIG. 4. Spectres de puissance de la vitesse. (a) : spectres bruts pour différentes valeurs de la puissance injectée  $I$ . (b) : spectres mis à l'échelle. (c) : Evolution de la fréquence de coupure avec la puissance injectée, mettant en évidence la loi  $f_c \propto I^\alpha$ ,  $\alpha = 0.33$ .

non-linéarité d'ordre 3 implique une interaction à quatre ondes, ce qui explique la puissance  $P^{1/3}$  prédite théoriquement. Expérimentalement, la plaque est imparfaite, et ces imperfections font apparaître une forte non-linéarité quadratique [R16]. L'exposant  $I^{0.66 \pm 0.07}$  que l'on mesure est d'ailleurs plus proche de  $1/2$  que de  $1/3$ , ce qui laisse à penser que la non-linéarité quadratique joue un rôle important dans le régime de cascade.

Afin d'expliquer la différence observée entre spectre théorique et expérimental, on pourrait remettre en question l'hypothèse de faible non-linéarité et de séparation nette entre les échelles de temps linéaires et non linéaires. Il a été prouvé théoriquement que lorsque cette hypothèse ne tient plus, la dynamique se complexifie et ne peut plus être considérée comme une superposition d'ondes, faisant apparaître un comportement intermittent tel que celui observé en turbulence pleinement développée [34, 128]. L'intermittence est caractérisée par les fonctions de densité de probabilités des incréments de vitesse  $\Delta_\tau v = v(t + \tau) - v(t)$  et le comportement des fonctions de structures  $S_p(\tau) = \langle |\Delta_\tau v|^p \rangle$ . Nos mesures [R14] montrent qu'aucun comportement intermittent n'apparaît. De plus, les mesures rapportées dans [114] montrent bien que les ondes persistent. L'hypothèse à remettre en question est donc plutôt celle de l'existence d'un régime inertiel où la dynamique peut être considérée comme Hamiltonienne.

Même si l'amortissement dans les plaques métalliques est très faible, il joue à toutes les fréquences. Une mesure fine de l'amortissement de la plaque sur la bande  $[0, 20\text{kHz}]$  a été faite par K. Arcas pendant sa thèse [18]. Sur la bande de fréquence  $[30, 2000\text{ Hz}]$ , un comportement très net de l'amortissement  $\gamma_f(f) \sim f^{1/2}$  est observé [R14]. En considérant que la puissance injectée  $P$  est égale à la puissance dissipée entre 0 et la fréquence de coupure, on peut écrire :  $P = \rho S h \int_0^{f_c} \gamma_f(f) P_w(f) df$ , ce qui donne, avec les quantités mesurées :  $P = \rho S h P^{2/3} f_c$ , soit une fréquence de coupure se comportant en  $f_c \sim P^{1/3}$ , ce qui est conforme aux mesures. De nouvelles mesures sont en cours afin de faire varier l'amortissement dans la plaque pour conforter ce scénario. Il est aussi à noter que la présence d'une faible dissipation pour les systèmes hors-équilibre est au cœur des problèmes actuels [31]. Enfin des premières simulations numériques réalisées par C. Josserand<sup>5</sup> en tenant compte d'amortissement montrent aussi l'apparition de cette fréquence de coupure très nette.

<sup>5</sup>C. Josserand, présentation lors du workshop "Wave Turbulence", paris, IHP, Avril 2009.



## Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour point commun les vibrations non linéaires géométriques (grandes amplitudes) de structures minces. Les travaux que nous avons menés ont exploré plus particulièrement deux points précis : la réduction de modèles, en utilisant le formalisme des modes non linéaires, et la transition vers les régimes de vibration chaotiques pour ces systèmes continus. Nous reprenons ici, de manière synthétique, les résultats qui nous semblent les plus marquants pour chacun des deux thèmes, ce qui donne l'occasion de donner les pistes de recherche qui sont envisagées pour les prochaines années.

### Modes non linéaires et réduction de modèles

Nos études sur les modes non linéaires ont montré que la théorie des formes normales donne un formalisme simple permettant de calculer la dynamique dans l'espace des phases engendré par les variétés invariantes. Les troncatures sont donc de meilleures qualités, la compréhension que l'on a des résonances internes et des couplages aussi. Il permet en outre la prise en compte de l'amortissement de manière aisée. En ne conservant qu'un seul MNL dans la forme normale, on est à-même de prédire la tendance de non-linéarité pour un coût de calcul faible.

Les résultats obtenus en utilisant les MNLs en réduction de modèles de coques montrent que c'est la meilleure base réduite possible pour les systèmes excités harmoniquement en très basses fréquences. Les tests de convergence effectués sur plusieurs modèles [R9,R10,R12] montrent effectivement que les erreurs commises par notre méthode sont dues uniquement aux deux approximations faites lors du calcul des MNLs, à savoir le développement asymptotique tronqué à l'ordre trois, et la prise en compte de variétés indépendantes du temps pour un problème forcé. Les perspectives de travail sont les suivantes :

- À court terme, nous prévoyons de tester la robustesse des modèles réduits MNLs pour une excitation aléatoire dont on contrôle la largeur de bande. Partant d'une excitation à bande étroite centrée sur une fréquence propre, et en élargissant la largeur de bande (celle-ci incluant de plus en plus de modes), on obtiendrait ainsi un résultat quantitatif permettant de juger de leur qualité sur des excitations autres que monofréquentielles, et ce toujours pour des amplitudes d'excitations fortes qui impliquent des non-linéarités géométriques.
- Un travail complet de numérisation des procédures de calcul est envisagé à moyen terme, travail qui se décompose en deux volets distincts.
  - (1) Le premier volet consiste à numériser la procédure de discrétisation des EDPs, l'idée étant d'utiliser la méthode des éléments finis avec des éléments de coques pour gagner en souplesse et en généralité. Ce travail a déjà été entamé, en collaboration avec le groupe MACS de l'INRIA, en utilisant des éléments de la famille MITC<sup>6</sup>. Les coefficients de couplage non linéaires quadratiques et cubiques sont exprimés à partir du travail des forces internes et calculés par intégrations sur les éléments. Pour la validation, ce calcul direct des coefficients est comparé aux résultats analytiques présentés au chapitre 1, ainsi qu'aux résultats donnés par une méthode qui consiste à imposer des déplacements statiques ayant la forme de combinaisons

---

<sup>6</sup>MITC signifie Mixed Interpolation of Tensorial Components, ces éléments sont particulièrement désignés pour empêcher le phénomène de verrouillage numérique pour les coques minces [41].



linéaires de modes propres bien choisis. À partir de la force résultante, donnée par le calcul élément fini, on peut remonter aux coefficients selon une méthode proposée dans [110, 116]. Ce travail, déjà bien entamé, devrait donner ses premiers résultats en 2010.

- (2) Le second volet consiste à adopter une procédure numérique pour le calcul des variétés invariantes afin de pallier aux limitations en amplitude montrée dans ce document. Il est déjà acquis que la méthode des formes normales ne pourra pas continuer à être utilisée : la procédure de calcul en elle-même (reposant sur une récurrence qui élimine à chaque ordre les termes non-résonnants) ne se prête pas à une numérisation. L'idée sera alors de reprendre la formulation en termes de variétés invariantes : celle-ci donnant une EDP qui décrit la géométrie de la variété dans l'espace des phases, on pourra appliquer des techniques numériques de résolution d'EDP à ce problème. Une première réflexion a déjà été entamée sur le sujet. Plutôt que de résoudre cette EDP avec une méthode de type Galerkin, comme proposé dans [80, 81, 135], il est possible de voir l'EDP comme un problème en temps dont l'amplitude joue le rôle du temps. Des stratégies plus classiques de résolution peuvent donc être mises en œuvre, pour des amplitudes croissantes. L'étude récente [129] propose d'ailleurs des idées semblables, et met en évidence les problèmes de convergence et de stabilité numériques associés à ce problème et qui le rendent difficile et coûteux numériquement. Par contre une stratégie numérique par continuation d'orbites périodiques, comme proposé dans [23, 92, 132, 152] n'est a priori pas envisagée.
- À long terme, il est envisagé d'étendre les investigations au cas des non-linéarités matérielles. Des travaux existent déjà sur le cas des non-linéarités non-régulières et les problèmes de contact [79, 101], l'extension à des non-linéarités matérielles type comportement élasto-plastique ou pseudo-élastique pour les matériaux à mémoire de forme (MMF) sera donc prochainement mise à l'étude. Pour le comportement élasto-plastique, une modélisation simplifiée telle que présentée dans [39] sera un bon point de départ. Pour les MMF, une collaboration avec le groupe Matériaux et Structures (MS) de l'UME, qui possède une grande expérience expérimentale et théorique sur ce sujet sera entamée. Là aussi, des modèles simples d'oscillateurs pseudo-élastiques tels que présentés dans [30, 98] seront un bon point de départ.

### **Transition vers le chaos**

Les perspectives de travail sur cette partie portent essentiellement sur la seconde bifurcation et le régime chaotique. La plus grande difficulté de ces dernières années a été d'ordre numérique, afin de trouver des intégrateurs temporels stables pour simuler la seconde bifurcation. Ce problème est résolu depuis peu par deux méthodes différentes :

- Pour les systèmes d'oscillateurs provenant de la discrétisation modale telle que présentée dans le chapitre 1, la méthode des BDF (Backward Differentiation method) est stable au passage de la seconde bifurcation. Des simulations sont donc en cours afin de regarder précisément comment l'énergie se répartit quand survient le régime chaotique : a-t-on de nouveaux couplages par résonance interne qui sont excités, ou bien une bifurcation globale et un chaos à grand nombre de degrés de liberté est-elle présente ? Les premières simulations, ainsi que les études expérimentales sur la turbulence d'ondes, montrent que c'est la deuxième solution qui semble intervenir.
- Une collaboration avec Stefan Bilbao (Université d'Edimbourg) a été entamée, afin d'utiliser un code qu'il a développé par différences finies, et schéma en temps conservatif en temps [32]. Les premières simulations montrent un très bon comportement du code, qui retrouve les spectres théoriques de turbulence d'onde. Une comparaison avec la méthode modale sera menée sur le cas d'une plaque rectangulaire, afin de mettre en évidence les avantages et limites de chacune des deux méthodes, en regard de la simulation de ces régimes chaotiques, ainsi que de la synthèse sonore.

A l'aide de ces deux outils numériques, plusieurs points seront aussi prochainement mis à l'étude pour aller le plus loin possible dans les analyses et terminer le travail entamé lors de ma thèse de doctorat avec l'obtention de sons de synthèse réalistes.

- L'ajout d'une imperfection géométrique dans le code par différences finies. L'idée est de voir l'effet des termes quadratiques sur les spectres du régime turbulent, étant donné que ceux-ci ne sont pas pris en compte dans [51] et semblent avoir un rôle prépondérant expérimentalement [R14].
- La prise en compte d'un amortissement réaliste. Ce point sera aussi rapidement mis à l'étude, pour deux raisons particulières. Tout d'abord en lien avec la turbulence d'ondes, où l'on a vu l'importance de l'amortissement sur la fréquence de coupure. Une confirmation numérique, ainsi que des comparaisons expérimentales où la valeur de la dissipation est contrôlée en approchant une plaque poreuse à proximité de la plaque vibrante, sont en cours. Deuxièmement pour la synthèse sonore, où l'on connaît l'importance cruciale de l'amortissement.



## Publications

### Revues internationales avec comité de lecture.

- [R16] C. Camier, C. Touzé and O. Thomas : Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells, *Eur. J. Mechanics, A/solids*, vol. 28, pp. 500-515, 2009.
- [R15] O. Cadot, A. Boudaoud and C. Touzé : Statistics of power injection in a plate set into chaotic vibration, *Eur. Phys. J. B*, vol. 66, pp. 399-407, 2008.
- [R14] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille and C. Touzé : Observation of wave turbulence in vibrating plates, *Physical Review Letters*, **100**, 234504, 2008.
- [R13] C. Touzé, C. Camier, G. Favraud and O. Thomas : Effect of imperfections and damping on the type of non-linearity of circular plates and shallow spherical shells, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2008, Article ID 678307, 19 pages, doi :10.1155/2008/678307, 2008.
- [R12] C. Touzé, M. Amabili and O. Thomas : Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(21-24), 2030-2045, 2008.
- [R11] O. Thomas, C. Touzé and E. Luminais : Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1:1:2 internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, **49**(1-2), 259-284, 2007.
- [R10] M. Amabili and C. Touzé : Reduced-order models for non-linear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : comparison of POD and asymptotic non-linear normal modes methods, *Journal of Fluids and Structures*, **23**(6), 885-903, 2007.
- [R9] C. Touzé and M. Amabili : Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modeling of harmonically forced structures, *Journal of Sound and Vibration*, **298**(4-5), 958-981, 2006.
- [R8] C. Touzé and O. Thomas : Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry, *International Journal of non-linear Mechanics*, **41**(5), 678-692, 2006.
- [R7] A. Chaigne, C. Touzé and O. Thomas : Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals, *Acoustical Science and Technology, Acoust. Soc. of Japan*, **26**(5), 403-409, 2005.
- [R6] O. Thomas, C. Touzé and A. Chaigne : Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance, *Int. J. of Solids and Structures*, **42**(11-12), 3339-3373, 2005.
- [R5] C. Touzé, O. Thomas and A. Huberdeau : Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures, *Computers and Structures*, **82**(31-32), 2671-2682, 2004.
- [R4] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1-2), 77-101, 2004.
- [R3] O. Thomas, C. Touzé and A. Chaigne : Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part II : experiments, *Journal of Sound and Vibration*, **265**(5), 1075-1101, 2003.
- [R2] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne : Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory, *Journal of Sound and Vibration*, **258**(4), 649-676, 2002.
- [R1] C. Touzé and A. Chaigne : Lyapunov exponents from experimental time series. Application to cymbal vibrations, *Acta Acustica*, **86**(3), 557-567, 2000.

### Articles de conférence.

- [C26] C. Touzé, C. Camier and O. Thomas : Type of non-linearity of damped imperfect plates using non-linear normal modes, ENOC-2008, European Non-linear Dynamics conference, Saint-Petersbourg, Russia, July 2008.
- [C25] O. Thomas, L. Nicu, C. Ayela and C. Touzé : Buckling and non-linear vibrations of a MEMS biosensor, ENOC-2008, European Non-linear Dynamics conference, Saint-Petersbourg, Russia, July 2008.
- [C24] C. Camier, C. Touzé and O. Thomas : Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non linéaires de plaques circulaires minces, 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, Aout 2007.
- [C23] C. Touzé, M. Amabili, O. Thomas and C. Camier : Reduction of geometrically non-linear models of shell vibrations including in-plane inertia, Proc. EUROMECH Colloquium No. 483, FEUP, Porto, Portugal, July 2007.
- [C22] O. Thomas, L. Nicu, C. Ayela and C. Touzé : Buckling and non-linear vibrations of a piezoelectric stratified plate – Application to a MEMS biosensor, Proc. EUROMECH Colloquium No. 483, FEUP, Porto, Portugal, July 2007.
- [C21] O. Thomas, L. Nicu, C. Ayela et C. Touzé : Flambage et vibrations non linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique.

- Application à un biocapteur MEMS. Proc. of 8ème colloque national en calcul de structures, Giens, Mai 2007.
- [C20] M. Amabili, C. Touzé et O. Thomas : Comparison of Galerkin, POD and Non-linear normal modes models for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells, ASME IMECE 2006, International Mech. Engin. Congress and Exposition, Chicago, Illinois USA, November 2006.
- [C19] C. Touzé, M. Amabili and O. Thomas : reduced-order models for damped geometrically non-linear vibrations of thin shells via real normal form, Second International Conference on Non-Linear Normal Modes and Localization, Samos, June 2006.
- [C18] O. Thomas and C. Touzé : Large-amplitude forced vibrations of thin shallow spherical shells : reduced-order models at resonance and mode coupling, Second International Conference on Non-Linear Normal Modes and Localization, Samos, June 2006.
- [C17] C. Touzé and O. Thomas : Type of non-linearity of shallow spherical shells using non-linear normal modes, Fifth Euro-mech Non-linear Dynamics Conference (ENOC 2005), Eindhoven, August 2005.
- [C16] O. Thomas, E. Luminais and C. Touzé : Non-linear modal interactions in free-edge thin spherical shells : measurements of a 1:1:2 internal resonance, Third MIT Conference on computational fluid and solid mechanics, Boston, June 2005.
- [C15] O. Thomas, C. Touzé et E. Luminais : Modèles réduits de structures minces en vibrations non linéaires, Proc. of colloque national en calcul de structures, Giens, Mai 2005.
- [C14] C. Touzé and O. Thomas : Reduced-order modeling for a cantilever beam subjected to harmonic forcing, Proc. of EUROROMECH 457 : "Nonlinear modes of vibrating systems", Fréjus, June 7-9, 2004.
- [C13] A. Chaigne, C. Touzé et O. Thomas : Mechanical models of musical instruments and sound synthesis : the case of gongs and cymbals, Proc. of ISMA 2004, Nara, Japon, April 2004.
- [C12] C. Touzé et O. Thomas : Modes normaux non linéaires de systèmes continus, 16ème congrès français de Mécanique, Nice, septembre 2003.
- [C11] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne : Non-linear oscillations of continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities using non-linear normal modes, Second MIT Conference on computational fluid and solid mechanics, Boston, June 2003.
- [C10] C. Touzé and O. Thomas : Determination of non-linear normal modes for conservative systems, Ninth ICSV, Orlando, July 2002.
- [C9] A. Chaigne, M. Fontaine, O. Thomas, M. Ferré and C. Touzé : Vibrations of shallow spherical shells and gongs : a comparative study, Forum Acusticum, Séville, 2002.
- [C8] C. Touzé, P. Lanchantin, A. Chaigne et O. Thomas : Transferts d'énergie par couplage modal : étude d'un cas particulier, Actes du sixième congrès français d'Acoustique, papier No. 269, pp. 558-563, Lille, Avril 2002.(Conférence invitée)
- [C7] O. Thomas, C. Touzé et A. Chaigne : Sur la vibration à un mode asymétrique des plaques circulaires en grands déplacements, Actes du congrès français de Mécanique, Nancy, septembre 2001.
- [C6] O. Thomas, C. Touzé et A. Chaigne : Non-linear behaviour of gongs through the dynamics of simple rods systems, Proceedings of the ISMA, Perugia (Italie), september 2001.
- [C5] A. Chaigne, C. Touzé et O. Thomas : Non-linear axisymmetric vibrations of gongs, Proceedings of the ISMA, Perugia (Italie), september 2001.
- [C4] C. Touzé, F. Orphelin and A. Chaigne : Application of prediction methods to non-linear percussion instruments, Proceedings of ICSV7, July 2000.
- [C3] O. Thomas, C. Touzé and A. Chaigne : Non-linear resonances in large-deflection vibrations of free-edge circular plates, Proceedings of ICSV7, July 2000.
- [C2] C. Touzé et D. Matignon : Techniques d'ordre supérieur pour l'élimination d'exposants de Lyapunov fallacieux, Rencontres du non linéaire, IHP, Editions Paris Onze, pp. 87-92, Mars 2000.
- [C1] C. Touzé, A. Chaigne, T. Rossing and S. Schedin : Analysis of cymbal vibrations using non-linear signal processing tools, Proceedings of the ISMA, pp. 377-382, 1998.

#### **Publication interne / Thèse.**

C. Touzé : Intégration temporelle numérique pour les systèmes dynamiques, rapport interne ENSTA, janvier 2009.

C. Touzé et O. Doaré : Dynamique des systèmes mécaniques : ondes et vibrations, photocopié de cours de l'ENSTA, cours MS204, deuxième année du cycle ingénieur, ENSTA, 2006.

C. Touzé : A normal form approach for non-linear normal modes, Publications du LMA, numéro 156, (ISSN : 1159-0947, ISBN : 2-909669-20-3), Marseille, Janvier 2003.

[T1] C. Touzé : Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques. Application aux instruments de percussion non linéaires. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, novembre 2000.

## Bibliographie

- [1] H. D. I Abarbanel : *Analysis Of Observed Chaotic Data*. Kluwer Academic, New-York, 1997.
- [2] A. Abe, Y. Kobayashi et G. Yamada : Non-linear vibration characteristics of clamped laminated shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 234:405–426, 2000.
- [3] A. Abe, Y. Kobayashi et G. Yamada : Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3-5):957–968, 2007.
- [4] K. A. Alhazza : *Nonlinear vibrations of doubly curved cross-ply shallow shells*. Thèse de doctorat, Virginia polytechnic institute and state university, 2002.
- [5] M. Amabili : A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells : Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1091–1125, 2003.
- [6] M. Amabili : Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shell with imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 262(4):921–975, 2003.
- [7] M. Amabili : Non-linear vibrations of doubly-curved shallow shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 40(5):683–710, 2005.
- [8] M. Amabili : *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] M. Amabili et M. P. Païdoussis : Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. *ASME Applied Mechanical Review*, 56(4):349–381, 2003.
- [10] M. Amabili, F. Pellicano et M. P. Païdoussis : Non-linear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 12:883–918, 1998.
- [11] M. Amabili, F. Pellicano et M. P. Païdoussis : Further comments on nonlinear vibrations of shells. *Journal of Fluids and Structures*, 13(1):159–160, 1999.
- [12] M. Amabili, F. Pellicano et M. P. Païdoussis : Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid, part I : stability. *Journal of Sound and Vibration*, 225(4):655–699, 1999.
- [13] M. Amabili, F. Pellicano et M. P. Païdoussis : Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid, part II : large-amplitude vibrations without flow. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5):1103–1124, 1999.
- [14] M. Amabili, F. Pellicano et M. P. Païdoussis : Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid, part III : truncation effect without flow and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 237(4):617–640, 2000.
- [15] M. Amabili, A. Sarkar et M. P. Païdoussis : Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method. *Journal of Fluids and Structures*, 18(2):227–250, 2003.
- [16] M. Amabili, A. Sarkar et M. P. Païdoussis : Chaotic vibrations of circular cylindrical shells : Galerkin versus reduced-order models via the proper orthogonal decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5):736–762, 2006.
- [17] H. N. Arafat et A. H. Nayfeh : Non-linear responses of suspended cables to primary resonance excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 266:325–354, 2003.
- [18] K. Arcas : *Etude et simulation d'un réverbérateur à plaque*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale de l'Ecole Polytechnique, 2009.
- [19] J. H. Argyris et H. P. Mlejnek : *Dynamics of Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [20] N.M. Arifin, N.S.M. Noorani et A. Kiliçman : Modelling of Marangoni convection using proper orthogonal decomposition. *Nonlinear Dynamics*, 48:331–337, 2007.
- [21] V.I. Arnold : *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer, Berlin, 1977.
- [22] V.I. Arnold : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir-Librairie du Globe, Paris, 1980.
- [23] R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc et B. Cochelin : Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers and Structures*, 84(24-25):1565–1576, 2006.
- [24] M.F.A Azeez et A.F. Vakakis : Proper orthogonal decomposition of a class of vibro-impact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 240:859–889, 2001.
- [25] A.G. Barnston et C.F. Ropelewski : Prediction of ENSO episodes using canonical correlation analysis. *Journal of climate*, 5:1316–1345, 1992.

- [26] P.V. Bayly, E.E. Johnson, P.D. Wolf, W.M. Smith et R.E. Ideker : Predicting patterns of epicardial potentials during ventricular fibrillation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 42:898–907, 1995.
- [27] S. Bellizzi et R. Sampaio : POMs analysis of randomly vibrating systems obtained from Karhunen-Loève expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 297(3-5):774–793, 2006.
- [28] F. Benedettini, G. Rega et R. Alaggio : Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 182(5):775–798, 1995.
- [29] G. Berkooz, P. Holmes et J.L. Lumley : The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of Fluid Mechanics*, 25:539–575, 1993.
- [30] D. Bernardini et F. Vestroni : Non-isothermal oscillations of pseudo-elastic devices. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 38:1297–1313, 2003.
- [31] E. Bertin et O. Dauchot : Far-from-equilibrium state in a weakly dissipative model. *Phys. Rev. Lett.*, 102:160601, 2009.
- [32] S. Bilbao : A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Kármán plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):193–216, 2007.
- [33] L. Biven : *Structure functions, cumulants and breakdown criteria for weak turbulence*. Thèse de doctorat, University of Warwick, Mathematics Institute, 2002.
- [34] L. Biven, S. Nazarenko et A.C. Newell : Breakdown of wave turbulence and the onset of intermittency. *Physics Letters A*, 280:28–32, 2001.
- [35] N. Boivin, C. Pierre et S. Shaw : Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems. *Nonlinear Dynamics*, 8:315–346, 1995.
- [36] A. D. Brjuno : Analytical form of differential equations. *Transactions of Moscow Mathematical Society*, 25:131–288, 1971.
- [37] C. Camier : *Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites : application aux cymbales*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale de l’Ecole Polytechnique, 2009.
- [38] J. Carr : *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag, New-York, 1981.
- [39] N. Challamel et G. Gilles : Stability and dynamics of a harmonically excited elastic-perfectly plastic oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 301(3-5):608–634, 2007.
- [40] S.I. Chang, A.K. Bajaj et C.M. Krousgrill : Non-linear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates with one-to-one internal resonance. *Non-linear Dynamics*, 4:433–460, 1993.
- [41] D. Chapelle et K.-J. Bathe : *The finite Element analysis of shells - Fundamentals*. Springer, Berlin, 2003.
- [42] C.Y. Chia : *Nonlinear analysis of plates*. McGraw Hill, New-York, 1980.
- [43] H-N Chu et G. Herrmann : Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 23:532–540, 1956.
- [44] P.G. Ciarlet : A justification of the von Kármán equations. *Arch. Rat. Mech. analysis*, 73:349–389, 1980.
- [45] C. Connaughton : *New directions in Wave Turbulence*. Thèse de doctorat, University of Warwick, Mathematics Institute, 2002.
- [46] C. Connaughton, S. Nazarenko et A. C. Newell : Dimensional analysis and weak turbulence. *Physica D*, 184:86–97, 2003.
- [47] E.J. Doedel, R. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede et X. Wang : *Auto 2000 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Rapport technique, Concordia University, 2002.
- [48] L. H. Donnell : A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 56:795–806, 1934.
- [49] E. H. Dowell : Comments on the nonlinear vibrations of cylindrical shells. *Journal of Fluids and Structures*, 12(8):1087–1089, 1998.
- [50] H. Dulac : Solutions d’un système d’équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 40:324–383, 1912.
- [51] G. Düring, C. Josserand et S. Rica : Weak turbulence for a vibrating plate : Can one hear a kolmogorov spectrum ? *Phys. Rev. Lett.*, 97:025503, 2006.
- [52] G. J. Efstathiades : A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using galerkin’s procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2):231–253, 1971.
- [53] C. Elphick, G. Iooss et E. Tirapegui : Normal form reduction for time-periodically driven differential equations. *Physics Letters A*, 120(9):459–463, 1987.
- [54] C. Elphick, E. Tirapegui, M.E. Brachet, P. Couillet et G. Iooss : A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D*, 29:95–127, 1987.
- [55] D. A. Evensen : Nonlinear vibrations of cylindrical shells – logical rationale. *Journal of Fluids and Structures*, 13(1): 161–164, 1999.
- [56] H.A. Evensen et R.M. Ewan-Iwanowsky : Dynamic response and stability of shallow spherical shells subject to time-dependent loading. *AIAA Journal*, 5(5):969–976, 1967.
- [57] B.F. Feeny : On the proper orthogonal modes of continuous vibration systems. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 124(1):157–160, 2002.
- [58] B.F. Feeny et R. Kappagantu : On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):607–616, 1997.

- [59] B.F. Feeny et Y. Liang : Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265:953–966, 2003.
- [60] U. Frisch : *Turbulence*. Cambridge Univers. Press, 1995.
- [61] I. Georgiou : Advanced proper orthogonal decomposition tools : Using reduced order models to identify normal modes of vibration and slow invariant manifolds in the dynamics of planar nonlinear rods. *Nonlinear Dynamics*, 41(1-3):69–110, 2005.
- [62] P. B. Gonçalves : Axisymmetric vibrations of imperfect shallow spherical caps under pressure loading. *Journal of Sound and Vibration*, 174(2):249–260, 1994.
- [63] P.B. Gonçalves, F.M.A. Silva et Z.J.G.N. Del Prado : Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 315:641–663, 2008.
- [64] P. L. Grossman, B. Koplik et Y-Y. Yu : Nonlinear vibrations of shallow spherical shells. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 39E:451–458, 1969.
- [65] J. Guckenheimer et P. Holmes : *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [66] A. G. Haddow, A. D. S. Barr et D.T. Mook : Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, 97:451–473, 1984.
- [67] J. Hadian et A.H. Nayfeh : Modal interaction in circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 142:279–292, 1990.
- [68] M. Haragus et G. Iooss : *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite dimensional systems*. EDP Science, 2009.
- [69] G. Herrmann : Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. Rapport technique, No. 3578, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1955.
- [70] P. Holmes, J.L. Lumley et G. Berkooz : *Coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- [71] D. Hui : Large-amplitude axisymmetric vibrations of geometrically imperfect circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2(91):239–246, 1983.
- [72] D. Hui : Large-amplitude vibrations of geometrically imperfect shallow spherical shells with structural damping. *AIAA Journal*, 21(12):1736–1741, 1983.
- [73] P. Hémon et F. Santi : Applications of biorthogonal decompositions in fluid-structure interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 17:1123–1143, 2003.
- [74] G. Iooss : Global characterization of the normal form for a vector field near a closed orbit. *Journal of Differential Equations*, 76:47–76, 1988.
- [75] G. Iooss et M. Adelmeyer : *Topics in bifurcation theory*. World scientific, New-York, 1998. second edition.
- [76] G. Iooss et E. Lombardi : Polynomial normal forms with exponentially small remainder for analytic vector fields. *Journal of Differential Equations*, 212:1–61, 2005.
- [77] G. Iooss et E. Lombardi : Approximate invariant manifolds up to exponentially small terms. *Journal of Differential Equations*, to appear, 2009.
- [78] D. Jiang : *Nonlinear modal analysis based on invariant manifolds. Application to rotating blade systems*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2004.
- [79] D. Jiang, C. Pierre et S. Shaw : Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):869–891, 2004.
- [80] D. Jiang, C. Pierre et S. Shaw : The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 40(5):729–746, 2005.
- [81] D. Jiang, C. Pierre et S. Shaw : Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 288(4-5):791–812, 2005.
- [82] M. W. Johnson et E. Reissner : On transverse vibrations of shallow spherical shells. *Quarterly Applied Mathematics*, 15(4):367–380, 1956.
- [83] I.T. Jolliffe : *Principal Component Analysis*. Springer, 2002. second edition.
- [84] L. Jézéquel et C. H. Lamarque : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3):429–459, 1991.
- [85] H. Kantz et T. Schreiber : *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge university press, Cambridge, 1997.
- [86] K. Karhunen : Uber lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annals of Academic Science Fennicae, Series AI Mathematics and Physics*, 37:3–79, 1946.
- [87] Th.von Kármán : Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4):311–385, 1910.
- [88] A. Kelley : The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. *Journal of Differential Equations*, 3:546–570, 1967.
- [89] G. Kerschen, B.F. Feeny et J.C. Golinval : On the exploitation of chaos to build reduced-order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:1785–1795, 2003.
- [90] G. Kerschen et J.C. Golinval : Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5):849–865, 2002.



- [91] G. Kerschen, J.C. Golinval, A.F. Vakakis et L.A. Bergman : The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear Dynamics*, 41:147–169, 2005.
- [92] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval et A.F. Vakakis : Non-linear normal modes, part I : a useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194, 2009.
- [93] M.E. King et A.F. Vakakis : Energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116:332–340, 1994.
- [94] W. T. Koiter : On the nonlinear theory of thin elastic shells. part I, II and III. In *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, volume B69, pages 1–54, 1965.
- [95] D. Kosambi : Statistics in function space. *Journal of Indian Mathematical Society*, 7:76–88, 1943.
- [96] E. Kreuzer et O. Kust : Analysis of long torsional strings by proper orthogonal decomposition. *Archive of Applied Mechanics*, 67(1-2):68–80, 1996.
- [97] P. Krysl, S. Lall et J.E. Marsden : Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for numerical methods in engineering*, 51:479–504, 2001.
- [98] W. Lacarbonara, D. Bernardini et F. Vestroni : Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5-6):1209–1234, 2004.
- [99] W. Lacarbonara, G. Rega et A. H. Nayfeh : Resonant nonlinear normal modes. part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 38(6):851–872, 2003.
- [100] S. Lall, P. Krysl et J.E. Marsden : Structure-preserving model reduction for mechanical systems. *Physica D*, 184:304–318, 2003.
- [101] D. Laxalde et F. Thouverez : Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interface. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5):1009–1025, 2009.
- [102] Z.W. Lin, K.H. Lee, P. Lu, S.P. Lim et Y.C. Liang : The relationship between eigenfunctions of karhunen-loève decomposition and the modes of distributed parameter vibration system. *Journal of Sound and Vibration*, 256(4):791–799, 2002.
- [103] M. Loeve : Fonctions aléatoires du second ordre. In P. Lévy, éditeur : *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Paris, 1948.
- [104] E.N. Lorenz : Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Rapport technique, Statistical Forecast Project Report 1, Department of Meteorology, MIT, 1956.
- [105] A.M. Lyapunov : Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Série 2*, 9:203–474, 1907.
- [106] L.I. Manevitch et Yu.V. Mikhlin : On periodic solutions close to rectilinear normal vibration modes. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 36(6):1051–1058, 1972.
- [107] P. Manneville : *Instabilités, chaos et turbulence*. Editions de l'Excole Polytechnique, Palaiseau, 2004.
- [108] S. Maurel, J. Borée et J.L. Lumley : Extended proper orthogonal decomposition : application to jet/vortex interaction. *Flow, Turbulence and Combustion*, 67:125–136, 2001.
- [109] L. Meirovitch : *Computational Methods in Structural Dynamics*. Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1980.
- [110] M. Mignolet et C. Soize : Stochastic reduced-order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems. *Computer Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 197:3951–3963, 2008.
- [111] Yu.V. Mikhlin : Normal vibrations of a general class of conservative oscillators. *Non-linear Dynamics*, 11:1–15, 1996.
- [112] O. Millet, A. Hamdouni et A. Cimetière : Justification du modèle bidimensionnel non-linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre. *C. R. Académie des Sciences IIb*, 324:349–354, 1997.
- [113] H. J.-P. Morand et R. Ohayon : *Fluid structure interaction*. J. Wiley & sons, 1995.
- [114] N. Mordant : Are there waves in elastic wave turbulence ? *Phys. Rev. Lett.*, 100:234505, 2008.
- [115] J.K. Moser : Periodic orbits near an equilibrium and a theorem. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 29:727–747, 1976.
- [116] A.A. Muravyov et S.A. Rizzi : Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers and Structures*, 81:1513–1523, 2003.
- [117] A. H. Nayfeh : *Method of Normal Forms*. John Wiley & sons, New-York, 1993.
- [118] A. H. Nayfeh : On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Control*, 1:389–430, 1995.
- [119] A. H. Nayfeh : Reduced-order models of weakly non-linear spatially continuous systems. *Nonlinear Dynamics*, 16:105–125, 1998.
- [120] A. H. Nayfeh : *Nonlinear interactions : analytical, computational and experimental methods*. Wiley series in nonlinear science, New-York, 2000.
- [121] A. H. Nayfeh, C. Chin et S. A. Nayfeh : On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *Trans. ASME/Journal of Vibration and Acoustics*, 118:340–345, 1996.
- [122] A. H. Nayfeh et W. Lacarbonara : On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic non-linearities. *Nonlinear Dynamics*, 13:203–220, 1997.
- [123] A. H. Nayfeh et D. T. Mook : *Nonlinear oscillations*. John Wiley & sons, New-York, 1979.
- [124] A. H. Nayfeh, J. F. Nayfeh et D. T. Mook : On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 3:145–162, 1992.

- [125] A. H. Nayfeh et S. A. Nayfeh : On nonlinear normal modes of continuous systems. *Trans. ASME/Journal of Vibration and Acoustics*, 116:129–136, 1994.
- [126] A. H. Nayfeh et R. A. Raouf : Non-linear oscillations of circular cylindrical shells. *International Journal of Solids Structures*, 23(12):1625–1638, 1987.
- [127] A. H. Nayfeh et L. D. Zavodney : Experimental observation of amplitude and phase-modulated responses of two internally coupled oscillators to a harmonic excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55:706–710, 1988.
- [128] A.C. Newell, S. Nazarenko et L. Biven : Wave turbulence and intermittency. *Physica D*, 152-153:520–550, 2001.
- [129] D. Noreland, S. Bellizzi, C. Vergez et R. Bouc : Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5):983–1002, 2009.
- [130] R. Ohayon et C. Soize : *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, London, 1998.
- [131] L. Pastur, F. Lusseyran, Y. Fraigneau et B. Podvin : Determining the spectral signature of spatial coherent structures in an open cavity flow. *Physical review E*, 72:065301, 2005.
- [132] M. Peeters, R. Vignié, G. Sérandour, G. Kerschen et J.C. Golinval : Non-linear normal modes, part II : toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):195–216, 2009.
- [133] F. Pellicano, M. Amabili et M. P. Paidoussis : Effect of the geometry on the non-linear vibration of circular cylindrical shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 37:1181–1198, 2002.
- [134] E. Pesheck : *Reduced-order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2000.
- [135] E. Pesheck, C. Pierre et S. Shaw : A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5):971–993, 2002.
- [136] K. Pham : Réduction de modèle pour la simulation cardiaque. Rapport technique, INRIA/MACS, 2007. Stage de Master TACS.
- [137] V. Pliss : Principal reduction in the theory of stability of motion. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Math. Ser.*, 28:1297–1324, 1964. (in Russian).
- [138] H. Poincaré : *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthiers-Villars, Paris, 1892.
- [139] A. Raman et C. D. Mote Jr. : Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 36:261–289, 2001.
- [140] A. Raman et C. D. Mote Jr. : Experimental studies on the non-linear oscillations of imperfect circular disks spinning near critical speed. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 36:291–305, 2001.
- [141] R.H. Rand : A direct method for non-linear normal modes. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 9:363–368, 1974.
- [142] G. Rega, W. Lacarbonara et A. H. Nayfeh : Reduction methods for nonlinear vibrations of spatially continuous systems with initial curvature. *Solid Mechanics and its applications*, 77:235–246, 2000.
- [143] G. Rega et H. Troger : Dimension reduction of dynamical systems : Methods, models, applications. *Nonlinear Dynamics*, 41:1–15, 2005.
- [144] F. A. Mc Robie, A. A. Popov et J. M. T. Thompson : Auto-parametric resonance in cylindrical shells using geometric averaging. *Journal of Sound and Vibration*, 227(1):65–84, 1999.
- [145] R. M. Rosenberg : The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29:7–14, 1962.
- [146] R. M. Rosenberg : On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9:155–242, 1966.
- [147] R. Sampaio et C. Soize : Remarks on the efficiency of POD for model reduction in non-linear dynamics of continuous elastic systems. *International Journal for numerical methods in Engineering*, 72(1):22–45, 2007.
- [148] J.L.Jr. Sanders : Nonlinear theories for thin shells. *Quarterly of Applied Mechanics*, 21:21–36, 1963.
- [149] S. W. Shaw et C. Pierre : Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173, 1991.
- [150] S. W. Shaw et C. Pierre : Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124, 1993.
- [151] S. W. Shaw et C. Pierre : Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):85–124, 1994.
- [152] J.C. Slater : A numerical method for determining nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 10(1):19–30, 1996.
- [153] S. Sridhar, D. T. Mook et A. H. Nayfeh : Non-linear resonances in the forced responses of plates, part I : symmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3):359–373, 1975.
- [154] S. Sridhar, D. T. Mook et A. H. Nayfeh : Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II : asymmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 59(2):159–170, 1978.
- [155] A. Steindl et H. Troger : Methods for dimension reduction and their applications in nonlinear dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 38:2131–2147, 2001.
- [156] O. Thomas : *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques. Application aux instruments de percussion*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2001.
- [157] O. Thomas et S. Bilbao : Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):569–590, 2008.

- [158] W. M. Tien, N. S. Namachchivaya et A. K. Bajaj : Non-linear dynamics of a shallow arch under periodic excitation, I : 1 :2 internal resonance. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 29(3):349–366, 1994.
- [159] S. A. Tobias : Free undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.*, 171:691–700, 1957.
- [160] S. A. Tobias et R. N. Arnold : The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.*, 171:669–690, 1957.
- [161] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Philipchuck et A. A. Zevin : *Normal modes and localization in non-linear systems*. Wiley, New-York, 1996.
- [162] A.F. Vakakis : Non-linear normal modes (nnms) and their application in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1):3–22, 1997.
- [163] A. Weinstein : Normal modes for nonlinear hamiltonian systems. *Inv. Math.*, 20:47–57, 1973.
- [164] S. Wiggins : *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, New-York, 2003. Second edition.
- [165] C.J.H Williams et S.A. Tobias : Forced undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks. *Journal of Mechanical Engineering science*, 5:325–335, 1963.
- [166] C.G. Wu, Y.C. Liang, W.Z. Lin, H.P. Lee et S.P. Lim : A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, 265:1103–1110, 2003.
- [167] N. Yamaki : *Elastic stability of circular cylindrical shells*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [168] X.L. Yang et P.R. Sethna : Local and global bifurcations in parametrically excited vibrations of nearly square plates. *International journal of Non-linear Mechanics*, 26(2):199–220, 1991.
- [169] X.L. Yang et P.R. Sethna : Non-linear phenomena in forced vibrations of a nearly square plate -antisymmetric case. *Journal of Sound and Vibration*, 155(3):413–441, 1992.
- [170] K. Yasuda et T. Asano : Nonlinear forced oscillations of a rectangular membrane with degenerated modes. *Bulletin of JSME*, 29(255):3090–3095, 1986.
- [171] K. Yasuda et G. Kushida : Nonlinear forced oscillations of a shallow spherical shell. *Bull. JSME*, 27(232):2233–2240, 1984.
- [172] M. H. Yeo et W. K. Lee : Corrected solvability conditions for non-linear asymmetric vibrations of a circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 257(4):653–665, 2002.
- [173] Z. Yosibash et R.M. Kirby : Dynamic response of various von kármán non-linear plate models and their 3-d counterparts. *International Journal of Solids and Structures*, 42:2517–2531, 2005.
- [174] V. E. Zakharov, V. S. Lvov et G. Falkovich : *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*. Springer Verlag, Berlin, 1992.